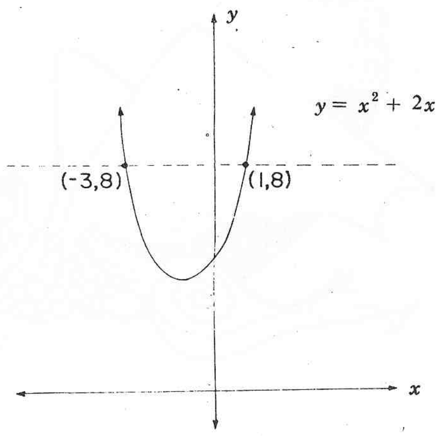
虛根的變化

王湘君 譯

編者按：原文 Those Elusive Imaginary Zeros. 刊於 Mathematics Teachers, Jan., 1982. 作者爲 Robert Travers (Pomperaug Regional High School, Southburg, CT.) 及 David Kim (Cornell U., Ithaca, NY.)

在坐標平面上，可以指出多項函數圖形裏的虛根位置嗎？這當然是辦不到的。但是稍微變一下戲法，某些不尋常的「根」，可以找到位置而且彼此存在一些奇異的關係。

舉例來說，二次函數 $y = x^2 + 2x + 5$，它的根是 $x = -1 \pm 2i$，當然它不出現在圖形上。因爲在圖形上的每一點，都是實數對。在圖形上我們可以找出這些虛數和實數對的關係嗎？我們來變個戲法，把虛數單位 i 去掉，也就是從虛根 $x = -1 \pm 2i$ 中除去 i，得 $x = -1 + 2 = 1$，及 $x = -1 - 2 = -3$。我們稱它們爲「變化根」，把這兩根代入方程式中得到兩組數對（1，8）和（−3，8）。我們稱這兩點爲函數的「零點」，我們發現這兩點決定了一條水平線 $y = 8$。



這個例子不是一般性的，我們來看一般性的。假設二次方程式 $f(x)=0$ 的兩根爲 $a\pm bi$ （$b\neq 0$）

設 $f(x)=s(x-a+bi)(x-a-bi)$ 其中 s 是定數，是方程式的領導係數，則 $f(x)=0$ 的「零根」爲（$a+b$ ，$2b^2s$ ）及（$a-b$ ，$2b^2s$），它們決定一條水平線 $y=2b^2s$。這是一個零次函數。

我們打算升高方程式的次數，看一看同樣的戲法在三次方程式裏會有什麼樣的結果？是不是也出現一條水平線？函數

$$y=x^3-5x^2+6x+12$$

它的根是 -1 和 $3\pm\sqrt{3}\,i$ ，我們考慮「變化根」-1 ，$3+\sqrt{3}$，$3-\sqrt{3}$。它們對應的「零點」分別是（-1 ，0），（$3+\sqrt{3}$, $24+6\sqrt{3}$）和（$3-\sqrt{3}$ ，$24-6\sqrt{3}$），把這些點繪在圖形上，它們顯然不在同一水平線上，但它們都在直線 $y=6(x+1)$ 上，於是我們要懷疑：是不是任何三次方程式的「零點」，都在同一條直線上。以下我們要來證明這是一件事實。

設 $x=a\pm bi$ ，及 $x=k_1$ 是三次方程式的根。這三次函數可設爲

$p(x)$

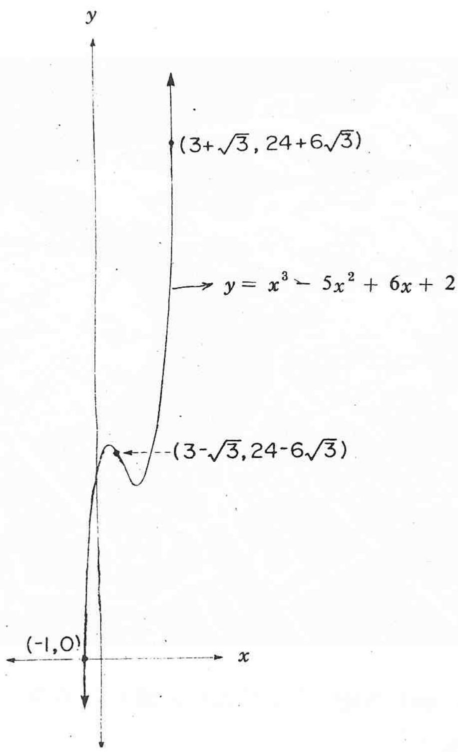
$=s(x-a-bi)(x-a+bi)(x-k_1)$

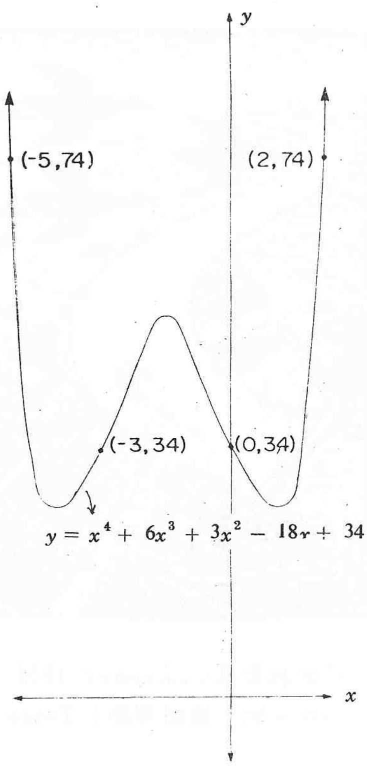
這「變化根」爲 $a+b$ ，$a-b$ 和 k_1，把它們代入方程式可得「零點」（$a+b$ ，$2b^2s(a+b-k_1)$），（$a-b$ ，$2b^2s(a-b-k_1)$）和（k_1 ，0）。前面的兩點決定直線 $y=2b^2s(x-k_1)$ ，第三點（k_1 ，0）顯然滿足方程式。我們如果把「零點」所決定的方程式稱爲「零點方程式」，這顯然是一次式。

我們很自然的要推廣到四次方程式，難道四次方程式的「零點」也在同一條直線上？我們來考慮下列方程式

$$y=x^4+6x^3+3x^2-18x+34$$

其根爲 $1+i$ ，$1-i$ ，$-4+i$ ，$-4-i$，它們對應的「變化根」分別爲 2 ，0 ，-3 ，-5 ，其對應的「零點」分別是（2 ，74），（0 ，34）（-3 ，34）（-5 ，74）如圖：





它們並不在同一直線上，奇妙地，它們竟在拋物線 $y = 4x^2 + 12x + 34$ 上。這個例子告訴我們四次方程可以有二次的「零點方程式」，爲了證明這個可能性，我們把四次方程式分成兩種：第一種是有一對虛根一對實根，第二種是有二對虛根。利用前面三次方程式所使用的技巧，我們得到第一種（有一對虛根）方程式的「零點方程式」如下

$$y = 2b^2s(x-k_1)(x-k_2)$$

其中 k_1，k_2 是原方程式的實根，$a \pm bi$ 是原方程式的虛根。同樣地，我們也可以得到第二種方程式的「零點方程式」如下

$$y = 2b^2s(x-c) + 2d^2s(x-a)^2$$

其中 $a \pm bi$ 和 $c \pm di$ 是原方程式的虛根。這兩個「零點方程式」正如預料的是二次式。

我們可做如下的推測：

設 $y = p(x)$ 是實係數多項方程式，有 $n \geq 2$ 個不同的根，其中至少有二個虛根，則其「零點方程式」的次數是 $n-2$ 次。

請注意：

1. 我們在討論中省略了全部是實根的方程式。因爲這種方程式的「零點」全部在 x 軸上，滿足方程式 $y = 0$。

2. 我們已舉例並證明了上述推測中的 $n = 2$，3，和 4 的時候。對任意給定的 n 值我們只要重覆同樣的技巧，就能確實找到零點方程式而證明上述推測。但我們還無法得到一個「零點方程式」的通式，所以我們尚無法對推測做一般性的證明。

（本文作者現任教於師大附中）