數學史觀的「微積分入門」

戴久永

數學起源於解決人們在日常生活中實際所遭遇到的各類問題。先民所採用的數學方法非常簡陋，屬於「個案處理」的形態，主要是經由觀測歸納的方法得出。古稀臘人把埃及人和巴比倫人重數學實際應用的偏向轉導於理論方面的探討，並且在幾何證明中採用演繹法，在數學思想的進展上立了一個新里程碑。

數學的特性是由實際問題需求應運而生，加以理論化推廣後，又用於解決實際問題，如此循環不已，它的內涵越來越豐富，分類也愈來愈精細，所具解題威力也愈加強而有力。另一方面，數學經過數千年的演變，無數數學家的努力，在經過不斷地粉飾和公理化之後，已失去其以「問題爲起源」的風貌，就像數學教科書所見到的，如此有 板有眼，定義定理條理分明，嚴密刻板，「不知從那裡來，也不知要往那裏去」。當怪乎無數莘莘學子學得心中充滿了無數問題，聽得滿頭霧水。視數學爲只有特殊才能的極少數才學得好的科目。時時可聽到他們「學數學有什麼用？」的問題，語氣中可能是存疑、不屑或無奈。

筆者認爲如果一個教師對於他所教授科目的歷史發展沒有足夠的瞭解，必然在授課時，由於對該科目缺乏整體性的理解，看法會趨於偏頗，對於數學來說，尤其如此。這樣的教師由於本身不知所教的知識是在何種需求下才發展出這些理論，數學家基於什麼樣的動機而研究出這些「心智結晶」,更不必說能從問題起源，發展經過到新概念的建立非常詳盡地引導學生看清問題的來龍去脈了。必然是只好照本宣科，只知將定義、定理一項項依樣畫葫蘆地一味強調解題技巧。彌補這種缺憾的方法之一是能研讀一些數學史，更好的方法是如果能有以數學史和數學技巧相配合的教科書問世，必然

對學生學習動機的啓發有重要貢獻。筆者自身雖對數學教育有濃厚興趣，卻是心有餘而力不足，徒呼奈何。

偶然的機會見到台大數學系康明昌教授所著「微積分入門」一書，其內容和編著方式與市面上無數微積分教科書的編法截然不同，事實上與筆者多年來的編書想法不謀而合，忍不住提起筆來向讀者諸君(諸小姐)大力推薦，與大家分享讀好書的樂趣。

微積分最基本的概念是連續與極限。歷史顯示古希臘的哲學家已有極限的概念，但是他們未能由這些概念發展出任何有用的技巧，因此沒有什麼突破性的進展。數學史上記載著微積分上的一些概念零星間斷地發展著。直到十八世紀人們對物理科學上變量的研究和解析幾何上求曲線切線問題的研究,終於促成微積分的誕生。從此，數學由對常量的研究邁入對變量研究的新階段。牛頓和萊布尼玆發明微積分，並非閉門造車，憑空杜撰出來，而是將前人的研究經過整理而成。由於微分比積分較容易學習，目前一般微積分教科書都是先教微分，然後再探討積分。但是站在歷史的觀點來說，積分的研究發展實遠比微分來得早，例如古希臘的阿基米德早曾使用窮盡法來求拋物線和圓所圍成的面積，他的基本想法非常接近現代「積分」的過程。

微分和積分兩種技巧原先是分別地發展著，牛頓和萊伯尼玆對微積分的最大貢獻是「微積分基本原理」的創立，也就是發現「求面積問題和求切線問題在何種意義是互逆的？到底確實的關係是怎樣的呢?」「微積分基本原理」的意義是：(1)找出微分和積分(求面積的問題)的關係。(2)把求曲線 $y=f(x)$ 的面積的問題改成「求一函數 $F(x)$ 使 $\dfrac{dF(x)}{dx}=f(x)$」的問題。後一個問題比求面積容易得多。由於這一定理的出現，人們總算認清了一個事實：只要把求切線的幾何方法提高到一個抽象的層次，就可以統括從前求切線，求速度和求極大極小的各種技巧，並且還能與求面積的問題取得聯繫。

十七世紀的偉大科學家伽利略極力強調實驗和理論的重要性。伽氏認爲哲學的目的是在於瞭解自然的法則，唯有從仔細的觀察，良好的設計分析試驗中才能得到，而這些法則只有藉著數學的幫助才能表達出來。伽利略曾經大量地應用了數學理論來研究力學，因此運動物體的數學描述變成了一個熱門的問題。微積分正是描述物體動態的有力工具，藉著它的強大威力，科學家們在自然科學和工程學上獲得一連串的成就。數學本身由於過速發展的結果，在理論基礎上顯得不夠嚴謹。十八世紀的數學發展提供數學家許多新的技巧，並且教導數學家從觀念性的角度去瞭解問題。在第五章中，作者對於微積分的理論基礎進行了嚴謹性的修補。

本書較引起爭論的地方是人名和專用名詞的引用問題。筆者一向主張將外國人名或名詞一律改譯成中文，例如Newton 譯成牛頓，Galileo 譯成伽利略利或 Archimedes 譯成阿基米德。如果我們一直用Newton, Galileo 或 Archimedes 而不用中譯，總覺得文句中老是參雜英文而不夠中文化。當然最大的問題是譯名的統一，有待加強。從歷史上可見到，每次有外來文化與本土文化融合(如佛經的翻譯)必然會遭遇一些名詞如何翻譯的問題。筆者認爲康教授在寫書時，若能至少將所常見的名詞或人名用中文表達，會使讀者閱讀起來更爲方便。

筆者一直認爲將大學各科系所開課程的教科書都有中文本是我國科學生根的具體步驟，然而編寫教科書的工作却是被人所卑視的。一般人認爲編寫教科書只需東抄西剪，而忽略了這一重要工作背後所應具備的廣博知識，以及一本好的教科書對學生學習效果的助益。另一方面編寫教科書在實質上遠不如做研究有利可圖，不但可申請國科會補助，同時也可出國參加會議來得風光，因此編寫教科書常處於有

力者無心而有心者無力的尷尬局面，大學生們也只好繼續硬著頭皮生呑活嚥著英文本，吸收似懂不懂的知識。事實上，在一個學術環境健全的國家，對於往上成長和往下紮根應付與同等的重視，從事研究和教科書寫作並行不悖才對。康明昌教授曾是大專聯考丙組醫科狀元，而後轉到數學系攻讀數學，獲得芝加哥大學的數學博士學位，無可置疑是位數學研究高手，然而他竟能不辭辛勞地編寫微積分教本，其用心與誠意令筆者十二萬分地敬佩。假若我們國家能有更多類似康教授的專家學者能為大學課程寫出各種優良的教科書、則國內的大學生就有福了。在此也深望康教授能繼續為我們寫出更多數學教科書，使學子們不再視讀數學如讀「天書」。

康明昌教授的「微積分入門」不但是從數學史的發展方式來寫這本書，同時有些題材是採對話形式進行，譬如第二章阿基米德論面積就是一個例子。阿基米德是古希臘的著名數學家，美國數學史家 E.T. Bell 就曾讚譽他和高斯、牛頓為數學史上的三大巨人，康教授利用阿基米德與西拉鳩斯（Syracuse）國王使者的對話，解釋了面積的求法，點出了積分概念的精神。

自從古希臘哲學家齊諾（Zeno）以希臘神話中的人物阿奇里斯（Achilles）與烏龜賽跑為例子進行詭辯後，阿奇里斯和烏龜就成為不可分離的「搭檔」了，康教授在第六章尾聲中利用阿氏和烏龜的對話指出了「微積分入門」一書中所沒有涵蓋而一般微積分教本却有的內容。俗話說：「無巧不成書」，筆者最近看到一本由Douglas R Hofstadter 著的「Godel, Escher, Bach : an eternal golden braid」〔1〕一書也用到好些次由阿奇里斯和烏龜對話的方式表達一些作者想說的概念，眞是中西輝映，無獨有偶。

「微積分入門」是一本與衆不同的書，由它的目錄就可看出作者依照歷史發展的順序首先談積分，而後才探究微分。由阿基米德論面積開始，談到十七世紀主要的數學問題，然後引出十七世紀的數學家怎樣求面積的問題，向讀者表明在數學知識進步後，其求面積的方法和古希臘阿基米德的方法有什麼異同，在本書中，讀者可以清楚地看到各個不同時期的數學家、物理學家和天文學家所面臨的困難，以及如何尋求這些問題的解答。

第四章中介紹了微分與積分的技巧以及積分的應用。最難得的是康教授在積分的例題中，在實際解題之先提出想法，指出應如何下手解題，這樣才確能使讀者深入理解，而非機械式反應地解題。

綜括全書，文筆相當生動流暢，唯一的缺憾是未附習題，同時全書為採「重點攻擊」方式，似乎不適於作為教科書使用，但卻是絕佳的輔助教材。

附帶一提的是對話式的文章一般而言，較易引起讀者的興趣，然而卻不易寫作，讀者若讀完本書後，對於數學還想有概略地認識，筆者建議可參閱〔2〕,〔3〕二書。

參考資料

〔1〕 Douglas R Hofstadter
Godel, Escher, Bach : *an eternal golden braid*
Basic Books Inc. N. Y. 1979.

〔2〕 Alfred Renyi *Dialogues on mathematics*
Holden-Day, San Francisco 1967.
戴久永譯 數學對話錄（增訂二版）新竹凡異出版社。

〔3〕 D. E. Knuth *Surreal Numbers*
Addison-Wesley 1974.

—本文作者現任敎於交大管科系—