從一個聯考試題談起

潘振輝

今年大專聯考乙丁組數學試題的非選擇部分，第二題恰好是筆者在六十五年本刊第一卷第一期的徵題徵答中提出的問題。重述如下：

設 $\quad 0<\theta<\frac{\pi}{2}$

求 $\quad \frac{2}{\sin\theta}+\frac{3}{\cos\theta}$ 的極小值

某生解法如下：

$\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}$，$\frac{2}{\sin\theta}$ 與 $\frac{3}{\cos\theta}$ 均為正數

則 $\frac{2}{\sin\theta}+\frac{3}{\cos\theta}\geq 2\sqrt{\frac{2}{\sin\theta}\cdot\frac{3}{\cos\theta}}$

$=2\sqrt{\frac{12}{\sin\theta}}\geq 4\sqrt{3}$

故可求極小值為 $4\sqrt{3}$。

請問上述作法是否有不妥當之處，並說明理由。

顯然，此解法有誤，因利用正數的算術平均數大於或等於其幾何平均數來求極值，必定在等號成立才可求得。

即 $\quad \frac{2}{\sin\theta}=\frac{3}{\cos\theta}$

但 $\quad \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

則 $\quad \sin\theta=\frac{2}{\sqrt{13}},\quad \cos\theta=\frac{3}{\sqrt{13}}$

此時 $\frac{2}{\sin\theta}+\frac{3}{\cos\theta}=2\sqrt{13}>4\sqrt{3}$ 不合

因此，藉「數學傳播」徵求各方賢達的解法，但大部分來稿僅指出此題解法不妥，或由微分法求極值。沒有以現行高中課程標準的高中學生程度來解此題。

後來，筆者曾經利用歌西－舒瓦玆不等式的方向來想

設 $\quad p>0$，$q>0$，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$

對 $\dfrac{p}{\sin\theta}+\dfrac{q}{\cos\theta}$ 而言，取 $c\sin\theta+d\cos\theta$，其中 $c>0$，$d>0$。

由歌西－舒瓦茲不等式知

$$\left[\left(\sqrt{\frac{p}{\sin\theta}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{q}{\cos\theta}}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{c\sin\theta}\right)^2+\left(\sqrt{d\cos\theta}\right)^2\right]\geq\left(\sqrt{pc}+\sqrt{qd}\right)^2$$

即 $$\left(\frac{p}{\sin\theta}+\frac{q}{\cos\theta}\right)(c\sin\theta+d\cos\theta)\geq\left(\sqrt{pc}+\sqrt{qd}\right)^2 \quad\cdots\cdots①$$

又 $c\sin\theta+d\cos\theta=\sqrt{c^2+d^2}\sin(\theta+\varphi)$

其中

$$\cos\varphi=\frac{c}{\sqrt{c^2+d^2}},$$

$$\sin\varphi=\frac{d}{\sqrt{c^2+d^2}},$$

$$0<\varphi<\frac{\pi}{2}。$$

則 $$\frac{1}{c\sin\theta+d\cos\theta}=\frac{1}{\sqrt{c^2+d^2}\sin(\theta+\varphi)}\quad\cdots\cdots②$$

由①②知

$$\frac{p}{\sin\theta}+\frac{q}{\cos\theta}\geq\frac{\left(\sqrt{pc}+\sqrt{qd}\right)^2}{\sqrt{c^2+d^2}\sin(\theta+\varphi)}\quad\cdots\cdots③$$

由③知，$\sin(\theta+\varphi)=1$ 時

$\dfrac{p}{\sin\theta}+\dfrac{q}{\cos\theta}$ 有最小值 $\dfrac{\left(\sqrt{pc}+\sqrt{qd}\right)^2}{\sqrt{c^2+d^2}}$

但此時要考慮①的等號成立，其充要條件爲

$$\frac{\sqrt{\dfrac{p}{\sin\theta}}}{\sqrt{c\sin\theta}}=\frac{\sqrt{\dfrac{q}{\cos\theta}}}{\sqrt{d\cos\theta}}$$

即 $$\frac{p}{c\sin^2\theta}=\frac{q}{d\cos^2\theta}\quad\cdots\cdots④$$

又 $\sin(\theta+\varphi)=1$，

可取 $\theta+\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ 即 $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\varphi$

於是 $$\sin\theta=\cos\varphi=\frac{c}{\sqrt{c^2+d^2}},$$

$$\cos\theta=\sin\varphi=\frac{d}{\sqrt{c^2+d^2}}$$

則 $$\sin^2\theta=\frac{c^2}{c^2+d^2},$$

$$\cos^2\theta=\frac{d^2}{c^2+d^2}\quad\cdots\cdots⑤$$

由④⑤得

$$\frac{p}{c^2}=\frac{q}{d^3} \quad 即 \quad \frac{\sqrt[3]{p}}{c}=\frac{\sqrt[3]{q}}{d}$$

故 $\dfrac{p}{\sin\theta}+\dfrac{q}{\cos\theta}$ 的最小值爲

$$\frac{\left(\sqrt{pc}+\sqrt{qd}\right)^2}{\sqrt{c^2+d^2}}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{p\sqrt[3]{p}}+\sqrt{q\sqrt[3]{q}}\right)^2}{\sqrt{(\sqrt[3]{p})^2+(\sqrt[3]{q})^2}}$$

$$=\left(\sqrt[3]{p^2}+\sqrt[3]{q^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

雖然，由微分法可證實此答案爲正確，但對於此解法仍採取保留的態度，過了一段時間，就將此問題忘得一乾二淨了。

想不到，七月三日看到聯考乙丁組數學考卷居然有一道似曾相似的題目。在腦子裏繞了一大圈才想起來，這不就是曾經研討過的題目嗎？此題不能用「平均數不等式」來解，利用「歌西－舒瓦茲不等式」可能也有問題。最可靠的解法是微分法，然而，對三角函數求導函數，並不在高中課程標準之內。如果以高中學生的程度不能解此題，或者可解而以此題爲試題使全體乙丁組考生都解不出來，此種試題是否達到評量的目的。另一方面，徒然將丁考生的數學成績總平均減去 10 分之多，會不會影響到考生對數學的學習興趣呢？筆者希望此後聯考試題應詳加斟酌，在高中學生所學程度範圍內爲要。

—本文作者現任教於北一女中—