介紹兩本數學史

康明昌

書　名：近代數學史談	書　名：數學史（A concise history of mathematics）
著　者：高木貞治	著　者：Dirk J. Struik
譯　者：楊備欽與陳建韓	譯　者：吳　定　遠
發　行：商務印書館	發　行：水牛出版社
時　間：57年9月	時　間：71年9月

前　言

我教微積分的時候，經常有學生要求我介紹幾本數學書，讓他們在寒暑假期間閱讀。每次我總是建議他們看高木貞治的「近世數學史談」（以下簡稱「史談」）。後來我才發現這本書似乎已經絕版了。這更促使我要找個機會介紹這本書，看看能不能因此提起書局重印這本書的意願，或者鼓勵別人重譯這本書，甚至是激發數學界的朋友寫一本類似「史談」的書。

Struik 的「數學史」也是討論數學史的名作。這本書在1948年出版，1967年修訂第三版，曾有十幾種不同語言的翻譯本，其中包括 1956 年在大陸出版的中譯本（見原書第三版序言）。台灣的讀者遲到今天才能看到吳定遠先生的譯本，眞使我們又欣慰又慚愧。因此我也想介紹這本書，盼望它能很快的普及起來。

值得一提的是，這兩本書都很薄，「史談」有 170 頁，「數學史」有 270 頁。而其內容的豐富恰與其頁數成非常強烈的對比。「史談」的作者高木貞治（ 1875 ～ 1960 年）是東京帝國大學的教授，「數學史」的作者 Struik（1894～）是麻省理工學院的教授，兩位作者的數學研究工作都極爲出色，高木貞治研究代

數數論，Struik 研究微分幾何。尤其是高木貞治，稱得上一代宗師，他在類體論（class field theory）的研究有決定性的貢獻，他的成就在數學史留下永恆的痕跡（註一）。

(一)

「史談」的主要目的是介紹十九世紀上半世紀的數學家及其貢獻。C. F. Gauss（高斯，1777～1855年）與N. H. Abel（1802～1829年）是其主角，而橢圓函數（elliptic function）是貫穿全書的一根軸線（註二）。高木貞治從Gauss怎樣解決圓的十七等分問題，進而討論求雙紐線周長的問題與雙紐線的五等分問題，橢圓積分與橢圓函數就此登場。Gauss, Abel, C. G. J. Jacobi（1804～1851年）的風雲際會成爲近世數學史最雄偉的場面之一——不過，橢圓函數的完整理論還有賴B. Riemann（1826～1866年）與K. Weierstrass（1815～1897年）的整理。

「史談」詳細的介紹Gauss與Abel的生平、個性及其在橢圓函數理論的貢獻。高木貞治沒有忘記隨時加上生動而且重要的時代背景的說明。可能的話，他還補充一些雋永的故事，不是道聽塗說的軼事，而是從Gauss的「數學日記」，Jacobi的全集，A. L. Cauchy（1789～1857年）的全集，Abel的全集擷取而來的故事。

此外，高木貞治還介紹同時代的數學和數學家，例如：

(1)巴黎的工藝學校（École Polytechnique）。

主要是取材自 Jacobi 全集第七册的一篇演講。Jacobi 是第一個在德國大學取得教職的猶太人，也是一個激進派，他對法國大革命的歷史與意義當然是瞭如指掌的。

工藝學校創校於 1794 年，恐怖時代結束不久。當時法國急需大量的工程師，從事船艦、道路、採礦、火藥、大炮的製造，因此決定創立工藝學校。工藝學校非常重視數學的訓練。工藝學校在數學的貢獻主要有三點：一培養一批第一流的數學家；二改變數學家的角色，使他們在研究之外，還負上教學的責任；三鼓勵專業數學家出版優秀的講義與教科書，如Monge的「Géométrie descriptive」與「Feuilles d'analyse」，Lagrange的「Théorie des fonctions analytiques」，Legendre的「Éléments des géométrie」，Cauchy的「Cours d'analyse」（註三）。

(2)工藝學校的數學家，包括老師與學生，如J. L. Lagrange（1736～1813年），G. Monge（1746～1818年），S. Poisson（1781～1840年），J. Fourier（1768～1830年），A. L. Cauchy（1789～1857年），V. Poncelet（1788～1867年）。

由於Lagrange 經常被看做十八世紀的數學家，「史談」沒有深入的討論他。

Monge 是工藝學校的校長，雅各賓黨（Jacobin Club）的副主席，革命政府的海軍部長，又是拿破崙時代的上議院議長。Monge 多采多姿的一生，「史談」實在應該爲他多花費一些筆墨，因爲他具備卓越的行政才能與輝煌的研究成果，同時又是一個諄諄善誘的教師。

(3)E. Galois（1811～1832年）

Galois 求出五次或五次以上方程有根式解的充分必要條件（註四）。Galois 在二十一歲時死於決鬥。

(4)A. L. Crelle（1780～1855年）

他雖然不是一個頂尖的數學家，他和他創辦的雜誌卻爲當時德國數學的發展做出最大的貢獻。

(5) Jacobi 與P. G. L. Dirichlet （

1805～1859年）。

很可惜，描寫 Jacobi 的份量不夠，甚至不如寫 Cauchy 的詳細。高木貞治也察覺到這個缺憾。

(6)三個幾何學家，使用解析方法的 A. F. Möbius（1790～1868年）與 J. Plücker（1801～1868年），使用綜合方法的 J. Steiner（1796～1863年）。

「史談」的作者顯然不滿足於僅僅列一張人名與定理的清單給讀者，他還想在最低限度下介紹數學的內容。因此，讀者在這裏可以學到一點橢圓函數的基本概念，可以瞭解複變函數論怎樣在 Cauchy 的手中逐步發展出來。唸過微積分的人可能會對於討論級數的收斂發散感到厭煩，請看看「史談」第110～115，151～153頁，歷史會告訴你，這些嚕嚕囌囌的討論在十九世紀初期是如何重要。

看過「史談」的讀者可能會驚訝的問：「這就是近世數學最重要的一頁嗎？橢圓函數是什麼？爲什麼我一點兒也不知道？」我的答覆是，一點兒也不錯，這正是近世數學最重要的一個環節，直到現在還是如此。我可以舉德國大數學家 F. Klein（1849～1925年）的一段話做爲佐證。Klein說：「在我的學生時代，由於 Jacobi 學派的影響，Abel 函數的理論（註五）毫無疑問的被認爲是當代數學的巔峯，每一個學生都想在這個領域奮勇前進。」

如果把高木貞治的「史談」比做一篇史詩，歌頌十九世紀的英雄和他們的事蹟，那麼 Struik 的「數學史」就是一本清澈澄明的哲學鉅著，它像一把明亮鋒利的刀子，冷靜而且不帶感情的剖析每一個時代的數學。

「數學史」的時間從渾沌初開的人類講到十九世紀結束爲止。它除了討論西方（歐洲與希臘）的數學發展，Struik 還想兼顧到阿拉伯、印度、中國的數學。可以說，這是一本簡明而且完整的數學史。

翻一翻這本書的目錄：數學的開端，古東方，希臘，希臘社會衰落後的東方，西歐數學的開端，十七世紀，十八世紀，十九世紀。就可略知著者的野心。

可是那一本數學史的書不是這樣寫的？Struik 這本書究竟有什麼特點呢？我暫且舉幾件事說明一下：

一 Struik 把握住每一個時代最重要的數學概念，並且強調這些概念是怎樣從上一個時代演化而來，怎樣影響下一個時代的數學發展。這個特點在討論希臘數學與十七世紀數學時尤其突出。

「數學史」對於重要的數學家的全部貢獻都有扼要而且權威性的敍述。這是「史談」無法比擬的。在高木貞治筆下的Gauss，我們幾乎只看到數論；Struik 卻告訴我們，除了數論和代數基本定理之外，Gauss也研究過天文學、電磁學、特殊函數、微分幾何。Struik 大概認爲他有責任替每一個數學家做一個蓋棺定論，因此他觀察的角度非常全面，他的結論也很愼重。

正因爲 Struik 是以做史筆的心情來寫作的，「數學史」不會像某些美國式的數學史書籍給人一種輕眺或濫情的感覺，Struik 的文筆是嚴謹而且莊重。

二 Struik 把數學的發展看做人類文明史的一部分，因此他非常注意社會的組織和社會的活動如何促進或如何阻礙數學的發展。

在希臘時期與文藝復興時代，他非常詳盡的討論貿易、天文、航海業、測量術、保險業如何促進數學的發展。他沒有忘記印刷術的發明對人類的貢獻。

Struik 認爲，集約式農業仰賴精密的天文知識，因此促進數學的發展；粗放式農業（如羅馬帝國）則否。他還認爲，農業爲主的社會只能發展出算術或代數的知識，幾何的理論就要依賴貿易城邦的社會來完成。他舉個例子，十五、十六世紀由於商業迅速的發達，意大利各城市流行一種「計算熱」（見「數學史」第110頁），這正好是三次與四次方程解法

發見的時代。

但是Struik並不迂腐，他不是偏執狂，他非常尊重事實。他完全意識到社會環境對數學發展具有某些支配力，可是他指出：「十九世紀數學的豐收並不是新的工業所引發的技術問題而造成的；科學與實用的關連並未完全斷絕，不過常常變得模糊。」（見「數學史」第193頁）

因此 Struik 留下一個問題：「是什麼原因促使十九世紀或二十世紀的數學蓬勃發展？」他不願提出他自己的看法，他只提供一些背景說明。（註六）

三 Struik 不只注意到數學知識的發展，他還注意到傳播知識的形式如何改變。

以傳播知識的場所而言，十七世紀的大學，如Bologna大學，是傳播新知識的大本營；然後大學的進步角色被學術團體取代，英國的皇家學會（Royal Society of London）、法國科學院（French Acad'emie des Sciences）應運而生；在法國大革命時代，工藝學校及其仿效者（如師範學校、Berlin大學）又變成時代的前鋒。

以傳播知識的書籍而言，十九世紀以前大部分是專家的論著，十九世紀時工藝學校式的講義卻風行一時。有趣的是，二十世紀輪到N. Bourbaki式硬綁綁的「定義——定理——引」的書籍流行起來。

以傳播知識的語言而言，十九世紀以前大部分使用拉丁文，十九世紀以後則使用各國的語言。這正好反映民族國家的興起。

四 Struik 在「數學史」第267～269頁談到D. Hilbert（1862～1943年）在國際數學會提出的二十三個問題，揭開二十世紀數學的序幕。（註七）

其實，Struik 如果能夠在最後一節討論S. Lie（1842～1899年）、H. Poincaré（1854～1912年）與D. Hilbert 對二十世紀數學的影響，可能是一篇很好的謝幕辭，並且讀者對二十世紀數學也會有一個初步但是比較完整的認識。

我不禁想要把這兩本書和另外兩本書作個比較。這兩本書是

F. Klein ：「Development of mathematics in the 19th century」。

M. Kline ：「Mathematical thought from ancient to moden times」。

同樣的，兩位作者都是學有專精的數學家。尤其是F. Klein，他是十九世紀末期德國最重要的數學家之一。（註八）

很明顯的，「史談」受了F. Klein 很深的影響，「數學史」予M. Kline 不少影響。

F. Klein與M. Kline 的書顯然都非常詳細——比較這四本書的頁數就可知道。可是我仍然較願推荐「史談」與「數學史」給一般讀者。

要完全欣賞「史談」可能需要具備複變函數論的知識。可是一般讀者（高中程度以上）如果在某些地方不求甚解的話，他仍然可以從「史談」得到許多益處，許多啓發。高木貞治的筆觸是非常輕快的，他講的故事又那麼有趣，我相信，即使是不喜歡數學的人都會欣賞高木貞治這本書。

但要看得懂F. Klein 的書，保守的估計，至少要受完大學四年數學系的訓練。此外，還要有耐心，否則會半途而廢。F. Klein 的書幾乎是把十九世紀主要的數學流派的來龍去脈交代得清清楚楚。有不少地方，例如代數曲線的分類，讀者可能無法卒讀。不過我非常鼓勵數學系的學生好好的看F. Klein 這本書。憑良心說，大學四年的訓練實在相當有限，F. Klein這本書可以使你大開眼界。

「數學史」是一本完整的歷史。高中程度以上的任何人都可以看，至少會增廣你的見聞。話雖這麼講，讀者如果沒有相當的數學訓練，許多數學名詞（如 three body problem，ideal factors, biquadratic residues）對他有什麼意義？他對這些數學家如何能產生親

切感？我的經驗是，只要具備微積分的基礎應該可以不太費力的看到「十八世紀」，並且會有不少收穫。至於最後一章「十九世紀」如果能找人解釋一些基本的概念，相信對於讀者會有很大的幫助。我推荐這本書給一般讀者（高中程度以上），它提供你一個完整的數學史的輪廓，它不強調天才或某些數學家怪誕的行爲，它告訴你：數學是人類社會活動的產物。

M. Kline 的書簡直是一本百科全書。正因爲它太詳盡了，一般讀者可能會抓不到重點。如果讀者對數學史已經有一個通盤的瞭解，這倒是一本非常方便的參考書。例如，假使你想知道射影幾何（projective geometry）發展的經過，這裏就有一章專門討論射影幾何。數學老師如果想查一些比較詳盡的數學史的資料，M. Kline 的書可能是非常適合的。

寫數學史的作者通常會碰到一個兩難的境地：怎樣寫數學呢？你是把 ideal factor 當做一個不加解釋的名詞，擺在那裏讓讀者自己去揣摩呢，還是從 Fermat 問題開始，討論因子分解的唯一性，再介紹 E. E. Kummer（1810～1893年）如何提出 ideal factors 的概念呢？Struik 採取第一個做法，不做太深入的解釋。高木貞治 F. Klein. M. Kline 差不多是採取第二個做法。採取第二個做法時，如果講解得不夠透徹，不懂的讀者還是不懂——可能會更沮喪。這也是這三本書不太容易看的一個原因。在這一點，「史談」處理得最成功，一方面可能是高木貞治在這方面下過功夫，另一面是「史談」的篇幅最短，在讀者的興趣還沒有完全被耗盡之前，他已經看完這本書了。

(二)

這兩本書有不少有趣的地方，雖然無關宏旨，我聊且列出數則，以供參考。

一我有時候想，如果 I. Newton（牛頓，1642～1727年）和現在的大一學生一起唸「微積分」，他的成績不見得就會如何出色，因爲他雖然會微積分，可是現在的「微積分」課程在講微分之前，先講了許多基礎知識（如連續性、極限、實數系、集合的符號），這些預備知識通常是很無趣的，Newton 能不能忍受這種「暖身運動」，我不敢說。

同樣的情形，高中學生在學不等式、指數函數、對稱式，這些眞刀實槍的材料之前，要先玩夠了邏輯語句、De Morgan 法則、加法交換律、結合律這些觀念，也令人非常迷惑。

「數學史」第 12 頁引了一段 A. Speiser 的話，實在發人深省：

> 「基礎數學很明顯的越來越枯燥乏味，這種傾向可以說明為何它直到較近才為人加以研究，因為有創意的數學家比較喜歡研究有趣而又美妙的問題。」

二某些業餘的數學家最喜歡研究一些可以一鳴驚人的問題，例如，最近還有人聲稱他解出三等分角的問題。我並不是說古希臘幾何三大問題沒有意義，不值得研究；事實上這些問題引出超越數理論（Diophantine approximation and transcendental numbers），從十九世紀中期到現在，這種理論的研究一直是數論研究上非常活躍、非常重要的一支。可是這些研究三等分角問題的先生卻不是採取這種高等的觀點。從幾何三大問題，他們並沒有走到另一個重要的數學領域；在方法上，他們只沿襲歐氏幾何的方法，並無創新之處——如果這種方法可以奏效，幾何三大問題早就被 Monge 或 Steiner 吃掉了，何況這些問題已經證明是無解的。

Abel 也幹過這種事。十九歲時他相信他解出五次方程式，論文寄到丹麥科學院，卻收到如下的答覆（「史談」第 102 頁）：

「Abel 年紀還輕，即使沒能達到目的，我們還是承認他是少見的明敏。我們十分擔心他把全副精神投資在這種白費心力的問題。他應該集中心力研究橢圓函數。如此也許可以在數學的大海中摸索到麥哲倫海峽。」

三 1826 年 Abel 到巴黎留學，Laplace, Legendre, Cauchy, Poisson, Fourier 雖然還健在，巴黎的數學地位已慢慢衰頹，可是這些一代宗師卻還志得意滿得不得了，忙著互相標榜。Abel 卻是明眼人，他的巴黎來鴻（「史談」第 118 ～ 119 頁）如果被 Lagrange 或 Monge 在九泉看到，這兩個工藝學校的守護神恐怕要捶胸頓足，痛哭流涕吧。

讀者不妨參考 C. Reid 寫的傳記，「Hilbert」。Hilbert 在六十多年後到巴黎遊學，當時的德國是一片奮發興旺的氣象，法國除了 Poincaré 和 Picard 之外，隱隱約約之中卻有老大的氣氛。風水輪流轉吧？

四「數學史」第 132 頁有一段話可以使數學家自我陶醉好幾天。Struik 說：

「機械論的哲學家，基於不同的理由，得到一個和柏拉圖主義者相同的結論。柏拉圖主義者相信宇宙的調和，笛卡爾主義者相信一種基於理性的放諸四海而皆準的法則，兩者都發現數學是科學的女王。」

五高木貞治在「史談」第 143 頁有一段感慨良深的話，

「數學家中以 Gauss 算是最幸運了。說他賢明也好，說他獨善其身也好，他很少把別人做為對手。做起學問並不隨便。他絕不，有意或無意，利用自己的地位謀求個人的利益。」

高木先生閱人多矣，在日本的地位也極崇高，居然講出這麼直率這麼沉痛的話，他的感觸大概是很深吧。

(三)

這兩本書都沒有詳細而且完整的討論中國數學史。中國數學史的著作本來就不多，除了李儼、杜石然、錢寶琮、李約瑟（J. Needham）這些人的著作之外，實在很難想到還有什麼經典性的中國數學史。

我認為研究中國數學史或科技史至少有三件刻不容緩的工作：

一把古代的科技書籍編個索引，以便利研究者查考。再把這些書翻譯成白話文，並且用現代的術語表達出來，使現代的人很容易、很正確的瞭解中國歷代的科技內容。

二以今日的眼光評價中國歷代科技文明的成就與缺失，並與同時代的西方文明相比較。

三探討中國科技發展與歷史、社會、文化背景的相互關係。

我相信，只要有更多的經典性的中國數學史出現，西方人在討論數學史時絕不會忽略中國人的貢獻。

(四)

大概是必須討論這兩本翻譯本的時候了。

我不懂日文，對於「史談」的翻譯問題沒有置啄的資格。不過有一些專有名詞的翻譯是很明顯的不妥當。

例如，第 142 頁把 Jordan 的名著「Traité des substitution」譯成「交換論」是完全錯誤的，應該是「置換論」。(「數學史」第 255 頁也犯了同樣的錯誤。)又如，第 159 頁所謂的「三次曲線的彎曲點」不是常用的名稱，應作「反曲點」或「拐點」(flexes)。在第 159 頁出現「特異切線」這個名詞，一般讀者大概很難猜出那是什麼東西，兩位譯者如果願意加一點註解(例如，到「岩波字典」查一下)，相信對讀者的幫助會很大。

一位數學界的前輩也看過這本中譯本。他認爲，兩位譯者既然花了這麼多的心血，何不再多加一把勁，把數學內容補充一下，也在專有名詞多花點心思？據這位前輩說，高木貞治的筆調是非常詼諧風趣的，兩位先生實在應該在中譯本的風格多花點心思。

總的來說，這些只不過是小瑕疵。我們還是要十二萬分的感謝兩位先生，他們替數學界的朋友(從高中生到大學教授)打開一扇窗，讓我們沐浴在耀眼的陽光和溫煦的春風之中。

當然，我們也不要忘記感謝吳定遠先生。他的譯筆流暢。在翻譯上，我沒有發現吳先生犯有重大的錫誤。除了少數地方的翻譯有商榷的餘地，(如，第 55 頁的「窮擧法」應改做「窮盡法」，第 264 頁的「在某一定區間」應改做「大域」)這本中譯本應該是可以信賴的。吳先生還補充了一些資料，特別用「譯註」標明，以便和原著的註釋區分。基於求全責備的緣故，我想提出三件事作爲參考。

一「數學史」沒有翻譯原著的索引(Index)。這份索引非同小可，它列有每一個數學家的全名、出生與死亡的年代，這是一份非常方便的參考資料。

二「數學史」緒言第 I 頁的第一句話，「數學不是一門自然科學，……」是譯者自說自話；第 X 頁中間開始也是譯者自己添加進去。上帝的歸上帝，凱撒的歸凱撒。請吳先生聲明一下吧。

三第 114 頁的「譯註」說，關於四次方程式楊玉成先生有一個新的微分解法。我的意見有兩點，

1. 這個解法對我而言是新的，因爲我以前只知道 Ferrari 的解法。但是，同樣的解法在 G. Chrystal (1868 年)或 O. Perron (1927 年)的書本都有，高木貞治的「代數學講義」的習題也有這個解法。十九世紀中期以前的書本此地不易找到，因此老祖宗們是否知道這種解法就不得而知了。

2. 我不明白什麼叫做微分解法。事實上楊玉成先生的方法是把四次方程式求根的問題變成二次曲線 $f(x, y)=0$ 與 $g(x, y)=0$ 求交點的問題。如果 $f(x, y)$ 或 $g(x, y)$ 可分解成一次因式的乘積，交點當然就很容易求出。但是 $f(x, y)=0$ 與 $g(x, y)=0$ 的交點和 $f(x, y)=0$ 與 $g(x, y)+\lambda f(x, y)=0$ 的交點是一樣的(λ 是參數)。因此只要決定 λ，使 $g(x, y)+\lambda f(x, y)=0$ 變成退化的二次方程式即可。要決定這個 λ 的數值，利用判別式，只需解一個三次方程式。

再一次謝謝吳先生的辛勞。

(五)

現在的數學教育，老師都不講數學定理背後的故事。這是適當的嗎？

常常有一些理工科的朋友問我：「『范氏大代數』已經解決了代數所有的問題。唸代數還有什麽搞頭呢？」也見過一些學了一點「集合論」或「數理邏輯」的人大談數學的本質。

我一點兒也不覺得這些人有什麽不對。我只感到慚愧，慚愧我們的社會沒有出版足夠多的好的書籍啓發他們，擴大他們的眼界。他們的意願其實是好的，他們喜歡數學，尊重知識。我們的社會沒有供應足夠的養料滋育他們饑渴的心靈。

高木貞治和Struik 這兩本書應該可以救救急。根本之道，還要大家多寫書，多寫高素質的書——數學史或一般的數學書籍，高中程度的或大學程度的，所有的書籍都缺乏，只有應付聯考的參考書不缺乏。

有人說：「二十世紀的數學呈放射性的發展，數學由許許多多封閉自足的體系構成，這些體系（如群論、點集拓樸、泛函分析）在其公理系統下獨立自主的發展。」尤其自二十年代抽象代數在E. Noether（1882～1935年）與E. Artin（1898～1962年）的提倡下，似乎證實了這種看法的可靠性。

數學是由公理決定的嗎？數學問題是怎樣產生的呢？數學究竟有沒有主要的潮流和最重要的目標呢？

我不願在這裏討論這些鉅大無比的問題，我也不相信這些問題的答案是簡單的「是」或「不是」所能解釋清楚的。我只想指出，對歷史的透視將非常有助於以上問題的討論。如果想知道數學的未來，就必須知道它的過去。

我姑且引Hilbert在 1900 年講的一段話。他說：「數學是一個有機體，其各部份相互聯繫。不可分割的完整性是這個有機體具備充沛活力的必要條件。」Hilbert的話在二十世紀變成完全錯誤了嗎？

抽象代數常遭到各方面的誤解。有人說：「抽象代數的誕生使代數學的研究在內容方面獨立自主，在方法上由計算變成思考」。關於前者，我建議讀者參考C. Chevalley 的書「Fundamental concepts of algebra」的序言。關於後者，「史談」提供一些線索。「史談」第42～47頁告訴我們Gauss是如何的喜歡計算，第150～151頁又告訴我們Dirichlet不喜歡盲目的計算，主張「要思想清楚，直透目標的本質」。請注意，Dirichlet是Gauss的忠實的追隨者，R. Dedekind（1831～1916年）是Dirichlet的學生輩，而Dedekind 正是抽象代數開山祖師E. Noether 最崇拜的數學家。容許我這麽說，最精巧的計算常常導致概念性的思維。如果說抽象代數造成「計算」與「思考」的對立，倒不如說抽象代數促進它們的融合。

有人說：「數學是因應社會的需要而產生的，二十世紀不應該放棄這個傳統，只有有用的數學才值得研究。」

這種「理論」與「應用」的爭執在歷史上似乎從來沒有停息過。Gauss說：「高等整數論可以算是目前數學中最上乘的一種。天文學上縱然再有更大的發展，也不會比得上我這次發現高等整數論這般快樂。」（「史談」第2頁）。同書第 59 頁，是工藝學校準備創校時，一位化學家向國民議會的代表吹噓科學的妙用。「數學史」第193～194頁有一段Jacobi指責Fourier狹隘的功用主義。

要討論那些數學有沒有用，倒不如討論那些數學是比較有益的（healthy）。在這裏，歷史的透視同樣的變成極有用的參考資料。

從另一個角度來看，Archimedes（阿基

米德，紀元前 287 ～ 212 年）積極的參與 Syracuse 城的防衛工作，中國歷代的數學家多次參與曆法的修訂，法國大革命時代度量衡的修訂就是在 Lagrange, M. Condorcet（1743 ～ 1794 年），Monge, Laplace, Legendre 等人的手中完成的（註九）。可是今日的數學家似乎越來越退縮到自己的象牙塔裏。這是多麼強烈的對比。

數學家其實應該多留意數學與其他自然科學、工程學、哲學、經濟學、歷史的關係（註十）。在教學上，用數學的各種應用來引起學習動機是個好主意，可是其中分寸要如何把握呢？

現在的學生唸數學大概只看到一個接一個的定理從眼前列隊而過，數學課本變成一間十八般兵器的收藏室，凌亂而且令人頭痛。

學生們知道這些兵器往日的雄風嗎？他們知道如何正確的使用這些兵器嗎？他們有能力鑄造新的兵器嗎？

正如高木貞治說的，在複變函數課堂上，上星期教完 Taylor 定理，這星期就接著留數定理。學生大概都不知道，兩者的發現相去十年之久，並且是留數定理先誕生。（「史談」第 88 頁）

要使數學課程生動活潑，並且促使學生創造性的學習，教師具備數學史的知識可能是必要的。在這意義之下，我很樂意推荐這兩本書。

可惜這兩本書只處理到十九世紀。J. Dieudonné 的書 Abrégé d'histoire des mathématiques : 1700 ～ 1900」，主要目的是討論十九世紀數學，實際內容卻涵蓋到二十世紀三十年代數學各種主要部門的發展。如果有人能把它譯成中文，那該多麼好！

註　釋

註一　有關高木貞治（T. Takagi）的貢獻請參考 H. Hasse : History of class field theory, 收集在「Algebraic number theory」（編者：J. W. S. Cassels 與 A. Fiöhlich）。

註二　在計算橢圓的部份弧長時，我們得到形式如

$$\int \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx \quad (0<k<1)$$

的不定積分。這就是一種橢圓積分。十八世紀的數學家發現這種橢圓積分不能用常見的函數表示出來。

更一般的，十九世紀的數學家把不定積分 $\int R(x, \sqrt{f(x)})\,dx$ 通稱爲橢圓積分，其中 $f(x)$ 是具有相異根的三次或四次多項式，$R(u, v)$ 是 u，v 的有理函數。任意橢圓積分都可化成以

下的標準形式：

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$\int \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx ,$$

或

$$\int \frac{dx}{(1-a^2x^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

令

$$u = u(z)$$

$$= \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

則 u 是 z 的函數。若將其反函數記做 sn，即 $z = sn\ u$，則 $sn\ u$ 是複數平面上雙週期的半純函數。

在一般情形下，所謂橢圓函數就是複數平面上雙週期的半純函數。橢圓函數可以寫成兩個 θ 函數的商，θ 函數是 Jacobi 發明的。橢圓函數也可以表示成 $P(z)$ 與 $P(z')$ 的多項式，P 函數是 Weierstrass發明的 $sn\ u$ 的記號暗示這種函數很像正弦函數 $\sin u$。像三角函數具有加法公式一樣，橢圓函數也滿足加法定律，這就是Abel's addition theorem。

把以上方法推廣，若 $\phi(x, y)$ 是一個不可約的多項式，則 $\phi(x, y) = 0$ 決定一個黎曼面（Riemann surface）。$\int R(x, y)\,dx$ 稱爲（在這個黎曼面的）一種Abel 積分，其中 $R(u, v)$ 是 u，v 的任意有理函數。Abel 函數是橢圓函數的推廣，橢圓函數是一個變數、兩個週期的半純函數，Abel 函數是 g 個變數、$2g$ 個週期的半純函數，其中 g 是這個黎曼面的虧格數（genus）。不過從 Abel 積分做反函數得到的並不是 Abel 函數。

註三 在法國大革命之前，Monge 是 Mézières 軍校的考試官。有人曾勸他何不仿效他的前任 E. Bezout 寫一套六大册的教科書。Monge 只寫了一册就放棄了。但是在巴黎工藝學校與師範學校任教時，由於革命熱忱的激勵，他卻寫了兩本經典式的著作，一本是投影幾何的，一本是微分幾何的。其中那本投影幾何（Géométric descriptive）在今日還是工程學上投影幾何的基本教科書。

註四 方程式 $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ 有根式解的意思是，這些根都可用 a_0, a_1, $\cdots$, a_n 經過加、減、乘、除、開方而得到。Abel 證明，如果這些係數 a_n, a_{n-1}, $\cdots$, a_0 是文字時（也就是以上方程式是文字方程式），則這個方程式沒有根式解（若 $n = 5$）。對於每一個方程式，Galois 定義一個根的置換群，方程式有根式解的充分必要條件是這個置換群是可解的（solvable）。Abel 的定理是Galois定理的特殊情形。

註五 有關 Abel 函數，請看（註二）最後一段話。

註六 我認爲要討論這個問題，有一些因素是不能忽略的，如：數學家逐漸專業化（代數學家、分析學家、幾何學家），數學的內容與方法有某些根本的突破，中產階級的興起造成的教育普及，社會投

資在基礎科學的研究增加，現代社會造成的激烈競爭。最後一個因素在十九世紀德國尤其明顯，如，Jacobi、Weierstrass、Klein在建立一些輝煌的理論之後，都精神崩潰，此後只能教書，不能繼續研究了。

註七 請參考F. Browder編的「Mathematical developments arising from Hilbert's problems」（美國數學會1976年出版），其中有研究Hilbert問題的最新資料。

註八 根據J. Dieudonne的講法，十八世紀90％以上重要的數學成就來自四、五個人，十九世紀來自三十多個人，二十世紀到目前爲止不會超過一百個人。我認爲，F. Klein 是肯定的在十九世紀那三十多個人之中。

註九 這些度量衡就是今天的公制。當時有兩個主要的問題：如何選取基數與單位？基數要取10進位或是沿襲以前的12進位？有人說，Lagrange認爲採取12進位不如採取11進位，因爲11是質數。另一個問題是單位長度該取多大，有兩個選擇，一個是把1米定爲 $\frac{g}{\pi^2}$（g是重力加速度），另一個是把1米定爲赤道到北極之間距離的十萬分之一。最後採用第二個辦法，因爲不久前Legendre才正確的測量出這個長度。

Condorcet 是百科全書派的一分子，他曾經用統計的資料來反擊那些反對牛痘的論調。他在「數學史」的唯一資料是，他大力提倡概率論，甚至主張把它用在法庭審判——數學的誤用！

註十 請參考J. G. Glimm, Mathematics program review, 登在Notices of American Mathematical Society, vol 30（1983), pages 4～6。

後記：本文引用「史談」和「數學史」的中譯本時，由於文字過長，或者爲了使讀者更加容易瞭解，有些地方沒有忠實的遵循中譯本的文字。特此向三位譯者致歉。本文初稿曾經張國男先生與蔡聰明先生指正，特此誌謝。

本文完成後，作者才發現H. Mehrtens，H. Bos and I. Schneider：Social History of Nineteenth Century Mathematics（Birkhäuser 出版社，1981年出版）。這是一本內容相當豐富的參考書。

—本文作者現任教於台大數學系—