關於Ptolemy的定理

許振榮

在本文，筆者想討論Ptolemy 的定理的推廣，並且供給一使用複素數的較簡證明。Ptolemy 定理本來是平面幾何的一定理，筆者也想討論它在空間中的推廣。

Ptolemy 的定理 設A，B，C，D爲在平面上的一四邊形的頂點（故四點爲互異的），則

(1) $AB \cdot CD + BC \cdot DA \geqslant AC \cdot BD$

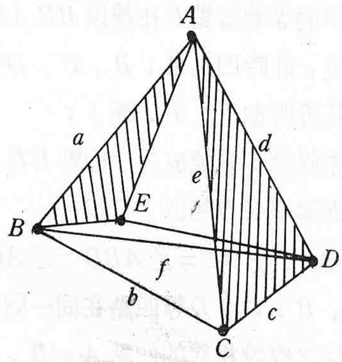
成立。但是此式中的等號當四點A，B，C，D在同一圓周上時，且僅於此時成立。此處，所謂四邊形通常僅指凸的四邊形。

今後，我們將線段$\overline{AB}$，$\overline{BC}$，$\overline{CD}$，$\overline{DA}$，$\overline{AC}$，$\overline{BD}$之長度分別以a，b，c，d，e，f表之，則(1)式亦可寫成下列形狀：

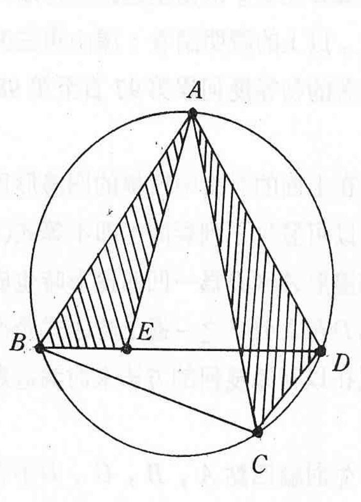
(1′) $ac + bd \geqslant ef$

Ptolemy 的定理的初等幾何的證明如下:

証明：如右邊第1圖，在此平面上，作一個與三角形ΔACD相似的三角形ΔABE（E與C，D在$\overleftrightarrow{AB}$的同一邊），則



第1圖



第2圖

(2) $\dfrac{a}{e}=\dfrac{BE}{C}=\dfrac{AE}{d}$

即下列成立：

(3) $ac=e\cdot BE$

此時$\angle BAC=\angle EAD$，又由(2)式可知

$$\frac{a}{AE}=\frac{e}{d}$$

成立。故ΔABC與ΔAED相似。因之

$$\frac{b}{ED}=\frac{e}{d}$$

即下式成立：

(4) $bd=e\cdot ED$

因之，由(3)和(4)兩式可得

$$\begin{aligned}(5)\quad ac+bd&=e\,(BE+ED)\\&\geqslant e\cdot BD\\&=ef\end{aligned}$$

此式中的等號當點E在線段$\overline{BD}$上時且僅於此時成立。此時四點A，B，C，D在同一圓周上，其證明如下〔第2圖〕：

先假設：等號成立，即點E在$\overline{BD}$上。因ΔABE與ΔACD相似，可得

(6) $\angle ABE=\angle ABD=\angle ACD$

故A，B，C，D等四點在同一圓周上。

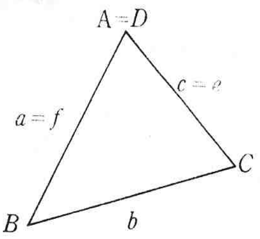
反之假設相異的四點A，B，C，D在同一圓周上。此時在$\overline{BD}$上取一點E使$\angle BAE=\angle CAD$成立，則因(6)式成立，可知ΔABE與ΔACD相似。故由上述證明得知(5)式中等號成立。以上的證明請看：澤山勇三郎及森本淸吾共著的初等幾何學第97頁至第98頁。

在上面的討論中所提的四邊形爲凸四邊形，所以可發生下列疑問：即不等式(1′)是否對於四邊形$ABCD$爲一凹四邊形時也成立？或對於點D在ΔABC之一邊上時(1)式是否成立？我們現在以初等幾何的方法來討論這幾種情形於下：

先討論四點A，B，C，D不在同一直線上的情形。此時我們又可把它分成下列二種情形：即(1)三點A，B，C不在同一直線上的情形和(2)三點A，B，C在同一直線上的情形。

如果A，B，C不在同一直線上，各種情形可依點D對於這三點的關係來細分。先考慮點D與這三點之一重合的情形

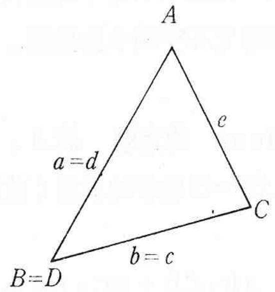
α) D與A重合



第3圖

此時$d=0$而$ac+bd=ef$

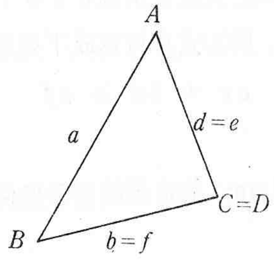
β) D與B重合



第4圖

此時$f=0$而$ac+bd=2ac>0=ef$

γ) D與C重合

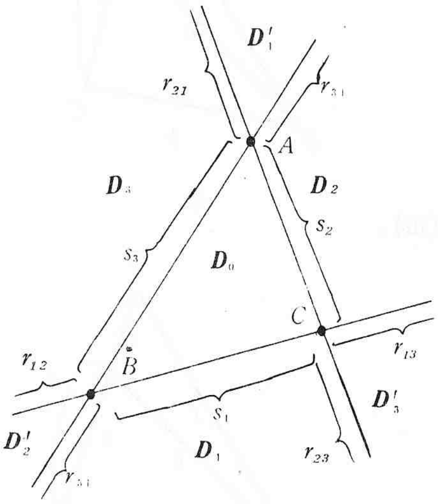


第5圖

此時$c=0$而$ac+bd=ef$

因之，對於這些情形(1)式還是成立的。

以下，我們可假設點D與A，B，C各點相異。此時可考慮下列諸情形：

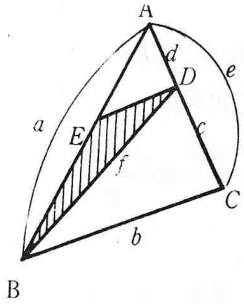


第6圖

如第6圖，線段 $\overline{AC}$（不包含兩端點）以 s_2 表之。在直線AC上從點A開始不包含點C之半直線（除去點A）以 r_{21} 表之。又從點C開始不包含點A之半直線（除去點C）以 r_{23} 表之。同樣地，可定義 s_1，s_3，r_{12}，r_{13}，r_{31} 以及 r_{32}。又由 s_1，r_{32} 和 r_{23} 所圍成的領域以 $\boldsymbol{D}_1$ 表之。由兩條半直線 r_{21} 和 r_{31} 所圍成的領域以 $\boldsymbol{D}_1'$ 表之。同樣地可定義 $\boldsymbol{D}_2$，$\boldsymbol{D}_2'$，$\boldsymbol{D}_3$ 和 $\boldsymbol{D}_3'$。由線分 s_1，s_2，和 s_3 所圍成的三角形領域以 $\boldsymbol{D}_0$ 表之。

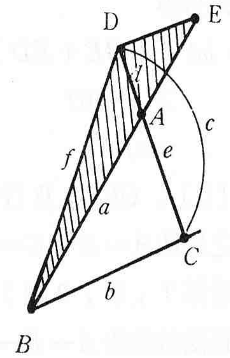
在上面 Ptolemy 定理的初等幾何的證明中所討論的是點D在領域 $\boldsymbol{D}_2$ 的情形。今後我們把此情形稱爲情形(i)。我們也將把D在s_2上的情形稱爲情形(ii)，D在 r_{21} 的情形稱爲情形(iii)，D在 r_{23} 的情形稱爲情形(iv)。其他還有D在 s_1 上，在 r_{12} 上，在 r_{13} 上，在 s_3 上，在 r_{31} 上，在 r_{32} 上，在 $\boldsymbol{D}_0$ 上，在 $\boldsymbol{D}_1$ 上，在 $\boldsymbol{D}_3$ 上，在 $\boldsymbol{D}_1'$ 上，在 $\boldsymbol{D}_2'$ 上，和在 $\boldsymbol{D}_3'$ 上的各種情形。我們想證明：除了情形(i)之外其他所有情形都可歸着於(ii)，(iii)，或(iv)之情形。所以現在先來討論D在(ii)，(iii)和(iv)的諸情形如下：

(ii) 的情形



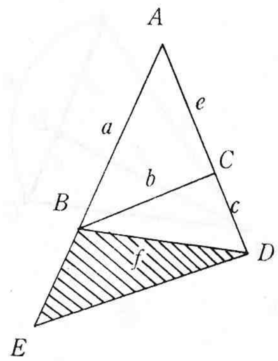
第7圖

(iii) 的情形



第8圖

(iv) 的情形



第9圖

對於這些情形(1)之不等式之證明極其相似，故僅陳述(ii)的情形時的證明於下：

証明　經過點D做一直線與BC平行使其交直線AB於點E，則$DE \parallel BC$。因爲$\angle A$爲

共有，故ΔAED與ΔABC相似。故

$$(7)\quad \frac{AE}{a}=\frac{d}{e}=\frac{ED}{b}$$

因之，

$$(8)\quad bd=e\cdot ED$$

成立。又由(7)式可得

$$\frac{a-AE}{a}=\frac{e-d}{e}$$

即

$$\frac{EB}{a}=\frac{c}{e}$$

成立。故得

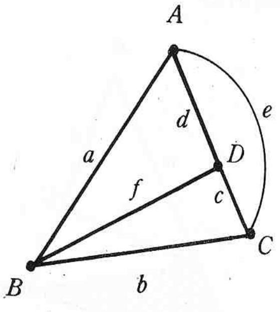
$$(9)\quad ac=e\cdot BE$$

再由(8)及(9)兩式可得

$$(10)\quad \begin{aligned} ac+bd &= (BE+ED) \\ &> e\cdot BD \\ &= ef \end{aligned}$$

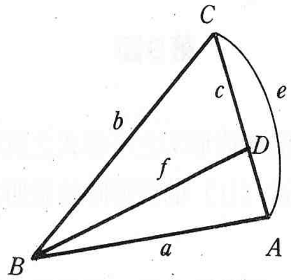
注意：在(ii)，(iii)，及(iv)各情形中ΔABC之頂點之繞法$A\to B\to C\to A$是與時針的繞法相反（看第7，8，9圖）。我們想注意：ΔABC之頂點的繞法$A\to B\to C\to A$與時針的繞法相同時(1)之不等式還是成立的。

(ii)$_a$



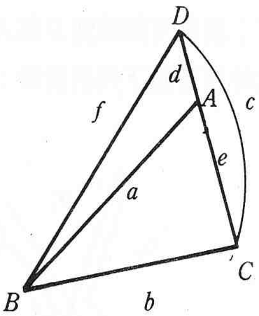
(ii)$_b$

⇓



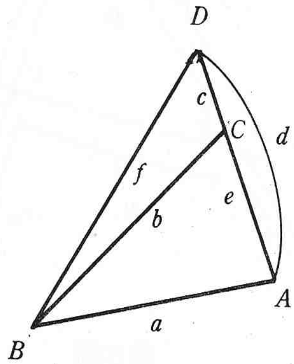
第10圖

(iii)$_a$



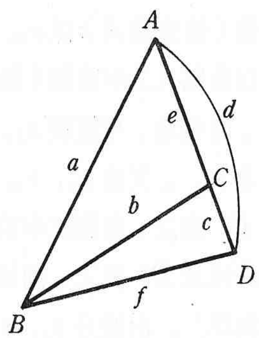
⇓

(iii)$_b$



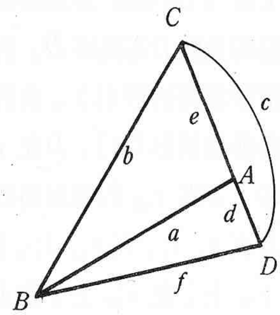
第11圖

(iv)$_a$



⇓

(iv)$_b$



第12圖

在上列諸圖形（第10，11，12圖）中，對於圖形(ii)$_a$〔(iii)$_a$或(iv)$_a$〕(1)之不等

式成立的充要條件係對於圖形 (ii)$_b$〔(iii)$_b$ 或 (iv)$_b$〕(1)之不等式之成立。例如，要從圖形 (ii)$_a$ 變至圖形 (ii)$_b$ 時，我們須要實行 $A\to C$，$B\to B$，$C\to A$，$D\to D$ 的變換。因之諸線段如下變換：

$a\to b$，$b\to a$，$c\to d$，

$d\to c$，$e\to e$，$f\to f$。

因之，如果對於 (ii)$_b$ 的情形(1)之不等式成立，則

對於圖形 (ii)$_a$ 的 $ac+bd$

$=$對於圖形 (ii)$_b$ 的 $bd+ac$

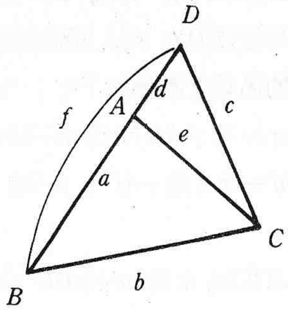
$>$對於圖形 (ii)$_b$ 的 ef

$=$對於圖形 (ii)$_a$ 的 ef

卽對於 (ii)$_a$ 的情形(1)之不等式成立。從圖形 (ii)$_b$ 變至圖形 (ii)$_a$ 時有同樣的結果。對於 (iii) 及 (iv) 的情形可同樣地討論之。

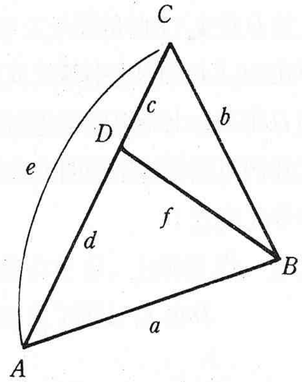
現在我們利用上面所得對於 (ii)，(iii) 及 (iv) 諸情形的結果來證明點 D 在直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 上的時候(1)之不等式亦成立。

D 在 r_{31} 上時



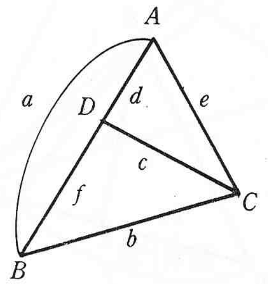
⇓

D 在 s_2 上時



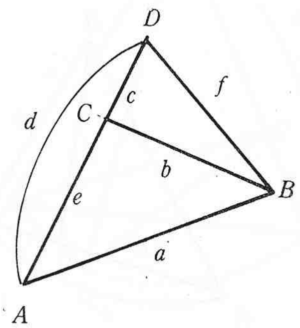
第14圖

D 在 s_3 上時



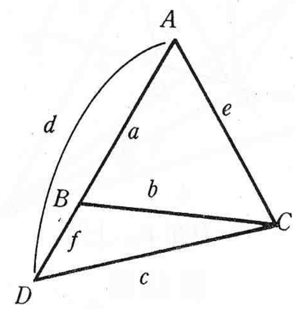
⇓

D 在 r_{23} 時



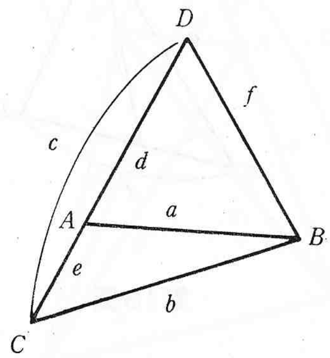
第13圖

D 在 r_{32} 上時



⇓

D 在 r_{21} 上時



第15圖

例如，在第 13 圖中，D在 s_3 上的情形（上圖），經過 $A \to D$，$B \to A$，$C \to B$，$D \to C$之名稱改變可變成D在 r_{23} 上的情形（下圖）。此時線段的名稱之改變如下：

$$a \to d\ ,\ b \to a\ ,\ c \to b\ ,$$
$$d \to c\ ,\ e \to f\ ,\ f \to e\ 。$$

因之

D在 s_3 上時 $ac + bd$

$= D$在 r_{23} 時 $db + ac$

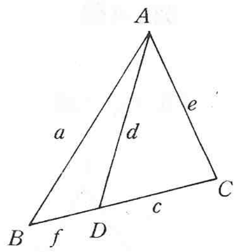
$> D$在 r_{23} 時的 ef

$= D$在 s_3 上時的 fe

所以，D在 s_3 上時(1)之不等式成立。D在 r_{31} 時和D在 r_{32} 上時可同樣地討論之。

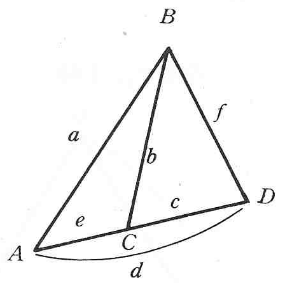
其次我們可同樣地來證明D在直線 BC 上時(1)之不等式成立：

D在 s_1 上時



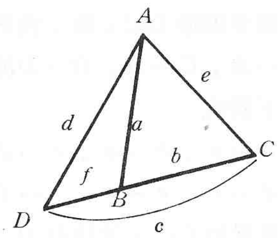
⇓

D在 r_{23} 上時



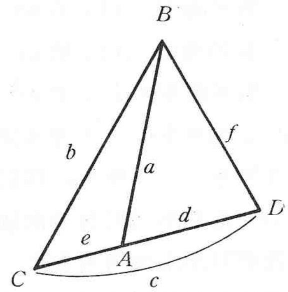
第16圖

D在 r_{12} 上時



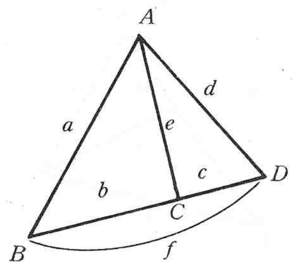
⇓

D在 r_{21} 上時



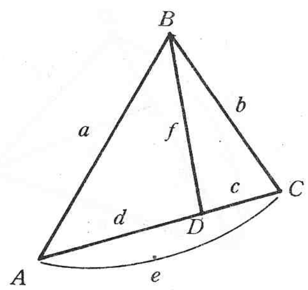
第17圖

D在 r_{13} 上時



⇓

D在 s_2 上時



第18圖

例如在第 17 圖中，D在 r_{12} 上的圖形（上圖）經過 $A\to B$，$B\to A$，$C\to D$，$D\to C$ 之名稱改變可得D在 r_{21} 上的圖形（下圖）。此時各線段之名稱經過下列改變：

$$a\to a,\ b\to d,\ c\to c,$$
$$d\to b,\ e\to f,\ f\to e。$$

因之

D在 r_{12} 上時 $ac+bd$

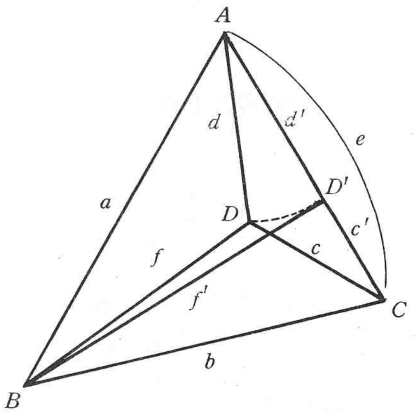
$=D$在 r_{21} 上時的 $ac+db$

$>D$在 r_{21} 上時 ef

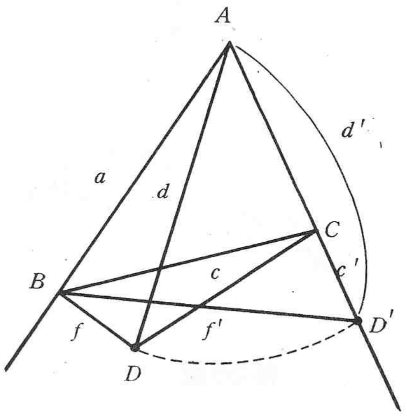
$=D$在 r_{12} 上時的 fe

故，D在 r_{12} 上時(1)之不等式仍成立。同樣地可討論第 16 圖和第 18 圖的情形。

其次考慮D在 $\boldsymbol{D}_0$ 上的情形及D在 $\boldsymbol{D}_1$ 上的情形。對於這些情形我們想利用 (ii) 的結果或 (iv) 的結果來證明(1)之不等式成立。



第19圖



第20圖

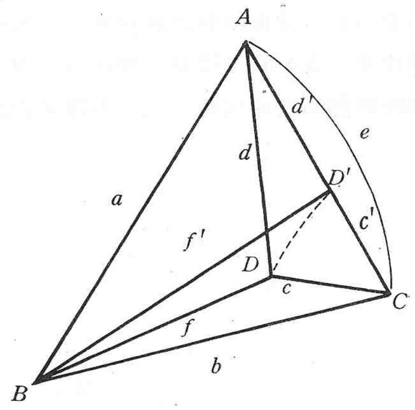
爲了對於這二種情形證明(1)之不等式成立，在半線 $\overrightarrow{AC}$ 上取一點 D' 使 $AD=AD'$ 成立。現在將線段 $\overline{AD'}$，$\overline{BD'}$，和 $\overline{CD'}$ 之長度分別以 d'，f'，c' 表之，則 $d=d'$ 成立。又因 $c+d>AC=d'+c'$（$AC+c'>d=d'=AC+c'$），故 $c>c'$ 成立。此時可得

(11)　$ac+bd>ac'+bd'>ef'>ef$

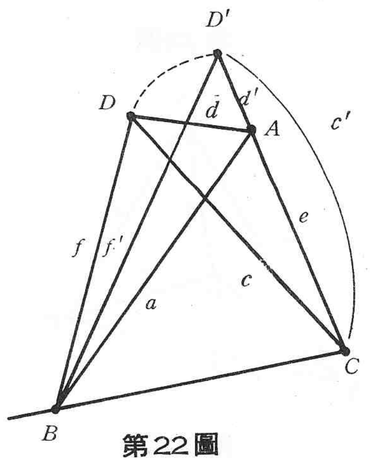
依 (ii) 的情形之結果

此最後不等式是因 $f'>f$ 之故。此處 $f'>f$ 之證明如下：在兩個三角形 ΔABD和$\Delta ABD'$ 中，邊 AB 爲共有，$AD=AD'$，且$\angle BAD<\angle BAD'$。故第三邊間有 $f'>f$ 之關係成立。

如果點D在 $\boldsymbol{D}_0$ 上或在 $\boldsymbol{D}_3$ 上，則(1)之不等式之證明如下：



第21圖



第22圖

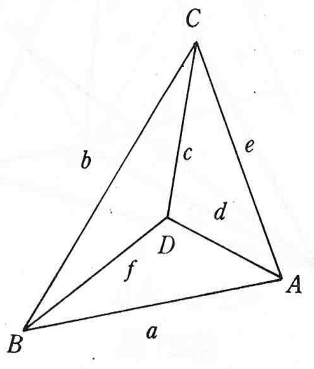
爲了對於這些情形證明(1)之不等式成立，在半線 CA 上取一點 D' 使 $CD=CD'$ 成立。如上將線段 $\overline{AD'}$，$\overline{BD'}$，$\overline{CD'}$之長度分別以d'，f'，c' 表之。現在可利用情形 (iii) 之結果來討論D在 $\boldsymbol{D}_3$ 上的情形。已知$c=c'$。因$d+e>c=c'=e+d'$（$c+d>e=c'+d'$）可得$d>d'$。此時

$$(12)\quad ac+bd>ac'+bd'>ef'>ef$$

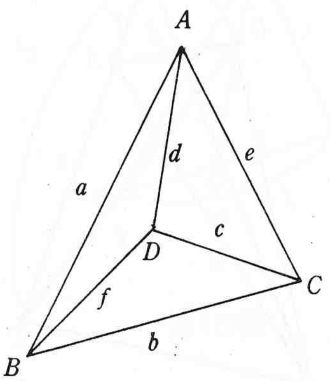
依情形 (iii) 的結果

最後的不等式的成立是因$f'>f$之故。$f'>f$之證明如下：在兩個三角形ΔBCD和$\Delta BCD'$中邊BC爲共有，且$CD=C'D$又$\angle BCD<\angle BCD'$故它們的第三邊間有 $f'>f$ 之關係成立。

在上面我們證明了點D在$\boldsymbol{D}_0$ 上時(1)之不等式成立。但是，那時候ΔABC之頂點的繞法$A\to B\to C\to A$與時針之繞法相反。現在我們也想注意：ΔABC之頂點之繞法$A\to B\to C\to A$與時針的繞法相同時，(1)之不等式仍成立。



第23圖



第24圖

如在上面第 23 圖將ΔABC之頂點以$A\to C$，$B\to B$，$C\to A$，$D\to D$之方法改稱時，則得第 24 圖。此時諸線分之名稱改變如下：

$a\to b$，$b\to a$，$c\to d$，
$d\to c$，$e\to e$，$f\to f$。

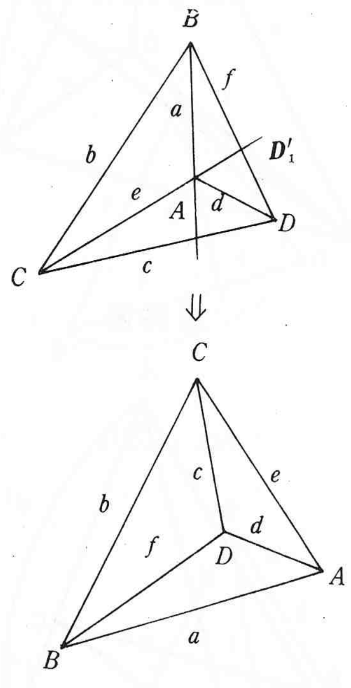
因之，

$A\to B\to C\to A$之繞法與時針之繞法相同時的$ac+bd$
$=A\to B\to C\to A$之繞法與時針之相反時的$bd+ac$
$>$與時針相反繞法時的ef
$=$與時針相同繞法時的ef

證明完了。

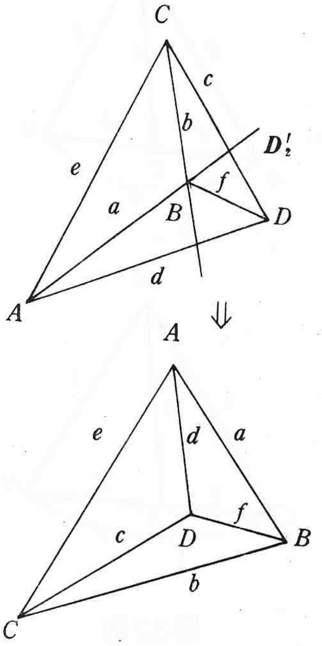
最後，我們來證明D在$\boldsymbol{D}'_1$，$\boldsymbol{D}'_2$，或$\boldsymbol{D}'_3$時(1)之不等式成立。我們可將這些情形歸着於D在 $\boldsymbol{D}_0$ 時的情形。

D在$\boldsymbol{D}_1'$ 上時



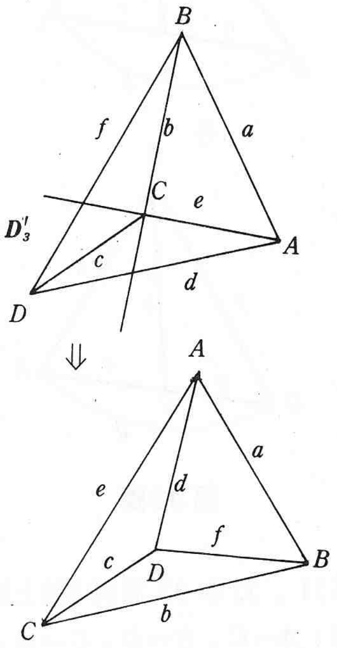
第25圖

D在$\boldsymbol{D}_2'$上時



第26圖

D在$\boldsymbol{D}_3'$上時



第27圖

當D在$\boldsymbol{D}_1'$時（第 25 圖），把上圖的四點的名稱更改為$A\to D$，$B\to C$，$C\to B$，$D\to A$，則得下圖。此時線段之名稱改變如下：

$$a\to c\ ,\ b\to b\ ,\ c\to a\ ,$$
$$d\to d\ ,\ e\to f\ ,\ f\to e\ 。$$

當D在$\boldsymbol{D}_2'$時（第 26 圖），把上圖的四點的名稱更改為$A\to C$，$B\to D$，$C\to A$，$D\to B'$，則得其下圖。此時線段之名稱如下改變:

$$a\to c\ ,\ b\to d\ ,\ c\to a\ ,$$
$$d\to b\ ,\ e\to e\ ,\ f\to f\ 。$$

當D在$\boldsymbol{D}_3'$時（第 27 圖），把上圖的四點的名稱更改為$A\to B$，$B\to A$，$C\to D$，$D\to C$，則得其下圖。此時線段之名稱如下改變:

$$a\to a\ ,\ b\to d\ ,\ c\to c\ ,$$
$$d\to b\ ,\ e\to f\ ,\ f\to e\ 。$$

不論是那一種情形我們都可得

D在$\boldsymbol{D}_1'$，或$\boldsymbol{D}_2'$抑或$\boldsymbol{D}_3'$上時的$ac+bd$

$=D$在$\boldsymbol{D}_0$上時的$ca+bd$ 或$ac+dd$

或$ac+db$

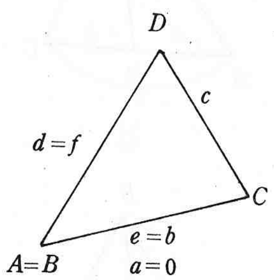
$>D$在$\boldsymbol{D}_0$上時的ef

$=D$在$\boldsymbol{D}_1'$，或$\boldsymbol{D}_2'$，抑或$\boldsymbol{D}_3'$上時的ef

以上我們完全討論了三點A，B，C不在同一直線上的所有情形。現在來討論三點A，B，C在同一直線上的情形。

先考慮A，B，C三點中有二點重合的情形（如果$A=B=C$，則A，B，C，D在同一直線上。以後才討論之）。

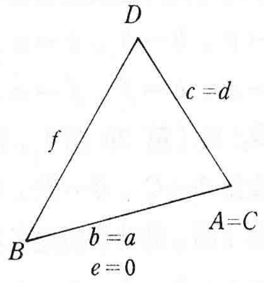
$A=B$的情形



第28圖

此時$ac+bd=bd=ef$

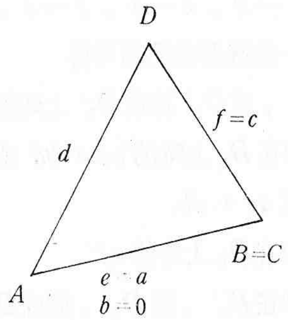
$A=C$ 的情形



第29圖

此時 $ac+bd=2ac>ef=0$

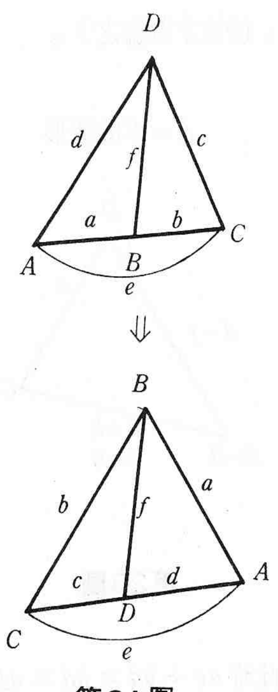
$B=C$ 的情形



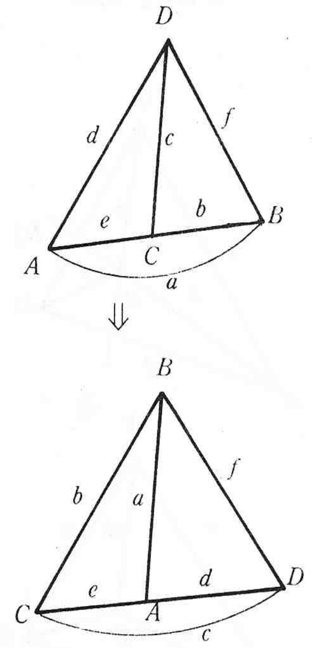
第30圖

此時 $ac+bd=ac=ef$

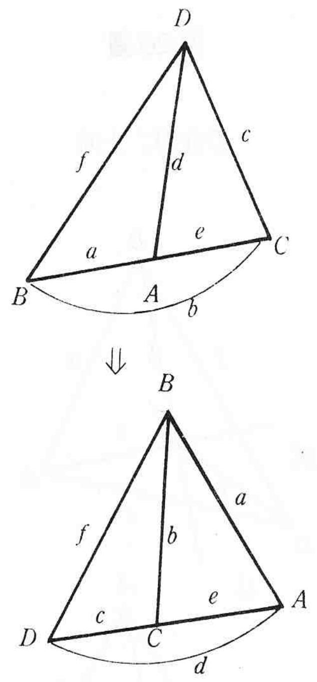
其次考慮三點 A，B，C 為互異的情形。



第31圖



第32圖



第33圖

在第31，32和33諸圖中將上圖的頂點如下改稱：$A\to C$，$B\to D$，$C\to A$，$D\to B$，則得下圖。此時線分之名稱如下改變：

$$a\to c,\ b\to d,\ c\to a,$$

$$d\to b,\ e\to e,\ f\to f。$$

因之，

在上圖中 $ac+bd$

$=$在下圖中的 $ca+db$

$>$在下圖中的 ef

（此依 (ii), (iii), (iv) 情形的結果）

$=$在上圖中的 ef

如此，對於這些情形(1)之不等式仍成立。

如上，雖然相當煩雜，我們以初等幾何的方法證明了下列事情：即對於在同一平面上但不在同一直線上的任何四點 A，B，C，D 均有(1)的不等式成立。

現在，如果這些四點在同一直線上，是否(1)之不等式成立？我們很容易地可證明其成立如下：

假設在一直線上的四點 A，B，C，D 之座標分別為 α，β，γ，δ，則

$$AB=|\beta-\alpha|$$

等成立，現在，因為

$$(\beta-\alpha)(\delta-\gamma)+(\gamma-\beta)(\delta-\alpha)=(\delta-\beta)(\gamma-\alpha)$$

成立，可得

$$|(\beta-\alpha)(\delta-\gamma)|+|(\gamma-\beta)(\delta-\alpha)|\geqslant|(\delta-\beta)(\gamma-\alpha)|$$

故下式成立：

$$|\beta-\alpha||\delta-\gamma|+|\gamma-\beta||\delta-\alpha|\geqslant|\delta-\beta||\gamma-\alpha|$$

即

$$AB\cdot CD+BC\cdot AD\geqslant BD\cdot AC$$

成立。此式中等號當 α，β，γ，δ 中有二數相等或 $\dfrac{(\beta-\alpha)(\delta-\gamma)}{(\gamma-\beta)(\delta-\alpha)}$ 為正實數時且僅於此時成立。如此的任二數均不相等的有 8 種情形。

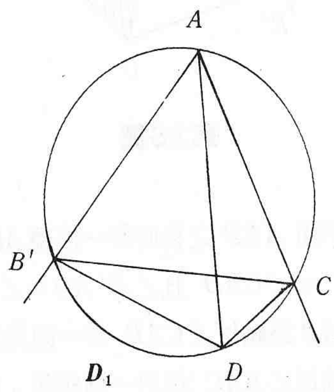
如此，綜合上面所得的結果，我們可得下列定理：

擴張的 Ptolemy 的定理　設四點 A，B，C，D 為在一平面上的任何四點，則對於連結這些點的線段長度間有下列關係成立：

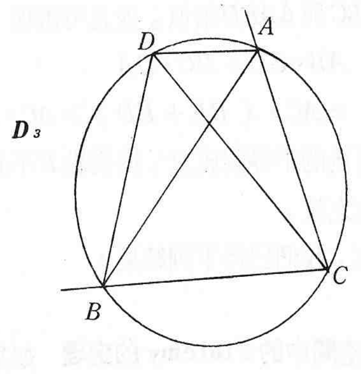
(1)　$AB\cdot CD+BC\cdot AD\geqq BD\cdot AC$

此處如果 A，B，C，D 為不在同一直線上的互異四點時(1)式之等號當 A，B，C，D 在同一圓周上，並且 D 在 $\angle ABC$ 上時（即 D 在 $\boldsymbol{D}_2$ 上時）且僅於此時成立。

最後一段的證明　如果 A，B，C，D 在同一圓周上，則除了 D 在 $\boldsymbol{D}_2$ 上之外，D 可能在 $\boldsymbol{D}_1$ 上或在 $\boldsymbol{D}_3$ 上而無其他的可能性。



第34圖



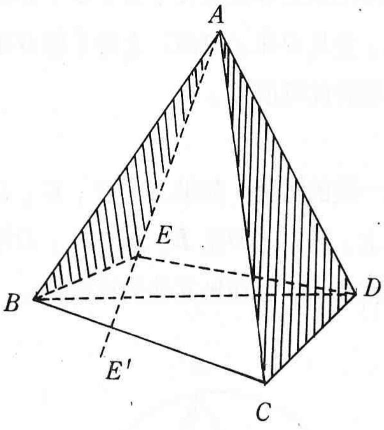
第35圖

我們在上面已經證明了對於第 34 圖(11)式成立，又對於第 35 圖(12)式成立。則對於這些情形(1)式中的等號不能成立。

以上，我們僅給了擴張的 Ptolemy 的定理的一種證明，當然其外還有各種各樣的初等

幾何的證明。

現在假設四點A，B，C，D不在同一平面上而爲一四面體的四頂點〔第 36 圖〕。此



第36圖

時，在平面 ABD 之後面作一直線AE' 使$\angle BAE' = \angle CAD$ 且$\angle E'AD = \angle ABC$ 成立（以AB爲軸以$\angle CAD$ 作一圓錐面，並以AD爲軸以$\angle BAC$ 作另一圓錐面。此二圓錐面之共同母線爲所求的直線AE'）。我們可在直線 AE' 上選點E使ΔABE與ΔACD相似。此時與 Ptolemy 的定理的上述的證明相同可證：ΔABC與ΔAED相似。並且可證明

$$(13)\quad AB\cdot CD + BC\cdot DA = AC\cdot(BE+ED) > AC\cdot BD$$

此處，最後的不等號成立，因爲點E不在平面 ABD 上之故。

如此，我們已得下列結果：

在空間中的Ptolemy的定理 如果四點A，B，C，D爲一個四面體的頂點，則下列不等式成立：

$$(13)\quad AB\cdot CD + BC\cdot AD > AC\cdot BD$$

如上述，四點在一平面上的時候，以初等幾何的方法來證明(1)式之不等式成立時，對於點D所在的地方，我們分了很多的情形來討論。所以其證明是相當複雜的。爲了試得比較簡單的證明，我們來試解析的方法。因之，我們想利用複素數來給擴張的 Ptolemy 的定理的一個證明。

假設$w = a + bi$ 及$w' = a' + b'i$ 爲任二複素數，則

$$|w| = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$|ww'| = |w|\,|w'|$$

且

$$\arg w = \tan^{-1}\frac{b}{a},$$

$$\arg(ww') = \arg w + \arg w'$$

現在我們把平面上的點以複素數來表示，即考慮所謂高斯平面（Gaussian plane）。如果複素數w，w'，w_0 分別表示平面上三點P，P'，P_0，則

$$|w - w'| = \text{線段 } \overline{PP'} \text{ 之長度},$$

$$\arg\frac{w-w_0}{w'-w_0} = \angle PP_0P' \text{ 之角度。}$$

又三角形不等式可寫成下列形狀：

$$(14)\quad |w \pm w'| \leqq |w| + |w'|$$

現在來陳述在此不等式(14)中等號成立的條件於下：即當$\frac{w}{w'}$ 爲一正實數時而僅於此時

$$(15)\quad |w + w'| = |w| + |w'|$$

成立。又當$\frac{w}{w'}$爲一負實數時而僅於此時

$$(16)\quad |w - w'| = |w| + |w'|$$

成立。我們在後面要用這些事實。

補助定理 假設在一平面上表示四點A，B，C，D的複素數依次爲w_1，w_2，w_3，w_4，則這些四點在同一圓周上的充要條件係

$$(17)\quad \frac{w_1-w_2}{w_3-w_2}\Big/\frac{w_1-w_4}{w_3-w_4} = \frac{w_1-w_2}{w_3-w_2}\cdot\frac{w_3-w_4}{w_1-w_4} = \text{一實數}$$

此補助定理的證明在初等函數論的各書上都有，故從略之。此地我們僅要注意：下列三

條件爲互相等值：

(i) $\dfrac{w_4 - w_1}{w_2 - w_1} \cdot \dfrac{w_2 - w_3}{w_4 - w_3} =$ 一實數

(ii) $\dfrac{w_1 - w_4}{w_2 - w_4} \cdot \dfrac{w_2 - w_3}{w_1 - w_3} =$ 一實數

(iii) $\dfrac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} \cdot \dfrac{w_3 - w_4}{w_2 - w_4} =$ 一實數

從幾何的觀點這些條件之等值性爲很明顯。代數的證明亦極其容易。例如，假設 (i) 成立，可證明 (ii) 之成立如下：

$\dfrac{w_2 - w_4}{w_1 - w_4} \cdot \dfrac{w_1 - w_3}{w_2 - w_3}$ ((ii) 之左邊之逆數)

$$= \frac{(w_2 - w_1) - (w_4 - w_1)}{w_1 - w_4} \cdot \frac{(w_1 - w_4) + (w_4 - w_3)}{w_2 - w_3}$$

$$= \left(\frac{w_2 - w_1}{w_1 - w_4} + 1\right)\left(\frac{w_4 - w_3}{w_2 - w_3} + \frac{w_1 - w_4}{w_2 - w_3}\right)$$

$$= \frac{w_2 - w_1}{w_1 - w_4} \cdot \frac{w_4 - w_3}{w_2 - w_3} + \frac{w_4 - w_3}{w_2 - w_3} + \frac{w_2 - w_1}{w_2 - w_3} + \frac{w_1 - w_4}{w_2 - w_3}$$

$= \dfrac{w_2 - w_1}{w_2 - w_3} \cdot \dfrac{w_4 - w_3}{w_1 - w_4}$ ((i) 左邊之逆數 $\times (-1)$) $+ 1$

$=$ 一實數 $+ 1$

$=$ 另一實數。

擴張的 Ptolemy 的定理之利用複素數的証明　如上，假設表示平面上的四點 A，B，C，D 的複素數依次爲 w_1，w_2，w_3，w_4。現在，因爲

(18)
$$\begin{aligned}&(w_1 - w_2)(w_3 - w_4) - (w_3 - w_2)(w_1 - w_4)\\ &= (w_1 - w_2)(w_3 - w_4) + (w_2 - w_3)(w_1 - w_4)\\ &= (w_1 - w_3)(w_2 - w_4)\end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned}&|(w_1 - w_2)(w_3 - w_4)|\\ &+ |(w_2 - w_3)(w_1 - w_4)|\\ &\geqq |(w_1 - w_3)(w_2 - w_4)|\end{aligned}$$

即

(19)
$$\begin{aligned}&|w_1 - w_2||w_3 - w_4|\\ &+ |w_2 - w_3||w_1 - w_4|\\ &\geqq |w_1 - w_3||w_2 - w_4|\end{aligned}$$

此式可寫成下列形狀：

(20) $AB \cdot CD + BC \cdot AD \geqq AC \cdot BD$

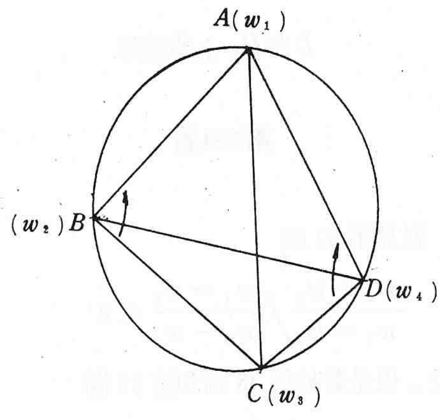
此地，我們要特別注意：用複素數的此不等式(20)的上述的證明是包含上列所有情形在內的。

又在(19)式中的等號當

$$(w_1 - w_2)(w_3 - w_4) \div (w_3 - w_2)(w_1 - w_4)$$

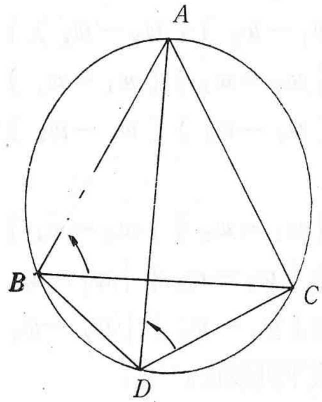
爲一負實數時而僅於此時成立。故，依上述補助定理得知：如果在 (20) 式中等號成立，則四點 A，B，C，D 是在同一圓周上的。

現在假設四點 A，B，C，D 在一圓周上。即 D 在三角形 ΔABC 之外接圓周上。此時僅有下列三情形可能發生：



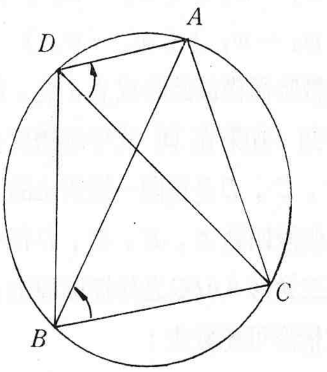
D 在 $\boldsymbol{D}_2$ 上的情形

第37圖



D在$\boldsymbol{D}_1$上的情形

第38圖



D在$\boldsymbol{D}_3$上的情形

第39圖

對於第 37 圖

$$\frac{w_1-w_2}{w_3-w_2}\Big/\frac{w_1-w_4}{w_3-w_4}<0$$

成立。但是對於第 38 圖和第 39 圖

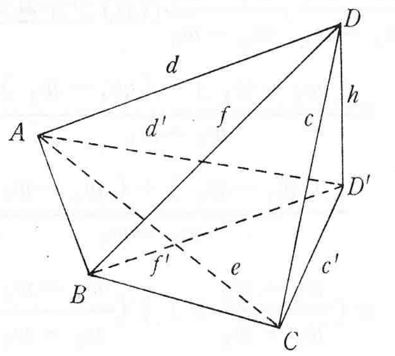
$$\frac{w_1-w_2}{w_3-w_2}\Big/\frac{w_1-w_4}{w_3-w_4}>0$$

成立。現在，因爲⒅式成立，依上述⒃式的條件，我們得知

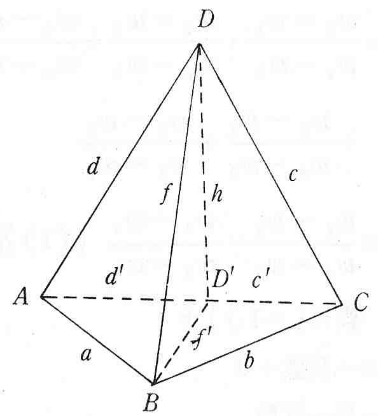
$$\begin{aligned}&|(w_1-w_3)(w_2-w_4)|\\&=|(w_1-w_2)(w_3-w_4)\\&\quad-(w_3-w_2)(w_1-w_4)|\\&=|(w_1-w_2)(w_3-w_4)|\\&\quad+|(w_3-w_2)(w_1-w_4)|\end{aligned}$$

對於第 37 圖成立，但是，對於第 38 圖和第39 圖均不成立。如此已得擴張的 Ptolemy 的定理的證明了。

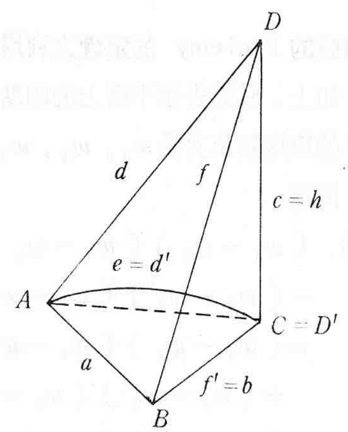
這種用複素數的證明雖然對於一平面上的四點很簡單且透徹。但是對於 A，B，C，D 爲一四面體的頂點時（即四點不在同一平面上時）不可適用。可是，此時利用在一平面上的四點所得的結果也可解析地證明之如下：



第40圖



第41圖



第42圖

先考慮，從點D向三點A，B，C所決定的平面所下的垂線之垂足D' 不在ΔABC之三邊上（第 40 圖）或在三角形ΔABC之一邊上但不爲任一頂點（第 41 圖）的諸情形。

在第40圖和第41圖，如上稱

$$AB=a\ ,\ BC=b\ ,\ CD=c\ ,$$
$$DA=d\ ,\ AC=e\ ,\ BD=f\ 。$$

現在又稱

$$CD'=c'\ ,\ AD'=d',\ BD'=f'$$

和

$$DD'=h$$

則

$$(21)\qquad c=\sqrt{c'^2+h^2}\,,\quad d=\sqrt{d'^2+h^2}\,,\quad f=\sqrt{f'^2+h^2}\ 。$$

此時，依擴張的 Ptolemy 的定理的結果

$$(22)\qquad ac'+bd'\geqslant ef'$$

成立。我們想證明

$$(23)\qquad ac+bd>ef$$

之成立。要證明此不等式之前，我們先證明下列不等式之成立：

$$(24)\qquad \sqrt{c'^2+h^2}\sqrt{d'^2+h^2}\geqq c'd'+h^2$$

此因

$$\begin{aligned}&(\sqrt{c'^2+h^2}\sqrt{d'^2+h^2})^2-(c'd'+h^2)^2\\&=h^2(c'-d')^2\geqq 0\end{aligned}$$

之故。現在利用(24)式來證明(23)式之成立於下：

$$\begin{aligned}&(ac+bd)^2-(ef)^2\\&=(a\sqrt{c'^2+h^2}+b\sqrt{d'^2+h^2})^2\\&\quad-(e\sqrt{f'^2+h^2})^2 &&\text{依(21)式}\\&=a^2(c'^2+h^2)\\&\quad+2ab\sqrt{c'^2+h^2}\sqrt{d'^2+h^2}\\&\quad+b^2(d'^2+h^2)-e^2(f'^2+h^2)\\&\geqq a^2(c'^2+h^2)+2ab(c'd'+h^2)\\&\quad+b^2(d'^2+h^2)-e^2(f'^2+h^2)\\& &&\text{依(23)式}\\&=[(ac'+bd')^2-(ef')^2]\\&\quad+h^2[(a+b)^2-e^2]\\&>0 &&\text{依(21)式和三角形不等式。}\end{aligned}$$

因之，(23)式得證。

最後，考慮垂足D' 與A，B，C中的一點一致的情形。設$D'=C$（第42圖）。此時

$$(25)\qquad d=\sqrt{c^2+e^2},\quad f=\sqrt{b^2+c^2}\ 。$$

因之，

$$\begin{aligned}&(ac+bd)^2-(ef)^2\\&=(ac+b\sqrt{c^2+e^2})^2\\&\quad-(e\sqrt{b^2+c^2})^2 &&\text{依(25)式}\\&=a^2c^2+2abc\sqrt{c^2+e^2}\\&\quad+b^2(c^2+e^2)-e^2(b^2+c^2)\\&>a^2c^2+2abc^2+b^2(c^2+e^2)\\&\quad-e^2(b^2+c^2) &&\text{因}\sqrt{c^2+e^2}>c\\&=c^2[(a+b)^2-e^2]>0\\& &&\text{依三角形不等式，}\end{aligned}$$

即

$$ac+bd>ef$$

成立。 證明完了。

在上面的討論我們同時發見了下列事實：即(1)如果四點A，B，C，D不在同一平面上，則(1)式中等號不成立。(2)如果四點A，B，C，D在同一平面上而不在一直線上，則除了某二點一致的情形之外，僅有這四點在落同一圓周上並且點D在$\angle ABC$ 內時(1)之等號成立。對於其外的所有情形等號不成立。因而，設使四點在一圓周上，如果D不在$\angle ABC$ 上，則(1)之等號不成立。(3)如果四點在同一直線上，則除了有二點爲重合的情形之外，僅有 8 種情形存在，對於這些情形(1)式中等號成立。

到現在爲止，筆者還未得到四點爲一四面體之頂點時 Ptolemy 不等式的直接（即不利用關於在一平面上的四點的 Ptolemy 的不等式的）且簡單的解析證明。如果能得到這種證明，相信必爲相當有趣。

—本文作者為本所研究員—