多邊形面積之求法專論

羅添壽

前　　言

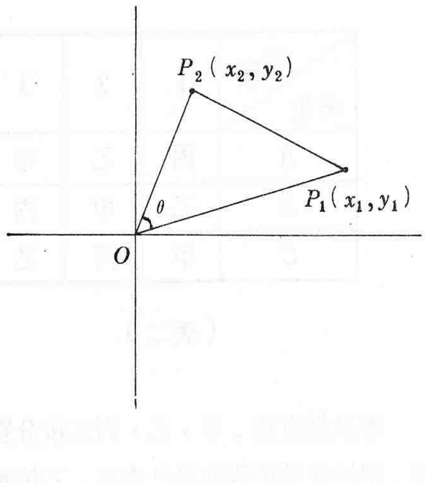
聯考前夕，一些應考生，問筆者今年聯考是否會考：「已知 n 多邊形之頂點依次為 P_1（x_1，y_1），P_2（x_2，y_2），P_3（x_3，y_3）……P_n（x_n，y_n），求此多邊形面積，並證明之」，倘會考，該如何證明。（若不是為了聯考，學生們根本不想去知道其運算過程，反正法則已背熟，能利用公式解題即可。）此問，給筆者帶來了動機，即是否將此問題整理成章，供學生、教師們參考呢？（由於校方趕課程進度，故大部份的教師們對此部分皆省略其證明過程，故特整編之，以利讀者研習）。今筆者以數學歸納法證明之。

問題①

設 xy 平面上，O 為原點，P_1，P_2 之坐標分別為（x_1，y_1），（x_2，y_2），試求 ΔOP_1P_2 之面積。

解：今以向量證明之。（未唸向量的同學請見另解）

如圖令 $\overrightarrow{OP_1}$ 與 $\overrightarrow{OP_2}$ 之夾角為 θ，且 $\overrightarrow{OP_1}=〔x_1, y_1〕$，$\overrightarrow{OP_2}=〔x_2, y_2〕$



則 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}}{|\overrightarrow{OP_1}|\cdot|\overrightarrow{OP_2}|}$

$$\therefore\quad \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{(\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2})^2}{|\overrightarrow{OP_1}|^2\cdot|\overrightarrow{OP_2}|^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{|\overrightarrow{OP_1}|^2\cdot|\overrightarrow{OP_2}|^2-(\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2})^2}}{|\overrightarrow{OP_1}|\cdot|\overrightarrow{OP_2}|}$$

又 ΔOP_1P_2 之面積爲

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{OP_1}|\cdot|\overrightarrow{OP_2}|\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OP_1}|^2\cdot|\overrightarrow{OP_2}|^2-(\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)-(x_1x_2+y_1y_2)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{x_1^2x_2^2+x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2+y_1^2y_2^2-x_1^2x_2^2-2x_1x_2y_1y_2-y_1^2y_2^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{x_1^2y_2^2-2x_1x_2y_1y_2+x_2^2y_1^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1y_2-x_2y_1)^2}$$

$$=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$$

$$=\pm\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1)$$

註① $\Delta OP_1P_2P_3$ 之面積 $\pm\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1)$ 可書爲

$$\frac{1}{2}\left(\begin{array}{cccc} O & x_1 & x_2 & O \\ O & y_1 & y_2 & O \end{array}\right)$$

或 $$-\frac{1}{2}\left(\begin{array}{cccc} O & x_2 & x_1 & O \\ O & y_2 & y_1 & O \end{array}\right)$$

即依 O，P_1，P_2，O 逆時針方向取正，O，P_2，P_1，O 順時針方向取負（學生們皆知其表示法，故在此不說明之）。

故 ΔOP_1P_2 之面積可書爲

$$\left|\frac{1}{2}\begin{array}{cccc} O & x_1 & x_2 & O \\ O & y_1 & y_2 & O \end{array}\right|=\frac{1}{2}|x_2y_2-x_2y_1|$$

② 此題另解如下：

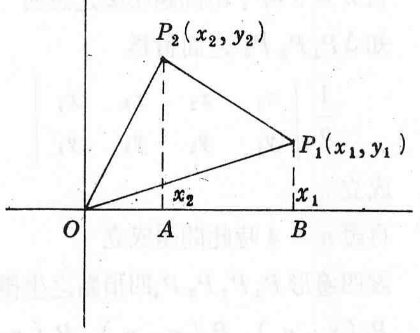
$\Delta OP_1P_2=\Delta OAP_2+$ 梯形 $ABP_1P_2-\Delta OBP_1$

$$=\frac{1}{2}x_2y_2+\frac{1}{2}(y_1+y_2)(x_1-x_2)$$

$$-\frac{1}{2}x_1y_1$$

$$=\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1)$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$



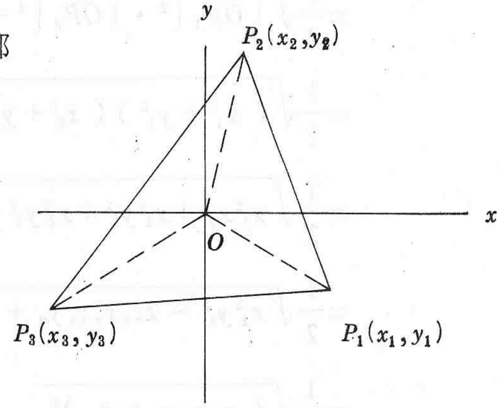
問題②

設$\Delta P_1P_2P_3$ 之頂點不在原點，且(x_1, y_1)，$P_2(x_2, y_2)$，$P_3(x_3, y_3)$，求證$\Delta P_1P_2P_3$ 之面積可書爲

$$\frac{1}{2}\left|\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{matrix}\right|,$$

$|\quad|$表絕對值。

解：依題意知原點O，可在$\Delta P_1P_2P_3$之內部，外部或邊上。今只證原點O在形內，如圖



$\Delta P_1P_2P_3$

$= \Delta OP_1P_2 + \Delta OP_2P_3 + \Delta OP_3P_1$

$= \frac{1}{2}[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2)$

$+ (x_3y_1 - x_1y_3)]$

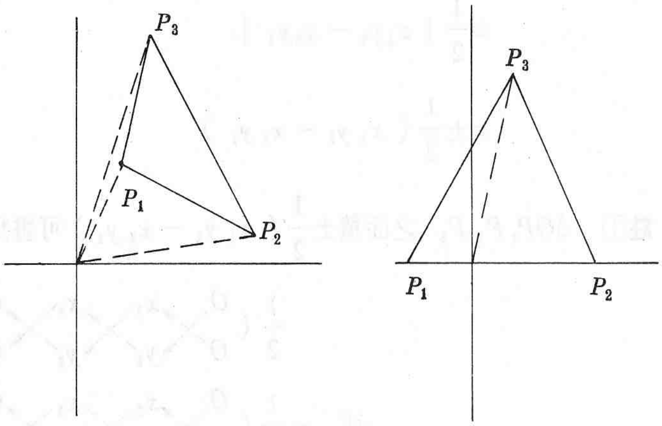
（由問題①，各頂點，依逆時針方向取得）

$= \frac{1}{2}[(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1)$

$-(x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)]$

$$= \frac{1}{2}\left|\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{matrix}\right|$$

同理可證原點O在形外或邊上亦成立，如圖（讀者自習）



問題③

xy 平面上，設

$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，$P_3(x_3, y_3)\cdots\cdots P_n(x_n, y_n)$

依逆時針（或順時針）爲n多邊形之n個頂點，其中$n \geqslant 3$，$n \in N$，則其面積可書爲：

$$\frac{1}{2}\left|\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots\cdots\cdots\cdots & x_{n-1} & x_n & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & & y_{n-1} & y_n & y_1 \end{matrix}\right|,$$

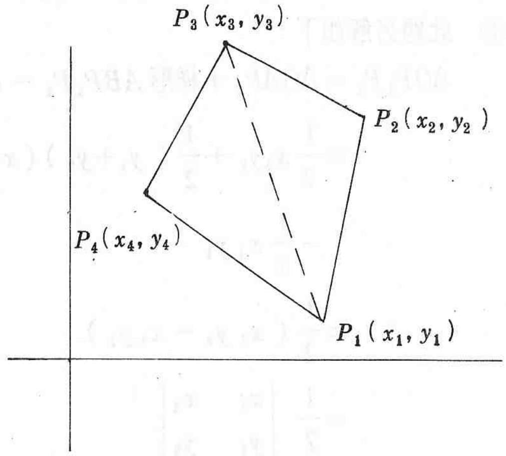
其中$|\quad|$表絕對值。

証：今以數字歸納法證明如下：

1° 當$n=3$時，由問題①②之證明知$\Delta P_1P_2P_3$之面積爲

$$\frac{1}{2}\left|\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{matrix}\right|$$

成立。



2° 再證$n=4$時此問題成立

設四邊形$P_1P_2P_3P_4$四頂點之坐標分別爲

$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，$P_3(x_3, y_3)$，

$P_4(x_4, y_4)$ 如上圖

$\because$ 四邊形 $P_1P_2P_3P_4 = \Delta P_1P_2P_3 + \Delta P_3P_4P_1$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 & x_4 & x_1 & x_3 \\ y_3 & y_4 & y_1 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3)$$

$$+ \frac{1}{2}(x_3y_4 + x_4y_1 + x_1y_3 - x_4y_3 - x_1y_4 - x_3y_1)$$

$$= \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_4y_3 - x_1y_4)$$

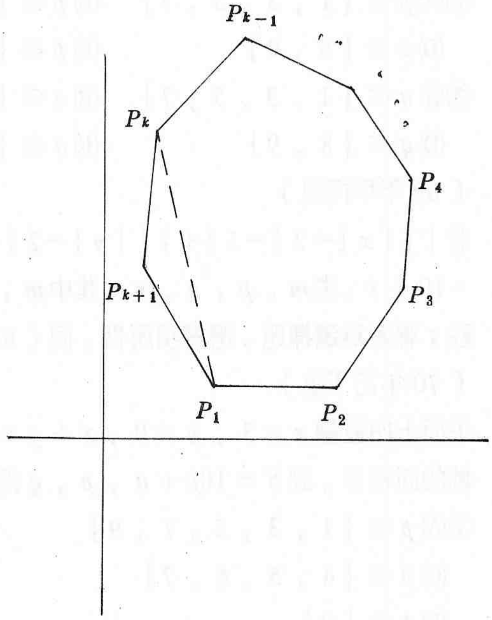
$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_1 \end{vmatrix}$$

3° 設當 $n = k$ 時公式成立

即 k 邊形之面積爲 $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots\cdots & x_k & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & & y_k & y_1 \end{vmatrix}$ 成立

今再證 $n = k+1$ 時亦成立

由圖知



多邊形 $P_1P_2P_3\cdots\cdots P_kP_{k+1}$ 之面積

$=$ 多邊形 $P_1P_2P_3\cdots\cdots P_k + \Delta P_kP_{k+1}P_1$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots\cdots & x_{k-1} & x_k & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & & y_{k-1} & y_k & y_1 \end{vmatrix}$$

$$+ \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_k & x_{k+1} & x_1 & x_k \\ y_k & y_{k+1} & y_1 & y_k \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + \cdots\cdots + x_{k-1}y_k + x_ky_1$$

$$- x_2y_1 - x_3y_2 \cdots - x_ky_{k-1} - x_1y_k)$$

$$+ \frac{1}{2}(x_ky_{k+1} + x_{k+1}y_1 + x_1y_k - x_{k+1}y_k$$

$$- x_1y_{k+1} - x_ky_1)$$

$$= \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + \cdots\cdots + x_{k-1}y_k + x_ky_{k+1} + x_{k+1}y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - \cdots\cdots$$

$$- x_ky_{k-1} - x_{k+1}y_k - x_1y_{k+1})$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots\cdots & x_{k-1} & x_k & x_{k+1} & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & & y_{k-1} & y_k & y_{k+1} & y_1 \end{vmatrix}$$ 故得證

$\therefore \forall n \in N$，$n \geq 3$，原式恆眞。

討論：①此種解法，不論凸或凹多邊形，公式恒成立。

②由此法解題，可省略很多不必要之運算，請看歷屆聯考試題分析

歷屆聯考試題追踪

1. （50年甲組）（65夜甲乙丙丁）

考慮曲線Γ：$||x|-1|+||y|-1|=2$ 這曲線所圍成區域之面積。

2. （60年乙丁組）

在 xy 一平面上考慮下列多邊形區域 $T=\{(x,y)\mid |x|\leqslant y\leqslant 11-|x-6|\}$，試求各頂點之坐標及此區域之面積。

3. （60年甲丙組）

在 xy 一平面上考慮下列多邊形區域 $T=\{(x,y)\mid ||x-5|-x|\leqslant y\leqslant 15-x\}$，試求各頂點之坐標及此區域之面積

4. （69年乙丁組）

若 $||x-2|-1|+||y-2|-1|=3$ 之圖形爲一 $4m$ 邊形，其面積爲 $10p+q$ 則

①(A) $m\in\{1,3,5,7\}$　(B) $m\in\{2,3,6,7\}$　(C) $m\in\{4,5,6,7\}$
　(D) $m\in\{8,9\}$　(E) $m\in\{0,8\}$

②(A) $p\in\{1,3,5,7\}$　(B) $p\in\{2,3,6,7\}$　(C) $p\in\{4,5,6,7\}$
　(D) $p\in\{8,9\}$　(E) $p\in\{0,8\}$

③(A) $q\in\{1,3,5,7\}$　(B) $q\in\{2,3,6,7\}$　(C) $q\in\{4,5,6,7\}$
　(D) $q\in\{8,9\}$　(E) $q\in\{0,8\}$　（其中 m，p，q 爲0至9之整數）

5. （69年甲丙組）

若 $|||x|-2|-1|+|||y|-2|-1|=3$ 之圖形爲一 $4m$ 邊形，其面積爲 $p\cdot10^2+q\cdot10+r$，求 m，p，q，r，其中 m，p，q，r 爲0至9之整數。

註：聯考爲選擇題，選擇項所問，同（69乙丁組），故省略。

6. （70年乙丁組）

平面上四直線 $x=3$，$y=0$，$x+y=10$ 及 $4x-y=10$ 圍成一四邊形區域，計算這個區域的面積 S，設 $S=10p+q$，p，q 爲0至9之整數，則

①(A) $p\in\{1,3,5,7,9\}$　(B) $p\in\{2,3,6,7\}$
　(C) $p\in\{4,5,6,7\}$　(D) $p\in\{8,9\}$
　(E) $p\in\{0\}$

②(A) $q\in\{1,3,5,7,9\}$　(B) $q\in\{2,3,6,7\}$
　(C) $q\in\{4,5,6,7\}$　(D) $q\in\{8,9\}$
　(E) $q\in\{0\}$

試題提示

1. Ans：24

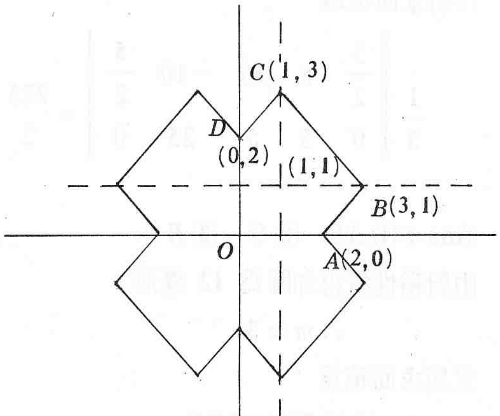
由對稱性質得如圖

所得面積 $= 4 \times$ 多邊形 $OABCD$ 之面積

$$= 4 \times \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \times 6$$

$$= 24$$



2. Ans：$\frac{85}{2}$

由討論

$$\begin{cases} x < 0 \\ -x \leqslant y \leqslant x+5 \end{cases}$$

或 $$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 6 \\ x \leqslant y \leqslant x+5 \end{cases}$$

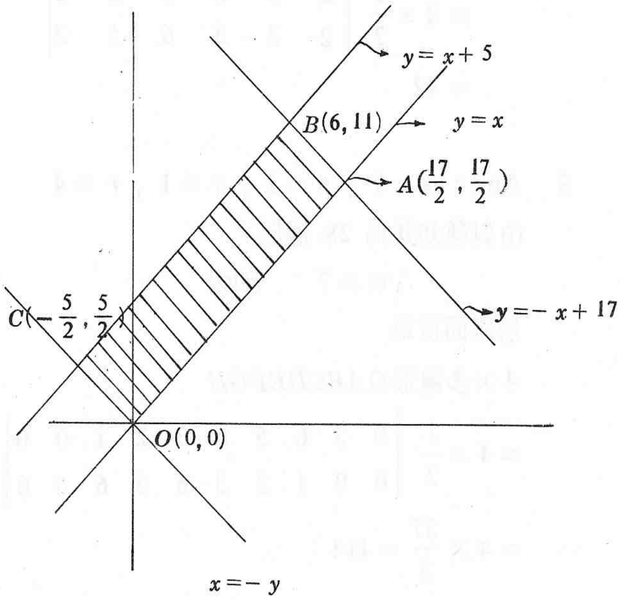
或 $$\begin{cases} x > 6 \\ x \leqslant y \leqslant -x+17 \end{cases}$$

得各頂點 $O(0, 0)$，$A(\frac{17}{2}, \frac{17}{2})$

$B(6, 11)$，$C(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$

$\therefore$ 多邊形 $0ABC$ 之面積為

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & \frac{17}{2} & 6 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & \frac{17}{2} & 11 & \frac{5}{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{85}{2}$$



3. Ans：$\frac{225}{2}$

考慮 $y = \left| |x-5| - x \right|$

$$\begin{cases} \text{當 } x \geqslant 5 \Rightarrow y = 5 \\ \text{當 } x \leqslant 5 \Rightarrow y = |-2x+5| \end{cases}$$

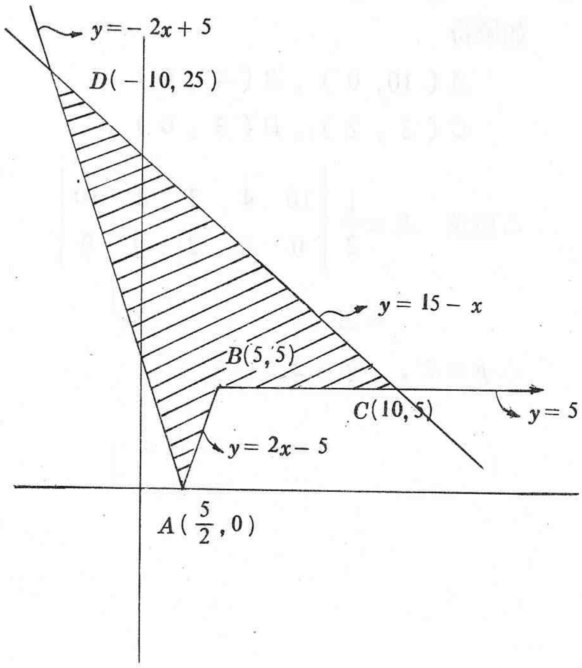
此時

$$\begin{cases} \text{當 } x \leqslant \frac{5}{2} \Rightarrow y = -2x+5 \\ \text{當 } x > \frac{5}{2} \Rightarrow y = 2x-5 \end{cases}$$

得如圖各頂點為

$A(\frac{5}{2}, 0)$，$B(5, 5)$

$C(10, 5)$，$D(-10, 25)$



∴所求面積爲

$$\frac{1}{2}\left|\begin{array}{cccccc} \frac{5}{2} & 5 & 10 & -10 & \frac{5}{2} \\ 0 & 5 & 5 & 25 & 0 \end{array}\right| = \frac{225}{2}$$

4. Ans：① AB　② C　③ B

由對稱性質得知圖爲 12 邊形

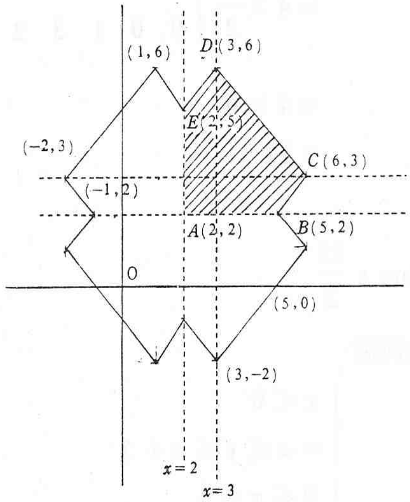
$\therefore m=3$

又所求面積爲

$4\times$多邊形 $ABCDE$

$$=4\times\frac{1}{2}\left|\begin{array}{cccccc} 2 & 5 & 6 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 5 & 2 \end{array}\right|$$

$=42$



5. Ans：$m=7$，$p=1$，$q=1$，$r=4$

由對稱知其爲 28 邊形

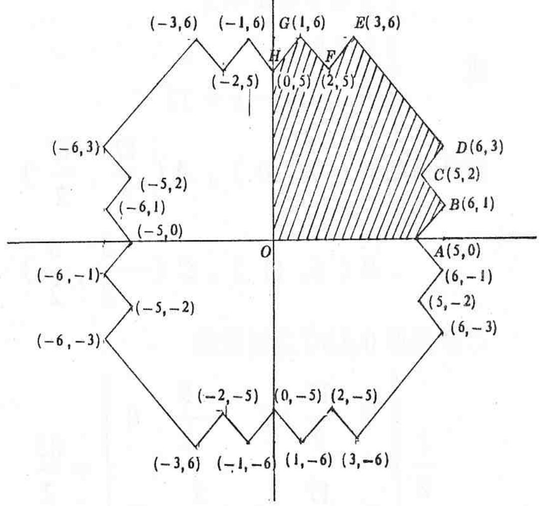
$\therefore m=7$　　如圖

所求面積爲

$4\times$多邊形 $OABCDEFGH$

$$=4\times\frac{1}{2}\left|\begin{array}{cccccccccc} 0 & 5 & 6 & 5 & 6 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 6 & 5 & 6 & 5 & 0 \end{array}\right|$$

$$=4\times\frac{57}{2}=114$$



6. Ans：① B　② B

如圖得

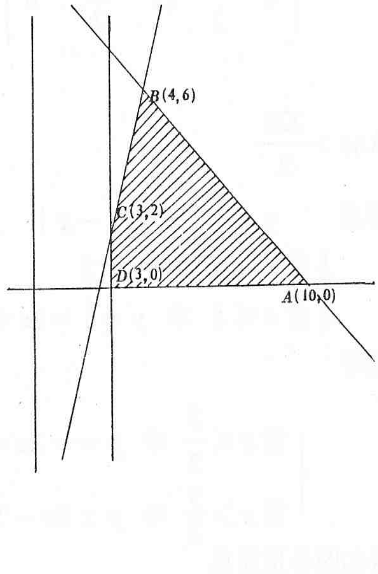
$A(10,0)$，$B(4,6)$，

$C(3,2)$，$D(3,0)$。

$$\therefore\text{所求}\quad S=\frac{1}{2}\left|\begin{array}{ccccc} 10 & 4 & 3 & 3 & 10 \\ 0 & 6 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

$=22$

$\therefore p=2$，$q=2$



—本文作者現任敎於新化高中—