聯考試題雜記

羅添壽

7月2日當天，筆者接到試卷後，即以「應考生」的心情應「烤」，發覺試題比筆者想像中的要「普遍」、「合理」。不但難易適中，試題份量恰當，而且計算過程較往年簡易，尤其「甲丙」與「乙丁」組試題能因各組程度而分開命題，實是一大革新，然美中不足的是:

(I) 甲丙組「己」大題，測不出學生眞正的程度，且聯招公佈之標準答案有異議；值得硏討。

試題： 在三度空間（採用直角坐標系（x，y，z））有一點P坐標爲（x，0，z）設p與q分別表P至（x，y）平面的圓 $x^2+y^2=a^2$ 的最長與最短距離。

令Q的坐標爲（$a\cos\theta$，$a\sin\theta$，0）的點，則

(A) $PQ=\sqrt{\dfrac{p^2+q^2}{2}+\dfrac{p^2-q^2}{2}\cos\theta}$

(B) $PQ=\sqrt{p^2\sin^2\dfrac{\theta}{2}+q^2\cos^2\dfrac{\theta}{2}}$

(C) $PQ>\sqrt{p^2\cos^2\dfrac{\theta}{2}+q^2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}$

(D) $PQ=\sqrt{\dfrac{p^2+q^2}{2}-\dfrac{p^2-q^2}{2}\cos\theta}$

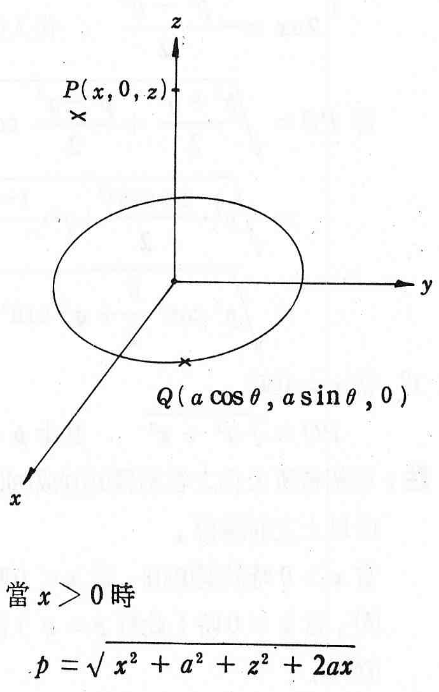
(E)以上皆非

解：

$\because\ PQ=\sqrt{(x-a\cos\theta)^2+(-a\sin\theta)^2+z^2}$

$=\sqrt{x^2+a^2+z^2-2ax\cos\theta}$ ……①

$\because -1\leqslant\cos\theta\leqslant 1$



1° 當$x>0$時

$p=\sqrt{x^2+a^2+z^2+2ax}$

（其中$\cos\theta=-1$）

$$q=\sqrt{x^2+a^2+z^2-2ax}$$

（其中 $\cos\theta=1$）

$$\therefore p^2+q^2=2(x^2+a^2+z^2)$$

$$\therefore x^2+a^2+z^2=\frac{p^2+q^2}{2}$$

$$p^2-q^2=4ax$$

$$\therefore 2ax=\frac{p^2-q^2}{2} \quad \text{代入①}$$

$$\text{得 } PQ=\sqrt{\frac{p^2+q^2}{2}-\frac{p^2-q^2}{2}\cos\theta}$$

$$=\sqrt{p^2\cdot\left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)+q^2\cdot\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)}$$

$$=\sqrt{p^2\sin^2\frac{\theta}{2}+q^2\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

2° 當 $x<0$ 時

$$p=\sqrt{x^2+a^2+z^2-2ax}$$

（其中 $\cos\theta=1$）

$$q=\sqrt{x^2+a^2+z^2+2ax}$$

（其中 $\cos\theta=-1$）

$$\therefore\begin{cases}p^2+q^2=2(x^2+a^2+z^2)\\ p^2-q^2=-4ax\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x^2+a^2+z^2=\dfrac{p^2+q^2}{2}\\ 2ax=-\dfrac{p^2-q^2}{2} \quad \text{代入①}\end{cases}$$

$$\text{得 } PQ=\sqrt{\frac{p^2+q^2}{2}+\frac{p^2-q^2}{2}\cos\theta}$$

$$=\sqrt{p^2\cdot\frac{1+\cos\theta}{2}+q^2\cdot\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$$=\sqrt{p^2\cos^2\frac{\theta}{2}+q^2\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

3° 當 $x=0$ 時

$$PQ=\sqrt{a^2+z^2} \quad \text{其中 } p=q$$

註：聯招會所公佈之答案爲(B)(D)或(B)(A)；然由以上之討論得，

當 $x>0$ 時該選(B)(D)，當 $x<0$ 時該選(A)，當 $x=0$ 時（此時 $p=q$）該選(B)(D)(A)，

然，會作題且會分類的學生對「則」後面的答案方法有時會產生困擾，何況又有(E)以上皆非的選目，故可能會去選(E)（複選也可能僅有一答案）故筆者認爲選(A)(B)(D)，或(A)或(B)(D)或(E)均宜給分。

（II） 乙丁組計算題(一)，思考不易，不宜於聯考中出現，以免失去考試之意義。

試題：設 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，求 $\dfrac{2}{\sin\theta}+\dfrac{3}{\cos\theta}$ 之最小值

解法①：以柯西不等式解之

$$\because\ (\sqrt[3]{2}\sin\theta+\sqrt[3]{3}\cos\theta)\cdot\left(\frac{2}{\sin\theta}+\frac{3}{\cos\theta}\right)\geqslant(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9})^2$$

$$\text{等號於 } \frac{\sqrt[3]{2}\sin^2\theta}{2}=\frac{\sqrt[3]{3}\cos^2\theta}{3}$$

$$\text{即 } \frac{\sin^2\theta}{\sqrt[3]{4}}=\frac{\cos^2\theta}{\sqrt[3]{9}}\Rightarrow\frac{\sin\theta}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\cos\theta}{\sqrt[3]{3}}$$

時成立（$\because 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$）

$$\therefore \frac{2}{\sin\theta}+\frac{3}{\cos\theta}\geqslant\left(\frac{(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9})^2}{\sqrt[3]{2}\sin\theta+\sqrt[3]{3}\cos\theta}\right)\cdots\cdots\text{①}$$

$$\text{又 } ((\sqrt[3]{2})^2+(\sqrt[3]{3})^2)(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\geqslant(\sqrt[3]{2}\sin\theta+\sqrt[3]{3}\cos\theta)^2$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt[3]{2}\sin\theta+\sqrt[3]{3}\cos\theta}\geqslant\frac{1}{\sqrt{(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9})}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}$$

$$\text{等號於 } \sin\theta=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}}}$$

$$\cos\theta=\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}}}$$

時成立。

由①②得

$$\frac{2}{\sin\theta}+\frac{3}{\cos\theta}\geqslant\frac{(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9})^2}{\sqrt{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}}}$$

①②時之等號能同時成立故最小值爲

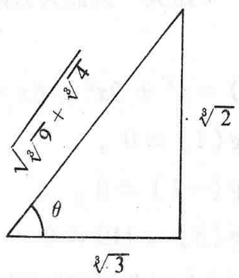
$$\frac{(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2})^2}{\sqrt{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}}}=(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9})^{\frac{3}{2}}$$

解法②：以微積分解之（此解法超出程度）

$$f(\theta)=\frac{2}{\sin\theta}+\frac{3}{\cos\theta}$$
$$=2(\sin\theta)^{-1}+3(\cos\theta)^{-1}$$
$$f'(\theta)=-2(\sin\theta)^{-2}\cos\theta-3(\cos\theta)^{-2}(-\sin\theta)$$
$$=\frac{-2\cos\theta}{\sin^2\theta}+\frac{3\sin\theta}{\cos^2\theta}$$
$$=\frac{-2\cos^3\theta+3\sin^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$
$$=0$$

即 $2\cos^3\theta=3\sin^3\theta\ \Rightarrow\ \tan^3\theta=\frac{2}{3}$

$$\Rightarrow\ \tan\theta=\sqrt[3]{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}$$



$$\therefore\ \sin\theta=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{4}}},$$

$$\cos\theta=\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{4}}}$$

又 $f''(\theta)=-2[(\sin\theta)^{-2}(-\sin\theta)+\cos\theta\cdot(-2)(\sin\theta)^{-3}\cos\theta]$
$+3[(\cos\theta)^{-2}\cos\theta+\sin\theta\cdot(-2)(\cos\theta)^{-3}\cdot(-\sin\theta)]$
$=2(\sin\theta)^{-1}+4(\sin\theta)^{-3}\cos^2\theta+3(\cos\theta)^{-1}+6\sin^2\theta(\cos\theta)^{-3}$

今將 $\sin\theta$，$\cos\theta$ 之值分別代入 $f''(\theta)$ 中得 $f''(\theta)>0$ 成立

$\therefore\ f(\theta)$ 在 $\tan^3\theta=\frac{2}{3}$

即 $\tan\theta=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}$ 有最小值

其最小值爲

$$f(\theta)=\frac{2\cdot\sqrt{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[3]{2}}+\frac{3\cdot\sqrt{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[3]{3}}$$

（以 $\sin\theta$，$\cos\theta$ 代入）

$$=(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{4})^{\frac{3}{2}}$$

今將此題之錯誤解法，列出僅供參考

誤解（Ⅰ）：

由算術平均數知

$$\frac{2}{\sin\theta}+\frac{3}{\cos\theta}\geqslant 2\sqrt{\frac{2}{\sin\theta}\cdot\frac{3}{\cos\theta}}$$

$$\therefore\frac{2}{\sin\theta}+\frac{3}{\cos\theta}\geqslant 4\sqrt{\frac{3}{\sin 2\theta}}\cdots\cdots\cdots①$$

$\because 0<2\theta<\pi\quad\therefore 0<\sin 2\theta\leqslant 1$

$\therefore\frac{1}{\sin 2\theta}\geqslant 1\qquad\therefore\sqrt{\frac{3}{\sin 2\theta}}\geqslant\sqrt{3}\cdots②$

由①②得

$$\frac{2}{\sin\theta}+\frac{3}{\cos\theta}\geqslant 4\sqrt{3}$$

故最小值爲 $4\sqrt{3}$

討論：以上爲誤解之理由：

誤解①式等號成立必 $\frac{2}{\sin\theta}=\frac{3}{\cos\theta}$

②式等號成立必 $2\theta=\frac{\pi}{2}$

即 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 代入 $\frac{2}{\sin\theta}=\frac{3}{\cos\theta}$ 中得 $2=3$

（矛盾）故上解不成立。

誤解（Ⅱ）：

由柯西不等式知

$$\left[\left(\sqrt{\frac{2}{\sin\theta}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{3}{\cos\theta}}\right)^2\right]\left[(\sqrt{\sin\theta})^2\right.$$

$$+\left(\sqrt{\cos\theta}\right)^2\Big]\geqslant\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$$

上式有最小值時等號成立，即

$$\frac{\sqrt{\dfrac{2}{\sin\theta}}}{\sqrt{\sin\theta}}=\frac{\sqrt{\dfrac{3}{\cos\theta}}}{\sqrt{\cos\theta}}$$

$$\Rightarrow\ \frac{\sqrt{2}}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{3}}{\cos\theta}\ \Rightarrow\ \tan\theta=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

此時 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$， $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

故 $\dfrac{2}{\sin\theta}+\dfrac{3}{\cos\theta}\geqslant\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}{\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}}$

$\therefore\ \dfrac{2}{\sin\theta}+\dfrac{3}{\cos\theta}\geqslant\sqrt{5}\,(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

$\therefore$ 最小值為 $\sqrt{10}+\sqrt{15}$

討論：以上誤解之理由

上解中

$$\left(\sqrt{\frac{2}{\sin\theta}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{3}{\cos\theta}}\right)^2\geqslant\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}{\sin\theta+\cos\theta}$$

等號成立必

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{3}}{\cos\theta}$$

又 $0<\sin\theta+\cos\theta\leqslant\sqrt{2}$

$\therefore\ \dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 等號成立當 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 時

然 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 不能滿足 $\dfrac{\sqrt{2}}{\sin\theta}=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos\theta}$

故最小值為 $\sqrt{10}+\sqrt{15}$ 不存在

(Ⅲ) 乙丁組「丁」大題，可用反代法檢驗得分，似未能達到本題評量的目的。

試題：設 k 為實數，

$$f(x)=x^3-2x^2-5x+6$$
$$g(x)=x^3+k^2x^2+2kx-16$$

1. $f(x)$ 與 $g(x)$ 有一次式之最大公因式時，則 k 之值為：

(A) 5 (B) -5 (C) 3 (D) -3 (E) -2

2. $f(x)$ 與 $g(x)$ 有二次式之最大公因式 $H(x)$ 時，則

(A) k 之值為 5

(B) k 之值為 -5

(C) k 之值為 3

(D) $H(x)=(x-2)(x-1)$

(E) $H(x)=(x+2)(x-3)$

解：$\because f(x)=(x-1)(x+2)(x-3)$

今以反代法檢驗之

當 $k=5$ 時

$$g(x)=x^3+25x^2+10x-16$$

將 $x=1$，$x=-2$，$x=3$ 分別代入 $g(x)$ 中

得 $g(1)=20\neq0$，

$g(-2)=56\neq0$，

$g(3)=266\neq0$。

$\therefore k=5$ 不合

當 $k=-5$ 時

$$g(x)=x^3+25x^2-10x-16$$

又 $g(1)=0$，

$g(-2)=96\neq0$，

$g(3)=206\neq0$。

$\therefore$ $x-1$ 為其一次最大公因式

當 $k=3$ 時

$$g(x)=x^3+9x^2+6x-16$$

又 $g(1)=0$，

$g(-2)=0$，

$g(3)=110\neq0$

$\therefore (x-1)(x+2)$ 為其二次最大公因式

餘類推，得(1)答(B)(E)，(2)答(C)(D)(由學生自習)

註：本題之正確解法省略之。

結語與建議：

(1)往後數學試題的命題，倘能與今年一樣的普遍、合理，相信必能激發學生學習數學的興趣，使我們的數學教育更上一層樓。

(2)希望聯招會能增聘命題教授，使入闈教授能有更多挑選試題之機會，使試題能更盡善盡美，因「大學聯考帶動高中教學」，更影響到學生是否「放棄數學」，這是不可不否認的事實。

—本文作者現任教於新化高中—