## 問題詳解

### 7201 質數問題（余文卿、卓世傑提供）

**証明** 「若$p$是大於3的質數，則

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{p-1}$$

通分成既約分數後，分子可被 $p^2$ 整除。」

**解答：**（余文卿提供）

這命題即是Woltenholme 定理，可見於一般的數論教科書中。注意到

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{p-1}$$

化成既約分數後的分母可能不是$(p-1)!$

設 $A_{p-2}=(p-1)!\,(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p-1})$。

而又設 $\frac{n}{m}$ 是 $\frac{A_{p-2}}{(p-1)!}$ 的既約分數，因$p^2$與$(p-1)!$沒有1以上的公因數，若能證明 $p^2 \mid A_{p-2}$，則可得到$p^2 \mid n$，因將$\frac{A_{p-2}}{(p-1)!}$化為$\frac{n}{m}$時不會將$p$或 $p^2$ 約去,故現在整個問題演化成。欲證明

$$p^2 \mid A_{p-2}$$

設

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-p+1)$$
$$=x^{p-1}-A_1x^{p-2}+\cdots-A_{p-2}x+A_{p-1} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{I})$$

令$x=p$，得

$$(p-1)!$$
$$=p^{p-1}-A_1p^{p-2}+\cdots-A_{p-2}p+A_{p-1}$$

因$A_{p-1}=(p-1)!$，故

$$p^{p-2}-A_1p^{p-3}+\cdots-A_{p-2}=0\cdots(\mathrm{II})$$

將等式(I)兩邊乘$x$後將$x$換成$x-1$得到

$$(x-1)^p-A_1(x-1)^{p-1}+\cdots\cdots$$
$$+A_{p-1}(x-1)$$
$$=(x-1)(x-2)\cdots(x-p)$$
$$=(x-p)(x^{p-1}-A_1x^{p-2}+\cdots$$
$$+A_{p-1})$$

比較係數得

$$\binom{p}{1}+A_1=p+A_1$$

$$\binom{p}{2}+\binom{p-1}{1}A_1+A_2$$
$$=pA_1+A_2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{III})$$

$$\binom{p}{3}+\binom{p-1}{2}A_1+\binom{p-2}{1}A_2$$
$$+A_3$$
$$=pA_2+A_3 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{IV})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

其中記號$\binom{r}{s}$表示$\frac{r!}{s!\,(r-s)!}$

由(III)，(IV) 得出

$$A_1=\binom{p}{2},$$

$$2A_2=\binom{p}{3}+\binom{p-1}{2}A_1,$$

$$3A_3=\binom{p}{4}+\binom{p-1}{3}A_1$$
$$+\binom{p-2}{2}A_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(p-1)A_{p-1}$$
$$=1+A_1+A_2+\cdots+A_{p-2}$$

因而導出

$$p\mid A_1,\ p\mid A_2,\cdots,\ p\mid A_{p-3}\ 。$$

由(II)得

$$p^2 \mid A_{p-2}\ 。$$

本定理得證。

若將$\frac{1}{i}$看成同餘方程式 $ix\equiv(\bmod\ p^2)$ 的解，則 Woltenholme 定理也可改成

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p-1}$$
$$\equiv 0 \pmod{p^2}, \quad p>3$$

爲分辨符號起見，將 $ix\equiv 1 \pmod{p^2}$ 的解寫爲 $\overline{x}$，則對任一整數 $x$，$0<x<p$，有

$$\overline{x}(p-1)! = x\overline{x}\frac{(p-1)!}{x}$$
$$\equiv \frac{(p-1)!}{x} \pmod{p^2}$$

加起來得到

$$(p-1)!(\overline{1}+\overline{2}+\cdots+\overline{p-1})$$
$$\equiv (p-1)!\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p-1}\right)$$
$$\pmod{p^2}$$

這證明 Woltenholme 定理的兩種說法是等價的。