部份。令

$$b = 10\log 2 - 3 = 0.0102\cdots\cdots(7)$$

則(6)式表示對所有的 $n \in N$，$\{n\log 2\}$ 不會落在任何一個下面的區間

$$(-b + \log k, \log k),$$
$$2 \leq k \leq 10$$

因爲 b 是無理數（爲什麼？），我們可以引用下面定理

定理2 若 x 是無理數，則數列 $\{x\}$，$\{2x\}$，$\{3x\}$，…在區間 $(0,1)$ 上稠密。即對任意區間 $(a, b) \subseteq (0, 1)$，我們都可以找到一個 $m \in N$ 使得

$$a < \{mx\} < b$$

於是得到一個矛盾。同理可知2的冪方的首位不可能以任意一個整數 k 做循環節長度，即它們不可能循環出現。當然 2^1 到 2^{1000} 的首位仍有可能每十個做一循環（即(6)式對 $1 \leq n \leq 990$ 成立），不過實際計算顯示

$$2^{41} = 2199023255552$$
$$2^{42} = 4398046511102$$
$$2^{43} = 8796093022204$$
$$2^{44} = 17592186044408$$
$$2^{45} = 35184372088816$$
$$2^{46} = 70368744177632$$

此種猜測的循環性在 2^{47} 時即不再成立。

7203 1983!（韓良信提供）

1983! 的乘積中，不爲0的最小位數的數字（從1到9）是多少？

解答：（黃小姍提供）

答案是4。1983! 乘積中不爲0的最小位數的數字，即1983! 中，個位數字爲0，2，5以外的乘數的個位數字的積的個位數字。其積爲

$$(1\cdot3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9)^{198}\cdot1\cdot2\cdot3$$
$$= 3^{4\times198+1}\cdot2^{4\times3\times99+1}\cdot7^{4\times49+2}$$

因

$$3^4 \equiv 1 \pmod{10}$$
$$2^5 \equiv 2 \pmod{10}$$
$$7^4 \equiv 1 \pmod{10}$$

故，上式的個位數字爲

$3\cdot2\cdot7^2$ 的個位數字

$$3\cdot2\cdot7^2 \equiv 6\cdot9$$
$$\equiv 4 \pmod{10}$$

編者按：

1. 張原卿的做法是把1到10，11到20，…，各求其不爲零的最小位數的數字，其結果均爲8，再算 $9^{198}\cdot2\cdot3$ 的個位數字。
2. 來應答同學均約略知曉同餘算術的概念。竊以爲可以考慮放入高中數學教材內，以代替其他較艱深之項目。又因同餘算術在應用上亦甚有價值之故。