談研究年齡結構之數學模型

—Leslie's Model

許世壁

本文最主要的目的是介紹如何研究人口動力學(Population Dynamics)裏的一些有關年齡結構(Age Strucure)之問題。舉個例來說明：目前台灣人口中0～5歲有 x_1 人，6～10歲有 x_2 人，……，76～80歲有 x_{16} 人。試問 20 年或 100 年後，這些人口的變化如何？還有每一個年齡分類(Age class)在總人口上的比例會不會很穩定地趨向某一個固定值？如果是的話，多快？就社會學、經濟學而言，這是一個很實際而且值得研究的重要問題。下面我們就要導出有關這個問題之數學模型——Leslie's Model 。它同時也可以應用到其他生物，如魚類及昆蟲等。

首先，假設從現有的統計數據，我們能選擇出一個適當的單位時間 T，而後將人口分成 A 類。令向量 $\vec{V}_N$ 代表在第 N 期時(時間爲 NT)人口裏的女性年齡結構(在此我們假設男性，女性人口數目相等)，簡而言之令

$$\vec{V}_N=\begin{bmatrix} V_{1,N} \\ \vdots \\ V_{A,N} \end{bmatrix}$$

在此，分量 $V_{k,N}$，$k=1,\cdots,A$ 代表年齡介於$(k-1)T$ 及 kT 中間之女性總人數。譬如說應用到實際人口時，我們通常取 $T=5$ 年，而且將人口分成16類，即 $A=16$，

$V_{1,N}$ =在第 N 期時，介於0～5歲之女性總人數。

$V_{2,N}$ =在第 N 期時，介於6～10歲之女性總人數。

⋮

$V_{16,N}$ =在第 N 期時，介於76～80歲之女性總人數。

如果年齡超過 80 歲時，則我們不予討論。

下一步我們要做的工作是如何找出第 $N+1$ 期的年齡結構向量(Age structure vector) $\vec{V}_{N+1}$ 與在第 N 期之年齡結構向量 $\vec{V}_N$ 之關係。假設下列的 b_k 及 m_k，$k=1,\cdots,A$ 爲已知，

b_k =在單位時間 T 內，第 k 個年齡分類之女性平均每人所生出的女孩數目

m_k =第 k 個年齡分類能活過單位時間 T 而變成第 $k+1$ 年齡分類之百分比

利用 b_k，m_k 及 $V_{k,N}$ 之定義，我們可以導出下列關係式：

(1) $V_{k,N+1}=m_{k-1}V_{k-1,N}$，
$k=2,3,\cdots,A$

(2) $V_{1,N+1}=b_1V_{1,N}+\cdots+b_mV_{A,N}$

其中(2)式說明了從第 N 期到 $N+1$ 期所出生之女孩總數。所以，如果我們假設 $b_1,\cdots,b_A$ 及 $m_1,\cdots,m_A$ 這些非負之實數均可由人口之

統計資料得到，則我們有下列式子：

$$
(3)\quad
\begin{aligned}
V_{1,N+1} &= b_1 V_{1,N} + \cdots + b_A V_{A,N} \\
V_{2,N+1} &= m_1 V_{1,N} \\
&\vdots \\
V_{A,N+1} &= m_{A-1} V_{A-1,N}
\end{aligned}
$$

或者用矩陣之表示法，(3)式可改寫為：

$$
(4)\quad \vec{V}_{N+1} = M\vec{V}_N \quad \text{(Leslie's Model)}
$$

$$
(5)\quad M = \begin{bmatrix}
b_1 & b_2 & \cdots\cdots & b_{A-1} & b_A \\
m_1 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\
0 & m_2 & 0\cdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & 0 & & & \\
\vdots & \vdots & & 0 & 0 \\
0 & 0 & & m_{A-1} & 0
\end{bmatrix}
$$

(Reproduction Matrix)

如果，我們假設現在的年齡結構向量 $\vec{V}_0$ 為已知，則由(4)式，我們得到：

$$
(6)\quad \vec{V}_N = M^N \vec{V}_0
$$

所以，我們將年齡結構的問題變成一個線性代數的問題：

當 N 很大時，向量 $M^N\vec{V}_0$ 如何變化？

為了解決這個問題，必須利用線性代數中有關固有值（ eigenvalue ）及固有向量（ eigenvector ）之觀念及其重要定理 Primary decomposition Theorem （參考〔1〕）。首先我們考慮 $A\times A$ 矩陣 M 之固有值 λ。從固有值之定義，λ 為 M 之特徵多項式（ Characteristic Polynomial） $f(\lambda)=\det(M-\lambda I)=0$ 之根。通常特徵多項式很難算，但在這裏矩陣 M 有其特殊形式(5)，所以利用降階展開行列式 $\det(M-\lambda I)$，得到

$$
\begin{aligned}
(7)\quad f(\lambda) &= \lambda^A - b_1\lambda^{A-1} - b_2 m_1 \lambda^{A-2} \\
&\quad - \cdots - (b_A m_1 \cdots m_{A-1}) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

因為 $f(0)<0$ 而且當 $\lambda>0$ 夠大時 $f(\lambda)>0$，所以 $f(\lambda)=0$ 必有一正實根。事實上，因為矩陣 M 裏之係數皆大於或等於零，根據有名的 Frobenius 定理（參考〔2〕）我們得知：存在一固有值 $\lambda_0>0$，而且其他 $A-1$ 個固有值 λ，滿足 $|\lambda|\le\lambda_0$。現在，我們假設矩陣 M 滿足下列性質：

(H) 存在一固有值 $\lambda_0>0$ 而且其他 $A-1$ 個固有值 λ，滿足 $|\lambda|<\lambda_0$

在假設 (H) 下，我們可以用數值分析之方法 Power Method 實際地算出 λ_0（參考〔3〕）。有了 λ_0，因為 λ_0 滿足(7)式，我們可以檢查一下下列 $\vec{\phi}_0$ 為一對應於 λ_0 之固有向量；

$$
\vec{\phi}_0 = \begin{bmatrix} \phi_{0,1} \\ \\ \\ \\ \phi_{0,A} \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} \lambda_0^{A-1}/m_1\cdots m_{A-1} \\ \lambda_0^{A-2}/m_2\cdots m_{A-1} \\ \vdots \\ \lambda_0/m_{A-1} \\ 1 \end{bmatrix}
$$

$$
M\vec{\phi}_0 = \lambda_0\vec{\phi}_0
$$

令 E_0 為由向量 $\vec{\phi}_0$ 所產生之一維子空間，$E_0\subseteq \boldsymbol{R}^A$。由線性代數的 Primary decomposition Theorem，我們可將 $\boldsymbol{R}^A$ 寫成 $\boldsymbol{R}^A=E_0\oplus E_1$，其中 E_1 是以對於固有值 $\lambda\neq\lambda_0$ 之固有向量（ eigenvectors ）或廣義固有向量（ generalized eigenvectors ）為其基底（ basis ）所組成的 $A-1$ 維子空間。為了討論方便起見，我們就假設矩陣 M 之固有值為 λ_0，λ_1，…，λ_{A-1}，$\lambda_i\neq\lambda_j$ 當 $i\neq j$ 而且令 $\vec{u}_i$ 為對應於 λ_i 之固有向量。所以任何 $\vec{x}\in\boldsymbol{R}^A$ 可唯一表為

$$
\vec{x} = c_0\vec{\phi}_0 + c_1\vec{u}_1 + \cdots + c_{A-1}\vec{u}_{A-1}
$$

現令 P 為 E_0 上之投影算子（ Projection operator on E_0 ），即

$$
P(\vec{x}) = c_0\vec{\phi}_0
$$

令 $I(\vec{x})=\vec{x}$， $Q=I-P$

則 $Q(\vec{x})=c_1\vec{u}_1+\cdots+c_{A-1}\vec{u}_{A-1}$

所以如果將 $\vec{V}_0$ 表爲

$$\vec{V}_0=c_0\vec{\phi}_0+c_1\vec{u}_1+\cdots+c_{A-1}\vec{u}_{A-1}$$

則

$$\begin{aligned}M^N\vec{V}_0&=IM^N I\vec{V}_0\\&=(P+Q)M^N(P+Q)\vec{V}_0\\&=PM^NP\vec{V}_0+PM^NQ\vec{V}_0\\&\quad+QM^NP\vec{V}_0+QM^NQ\vec{V}_0\end{aligned}$$

從固有值，固有向量及 P，Q 之性質，可得

$$\begin{aligned}PM^NP\vec{V}_0&=PM^N(c_0\vec{\phi}_0)\\&=P(c_0\lambda_0^N\vec{\phi}_0)\\&=c_0\lambda_0^N\vec{\phi}_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}PM^NQ\vec{V}_0&=PM^N(c_1\vec{u}_1+\cdots\\&\quad+c_{A-1}\vec{u}_{A-1})\\&=P(c_1\lambda_1^N u_1+\cdots\\&\quad+c_{A-1}\lambda_{A-1}^N\vec{u}_{A-1})\\&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}QM^NP\vec{V}_0&=QM^N(c_0\vec{\phi}_0)\\&=Q(c_0\lambda_0^N\vec{\phi}_0)\\&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}QM^NQ\vec{V}_0&=QM^N(c_1\vec{u}_1+\cdots\\&\quad+c_{A-1}\vec{u}_{A-1})\\&=Q(c_1\lambda_1^N\vec{u}_1+\cdots\\&\quad+c_{A-1}\lambda_{A-1}^N\vec{u}_{A-1})\\&=c_1\lambda_1\vec{u}_1+\cdots\\&\quad+c_{A-1}\lambda_{A-1}^N\vec{u}_{A-1}\end{aligned}$$

所以，

$$\begin{aligned}M^N\vec{V}_0&=c_0\lambda_0^N\vec{\phi}_0+c_1\lambda_1^N\vec{u}_1+\cdots\\&\quad+c_{A-1}\lambda_{A-1}^N\vec{u}_{A-1}\\&=\lambda_0^N\Big(c_0\vec{\phi}_0+c_1\big(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\big)^N\vec{u}_1\\&\quad+\cdots+c_{A-1}\big(\frac{\lambda_{A-1}}{\lambda_0}\big)^N\vec{u}_{A-1}\Big)\end{aligned}$$

因爲我們假設 $|\lambda_i|<\lambda_0$，$i=1,\cdots,A-1$，所以當 N 很大時

$$M^N\vec{V}_0\approx\lambda_0^N c_0\vec{\phi}_0 \tag{8}$$

從(8)式，我們得到兩個結論

(Ⅰ) 年齡結構 (Age distribution) 是以 λ_0 之速率成長

(Ⅱ) 每個年齡分類 (Age class)對總人口之比例是穩定地趨向一固定值

因爲由(8)式

$$\frac{\text{在第}N\text{期之第}k\text{個年齡分類之總人數}}{\text{在第}N\text{期之總人口}}=\frac{V_{k,N}}{\sum_{j=1}^{A}V_{j,N}}\approx\frac{\lambda_0^N c\,\phi_{0,k}}{\lambda_0^N c\sum_{j=1}^{A}\phi_{0,j}}=\frac{\phi_{0,k}}{\sum_{j=1}^{A}\phi_{0,j}}$$

參考資料

〔1〕 Smale & Hirsch : *Differential Equations, Dynamical System and Linear algebra*, Academic Press 1974.

〔2〕 S. Karlin & H. M. Taylor : *A first course in Stochastic Process*, Academic Press 1975.

〔3〕 K. Atkinson : *An introduction to Nnmerical Analysis*, 1978. John-Wiley son.

〔4〕 F. C. Hoppensteadt : *Mathematical method of Population Biology*, Courant Institute Lecture Note 1976.

—本文作者現任敎於交大應數系—