(2. 陳進吉來函)

編輯先生：

您好！學生有下列諸問題，煩請先生回答:

1. 求 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

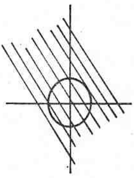
解原式 $=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

$=0+0+\cdots\cdots 0=0$

（請問錯誤何在）

2. 利用歌西不等式求圓或橢圓切線

(1)求 $x^2+y^2=1$ 之切線方程式，而切線形如 $x+y=k$



$(x^2+y^2)(1+1)\geq(x+y)^2$

$\Rightarrow\ -\sqrt{2}\leq x+y\leq\sqrt{2}$

當 $x+y=k$ 正好爲 $x^2+y^2=1$ 之切線時可使 k 爲最大 $\sqrt{2}$，最小 $-\sqrt{2}$

∴此切線程式爲

$x+y=\sqrt{2}$ 或 $x+y=-\sqrt{2}$

(2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ 求斜率爲 -1 之切線方程式

$\left[\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{y}{4}\right)^2\right]\left[3^2+4^2\right]$

$\geq(x+y)^2\ \Rightarrow\ -5\leq x+y\leq 5$

故切線方程式爲

$x+y=5$ 或 $x+y=-5$

(3)求切橢圓面 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}=1$ 且法向量爲〔1，1，1〕之切平面方程式

$\left[\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2+\left(\frac{z}{2}\right)^2\right]$

$\left[3^2+2^2+2^2\right]\geq(x+y+z)^2$

$\Rightarrow\ -\sqrt{17}\leq x+y+z\leq\sqrt{17}$

$\therefore$切平面爲 $x+y+y=\sqrt{17}$,

$x+y+z=-\sqrt{17}$

（請問此推論眞實否）

如果上式推論正確，則在四度空間中，所求出的方程式又如何解釋呢？

（如 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}+\frac{k^2}{4}=1$ 可求出 $x+y+z+k=l$ 之 l ）

(3)向量內積爲何定義成

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

陳進吉　敬上

進吉同學：

1. 若已知 k 個數列

$\{a_{1n}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$, …, $\{a_{kn}\}_{n=1}^{\infty}$

之極限值分別爲 $l_1, l_2, \cdots, l_k$，則這 k 個數列的和數列

$$\{a_{1n}+a_{2n}+\cdots+a_{kn}\}_{n=1}^{\infty}$$

之極限值爲 $l_1+l_2+\cdots+l_k$ 即

設 $\lim_{n\to\infty}a_{1n}=l_1$, $\lim_{n\to\infty}a_{2n}=l_2$, …, $\lim_{n\to\infty}a_{kn}=l_k$

則
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(a_{1n}+a_{2n}+\cdots+a_{kn})&=l_1+l_2+\cdots+l_k\\&=\lim_{n\to\infty}a_{1n}+\lim_{n\to\infty}a_{2n}+\cdots+\lim_{n\to\infty}a_{kn}\end{aligned}$$

在應用上面的和極限等於極限的和時，特別要注意 k 是已知的固定個數，它的直觀意義是相當容易理解。如果直接運用上面的性質於求

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$$

時，就是一個錯誤的觀念。因當 $n\to\infty$，裏面的數列無法看成有限個如此數列之和數列；直觀地看來，雖然每一個 $\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ 都以 0 爲極限，但每一個畢竟跟 0 都至少有 $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ 的誤差，而裏面有 n 項，因此跟 0 的誤差至少爲 $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$

但
$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\geqslant\frac{1}{2}$$

因此
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)\neq 0$$

事實上，利用下列不等式

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\geqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$$

及 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$

由極限的挾擠性質易知

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$$

2. 利用歌西不等式分別求如下的圓、橢圓、以至於橢圓面的切線或切平面的方式推論應該是正確；如果想要推廣到四度空間甚至更高度空間的問題及其意義，那麼對於你的(1)、(2)、(3)的問題應先求出切點，並將過切點的切線方程式或切平面方程式解釋成過切點之“最佳線性近似”；例如 $x+y=\sqrt{2}$ 爲圓 $x^2+y^2=1$ 上過點

$(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$之最佳線性近似

$x+y=-5$爲橢圓$\frac{x^2}{9}+\frac{x^2}{4}=1$上過點

$(\frac{-9}{5},\frac{-16}{5})$之最佳線性近似，$x+y+z=\sqrt{17}$爲橢圓面$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}=1$

上過點$(\frac{9\sqrt{17}}{17},\frac{4\sqrt{17}}{17},\frac{4\sqrt{17}}{17})$之最佳線性近似

那麼由

$$\left[\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}+\frac{z^2}{2^2}+\frac{k^2}{2^2}\right]\left[3^2+2^2+2^2+2^2\right]\geqslant(x+y+z+k)^2$$

且知上式相等之充要條件是：可找出一個常數c使得

$$\left(\frac{x}{3},\frac{y}{2},\frac{z}{2},\frac{k}{2}\right)=c(3,2,2,2)$$

若 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}+\frac{k^2}{4}=1$ 則得

$$21\geqslant(x+y+z+k)^2$$

$$\Longleftrightarrow -\sqrt{21}\leqslant x+y+z+k\leqslant\sqrt{21}$$

$$x=9c\ ,\ y=4c\ ,\ z=4c$$

$$k=4c$$

代入得

$$21c^2=\pm 1 \qquad c=\pm\frac{\sqrt{21}}{21}$$

故 $x+y+z+k=\sqrt{21}$ 爲曲面

$\frac{x^2}{9^2}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}+\frac{k^2}{4}=1$ 過點

$$\left(\frac{3\sqrt{21}}{7},\frac{4\sqrt{21}}{21},\frac{4\sqrt{21}}{21},\frac{4\sqrt{21}}{21}\right)$$

的最佳線性近似，而

$$x+y+z+k=-\sqrt{21}$$

則爲此面過點

$$\left(\frac{-3\sqrt{21}}{7},\frac{-4\sqrt{21}}{21},\frac{-4\sqrt{21}}{21},\frac{-4\sqrt{2}}{21}\right)$$

之最佳線性近似。

3. 至於向量內積$\vec{a}\cdot\vec{b}$何以定成$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$呢？一般而言，在$n$度空間$R^n$之兩向量 $\vec{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，
$\vec{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，
其內積$\vec{a}\cdot\vec{b}$可定成

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

而在$n=2$或3中，利用三角學（如餘弦定律等）可知：

$$a_1b_1+a_2b_2=(\sqrt{a_1^2+a_2^2})(\sqrt{b_1^2+b_2^2})\cos\theta \qquad (n=2)$$

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\cos\theta \qquad (n=3)$$

其中θ爲該二向量之夾角。

一般的R^n空間中，由歌西不等式

$$|a_1b_1,+\cdots+a_nb_n|\leqslant|\vec{a}||\vec{b}|$$

自然而然地就可推廣R^n中二向量夾角概念，將其夾角的餘弦定成

$$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

即

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

反之，若先將R^n中二向量之內積$\vec{a}\cdot\vec{b}$定成$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$（假設已有夾角的直觀意義），利用$R^n$中直角坐標方法及餘弦定律可知

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

換言之，兩向量之內積有兩種定義方法，殊途同歸。

陳昭地　覆

讀者「虎尾　吳爲」，請惠賜通信地址，以便回答您所提的「代數問題」

編輯部