「七十二學年度大學聯考數學試題」

雜　感

陳昭地

今年大學聯考已經過一個多月了！許多的專家學者或教師對今年的數學試題提出了精闢的見解；現在我想就親自參與數學科閱卷以至於近五、六星期來跟高中數學教師接觸、討論之心得，寫出本文來跟各位討論。

一、試題的特色方面

1. 今年自然組與社會組的試題，改變近幾年來的慣例，兩組的題目絕少雷同，完全相同的題目僅有一題，如此可促使社會組學生興趣之提高，減少恐懼感，並使社會組數學教學能正常進行。

2. 題數安排恰當，使考生有充分答卷時間，並能發揮應有實力。

3. 題目的難易度，除兩組各有一題非選擇題外，都很恰當。

4. 今年數學科高、低標準之差距除保持往年之「最大」的特點外，高低標準有顯著的提高，顯示本年數學試題鑑別度頗高且佔聯考總分極重要的一部份！可促使學生重視數學科之學習而不會再輕易放棄數學！

5. 今年非選擇題的空白卷特別少，考生多多少少都會去做題目，這可能是考生比以往準備較充分或是大部分試題難易適中，或是受到去年數學科非選擇題採用分段給分的影響！因此，平時學生肯去嘗試解決問題，雖然沒有完全解決但其中按解決問題的過程所獲致的部分正確概念或結果，仍可獲得部分適當分數！

二、試題的缺失方面

了解試題編製的原理原則或曾親自命題的人，都深深體會一分理想的試題確實很不容易，通常要花費很長的時間與修訂的過程，但是聯考試題的編製雖然給命題小組，已有充分的時間，但針對保密原則，要先透過試測而來修訂問題以目前的狀況而言是不可能的，因此本次的數學試題雖然具有許多值得往後繼續保持的特色，難免有一些缺失，由於聯考試題之命題方式會深深的影響教師的命題與教學，故在此我們願就從幾個角度來談談本次數學試題的一些缺失，期使將來的命題小組與高中數學教師能更小心處理試題，儘可能減少不甚合適的試題出現。

1. 試題文字數據須重新組織，避免直抄原始資料；此次數學試題最受到批評的就是部分試題直接採用原始資料，數據沒有變換，因此可能使一部分考生獲取不該得到的分數。

2. 單一選擇題的選項宜儘量避免重疊，尤其不宜出現明顯的包含關係的選項。例如：乙丁組〔甲〕試題 1 爲單選題

設 ΔABC 三邊長爲 $AB=5$，$BC=8$，$CA=7$，則 $\angle ABC$ 爲 Ⓐ非特別角小於 $\pi/2$ Ⓑ $\pi/3$ Ⓒ $\pi/6$ Ⓓ $\pi/4$ Ⓔ非特別角小於 $\pi/3$。

上題之選項Ⓐ包含Ⓔ故使選項Ⓔ變成沒有意義，使考生有較多猜對的機會。如果將結果改成（其他不變）：則 $\angle ABC$ 跟下列何角最接近呢？

Ⓐ $\frac{2\pi}{3}$ Ⓑ $\frac{\pi}{2}$ Ⓒ $\frac{\pi}{3}$ Ⓓ $\frac{\pi}{4}$ Ⓔ $\frac{\pi}{6}$

就可避免選目間的包含關係而仍可達到原預定評量的目標。

3. 選擇題中「若……則……」之使用在複選的問題上似宜特別小心，避免造成答題無謂困擾；例如：

甲丙組〔己〕題：在三度空間（採用直角坐標系（x,y,z））有一點 P，坐標爲（x，0，z），設 p 與 q 分別表由 P 到（x,y）平面上的圓 $x^2+y^2=a^2$ 的最長與最短距離，令 Q 的坐標爲（$a\cos\theta$，$a\sin\theta$，0）的點，則

Ⓐ $PQ=\sqrt{\frac{p^2+q^2}{2}+\frac{p^2-q^2}{2}\cos\theta}$

Ⓑ $PQ=\sqrt{p^2\sin^2\frac{\theta}{2}+q^2\cos^2\frac{\theta}{2}}$

Ⓒ $PQ=\sqrt{p^2\cos^2\frac{\theta}{2}+q^2\sin^2\frac{\theta}{2}}$

Ⓓ $PQ=\sqrt{\frac{p^2+q^2}{2}-\frac{p^2-q^2}{2}\cos\theta}$

Ⓔ以上皆非（複選）

乙丁組〔丁〕大題 7. $f(x)$ 與 $g(x)$ 有一次之最大公因式時，則 k 之值爲

Ⓐ 5 Ⓑ -5 Ⓒ 3 Ⓓ -3 Ⓔ -2（複選）

其中乙丁組之題，無以上皆非之選目，答案稍易，不致產生大困擾，但在甲丙組的上一題中，選目中出現Ⓔ以上皆非，而且複選題也也可能只有一個答案之聲明，因而可能造成一些學生雖然會解這個問題但卻不知如何來圈選正確的答案，換句話說，這樣的情形無形中造成作答圈選上的困擾，如果甲丙組〔己〕題條件中加上“ $x>0$ ”而其他保留，乙丁組將「則 k 之值爲」改成「則 k 可能爲下列何值？」這樣子就會避免會解題而不知如何圈選適當答案的困擾。根據幾位高中數學教師的表示，這樣造成答案困擾的題目，以前也曾經出現過，給他們教學上產生很大的困擾，不知如何向學生來交代，最近幾年度這種試題已不再出現，他們深切期望今年這樣容易造成作答選擇困擾的問題以後會永不復現！

4. 乙丁組的非選擇題第 2 題：

設 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，求 $\frac{2}{\sin\theta}+\frac{3}{\cos\theta}$ 之最小值。

甲丙組的非選擇題第 2 題：

設　$S_n=\sum_{k=2}^{n}\log_2\left(\cos\frac{\pi}{2^k}\right)$

求證　$-1<S_n<0$

分別是兩組難度最高的試題，尤其是「若把乙丁組的這一題擺在甲丙組上，難度可能還是最高」這可能是命題小組沒料到的！對熟悉三角函數微分技巧的考生而言，乙丁組這一道題是很通俗簡單的好問題，但目前高中數學課程標準並未正式包含多項函數以外之有關利用微分法求極值的問題探討，因此本題依據命題小組的構想應該是「雙重歌西不等式」的應用，頗具技巧，除非考前作過，否則很難於短暫的考試時間內想出來，了不起只用到一次的歌西不等式或用其他不正確的方法來求解了！甲丙組的這道問題，可能有一些考生考前看過，否則很難想出完整的解決辦法，也很難完全測出學生程度！這兩道題應是分別爲這兩份試題中難度超高又未能測出學生眞正能力的問題！如果命題小組能稍爲降低這兩題的難度而增加其他題目的一些難度，則此兩份試題必然更加理想；例如：甲丙組的第2題可改命成：

2％①試證：

當$0<\theta<\frac{\pi}{2}$時，$\sin\theta<\theta$

2％②試證：

$$\sin\theta=2^n\ \sin\frac{\theta}{2^n}\cos\frac{\theta}{2^n}\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\theta}{2}\qquad(n\geq 2)$$

6％③設$S_n=\sum_{k=2}^{n}\log_2\left(\cos\frac{\pi}{2^k}\right)$，

試證　$-1<S_n<0$

如此，才易使考前未曾做過這樣的類似問題，而其實力頗高的學生能在指定的時間證得「$-1<S_n<0$」也因此才較容易達到甄別才能高低的目的。

三、對高中數學教師或準備應考者的一些建議

去年數學傳播九月曾刊載康明昌教授「閱卷雜感」(一文,此文對高中數學教師是非常值得一讀的；除此之外，本人想就今年實際參與非選擇題閱卷的經驗，提出一些感想，或許也很值得有心者的參考。

1.從非選擇題的閱卷中，往往會發現有一部分的學生不知如何作答，似乎會答選擇題，而對非選擇題或許把過程寫在非選擇題答案紙外，或根本缺乏過程僅直接寫出答案，換句話說答案紙上缺少演算過程而只寫出答案！這樣的作答方式絕對不符合非選擇題作答方式；如果答案不正確固然不能得分，即使答案都正確了！可能得不到全分，或許吃虧會很大！即使作圖題，也是一樣必須簡明寫出化簡過程；因此應該注意非選擇**必須寫明演算過程**。

2.今年的數學科非選擇題人工閱卷部分，仍採用分段給分標準，在未來的幾年內，分段給分方法仍可望繼續使用，每一道問題，就其解決問題的重要步驟或數據給予部分分數；換句話說，雖然沒有完善的解決原問題，但仍可依分段給分的標準獲得一部分的分數；因此，教師們應積極鼓勵學生平時培養肯自動作問題的習慣，聯考時，應盡力去做，不宜貿然放棄！

3.如果考生使用高中教材四種版本所介紹過的方法求解，其中產生小疏忽，那麼依分段給分標準，可能還可得到一些部分分數；但若使用未通俗的符號、方法來求解，務必交代清楚，如果過程答案完全正確，當然還是得全分，否則產生一些小疏忽就可能會付出很大的代價！產生小疏忽被扣分是很不值得的，故作答案

演算務必特別小心才是；今年乙丁組的非選擇題三、四兩題就顯現出許多學生除法過程該變號而疏忽了！或使用不通俗的方法求四邊形面積，以類似「綜合除法」求

$$x^3 + kx^2 + lx + m$$

除以 $x^2 + x + 1$

殺雞用牛刀，但卻都在某些步驟疏忽了！

4.有些考生利用兩種方法來求解同一個問題，而這兩種方法可能都是正確或有一不正確，但最後得到了不同答案，交卷時未把不要之方法刪除，如此對考生本身而言可能會吃虧些。

5.有極少數的考生作問題沒有完全解決時，就把它刪除作廢而未必有時間重做，但如依分段給分之方法，若未刪除其作答部分可能可獲得一些部分分數，也因此可能使這樣的考生少得幾分，非常可惜。因此即使未完全解決問題除非有時間重做，否則不宜隨便刪除。

—本文作者現任教於師大數學系、所—