7103 級數問題（周雲雄提供）

1. 證明對任意正整數a

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} k^a\right)/n^{a+1}=\frac{1}{a+1} \quad \cdots\cdots(1)$$

2. 更進一步，證明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sum_{k=1}^{n} k^a-\frac{n^{a+1}}{a+1}\right)}{n^a}=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots(2)$$

（註：不妨先驗證 $a=1$，2，及3的情況）

3. （假使你懂微積分）根據積分法則（integral test），易見(1)對任意正數 $a>0$ 成立，證明(2)式對任意正數 $a>1$ 亦成立。

解答：（周雲雄提供）

關於 $1^a+2^a+3^a+\cdots+n^a$ 已有許多文章討論過。譬如大家都熟知

$$\sum_{1}^{n} k=n(n+1)/2$$

$$\sum_{1}^{n} k^2=n(n+1)(2n+1)/6$$

$$\sum_{1}^{n} k^3=(n(n+1)/2)^2$$

毫無疑問地，我們可同樣地推出$\sum_1^n k^4$, $\sum_1^n k^5$, …，的公式。事實上，對$a \in N$，我們有下面的公式：

(1) $$1^a + 2^a + \cdots + (n-1)^a = \left[\sum_{k=0}^{a} \binom{a+1}{k} B_k n^{a+1-k}\right] / a+1$$

其中$\binom{m}{k} = m! / (k!(m-k)!)$，$B_0$, B_1, …是有名的Bernoulli numbers 滿足。

(2) $$B_0 = 1,\quad B_1 = -\frac{1}{2},\quad \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0,\quad n = 2, 3, \cdots。$$

但是對一般的正數a，我們不能期望(1)式仍成立，譬如(1)式右端的$\sum_{k=0}^{a}$，在a非正整數時應如何解釋呢？

那麼我們應該研究些什麼呢？不要忘掉我們的興趣在於了解$\sum_1^n k^a$ 的大小。既然無法知道它的確切值，可能知道它的近似大小嗎？這是整個問題的精神所在。（就如同2^{1000}的計算可能要花數年的時間，但利用對數我們可很快算出它的數量級）

讓我們先假設以下兩式皆對

(3) $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} k^a / n^{a+1} = 1/(a+1)$$

(4) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^a - \frac{n^{a+1}}{a+1}}{n^a} = \frac{1}{2}$$

則由(3)，可看出當n大時（n小時，我們可很快算出確切值）

(5) $$\sum_{k=1}^{n} k^a \approx \frac{n^{a+1}}{a+1}$$

即$n^{a+1}/(a+1)$是$\sum_{k=1}^{n} k^a$ 的近似值。到

此我們對 $\sum_{1}^{n} k^a$ 已略知一二。能否再多了解一些呢？譬如說，$n^{a+1}/(a+1)$ 是一個很好的近似值嗎？換句話說，誤差 $\sum_{k=1}^{n} k^a-(n^{a+1}/(a+1))$ 有多大？由(4)可得知

$$\sum_{k=1}^{n} k^a-\frac{n^{a+1}}{a+1}\approx\frac{n^a}{2}$$

即

$$\sum_{k=1}^{n} k^a\approx\frac{n^{a+1}}{a+1}+\frac{n^a}{2} \tag{6}$$

讓我們就"已知"結果來比較一下。由(1)，(2)可馬上得出，當 $a\in N$ 時

$$\sum_{1}^{n} k^a=\frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{a+1}{k}B_k\, n^{a+1-k}}{a+1}+n^a$$

$$=\frac{n^{a+1}}{a+1}+\frac{n^a}{2}+\frac{an^{a-1}}{12}+\cdots\cdots \tag{7}$$

所以(5)，(6)可稱為 $\sum_{1}^{n} k^a$ 的一階及二階近似。而且由(7)我們可猜想更高階的近似為何。有興趣的同學可試三階近似。方法與(3)，(4)的證明相同，只是更加複雜。

現在讓我們來證明(3)，(4)

A. $a\in N$ 假如(1)成立，那麼由(7)馬上可得到(3)，(4)，這當然不是我們的作法。不過有興趣的同學可以用二項式定理

$$(1+x)^m=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^k,\quad m\in N \tag{8}$$

及歸納法來證明(1)。這並不難，只是較複雜。關於(1)式的一種用微積分的證法可參考T.M. Apostol 所著Mathematical Analysis 2nd Edition P. 251.

我們的作法如下：令(8)式的 $m=a+1$，$x=k$ 可得

$$(k+1)^{a+1}-k^{a+1}=\sum_{s=0}^{a}\binom{a+1}{s}k^s$$

分別令上式的 $k=n, n-1, \cdots, 1$ 後，相加起來

$$(n+1)^{a+1}-1=\sum_{s=0}^{a}\binom{a+1}{s}\left(\sum_{k=1}^{n} k^s\right)$$

$$=\binom{a+1}{a}\left(\sum_{k=1}^{n} k^a\right)+\binom{a+1}{a-1}\left(\sum_{k=1}^{n} k^{a-1}\right)+\cdots+\binom{a+1}{1}\left(\sum_{1}^{n} k\right)+\binom{a+1}{0}\left(\sum_{1}^{n} k^0\right) \tag{9}$$

(9)式左端的項很清楚，右端的第一項是我們所要的，但還有許多其他的項，不過它們與 $\sum_{1}^{n} k^a$ 比起來就顯得不重要了，因

$$0\le\sum_{k=1}^{n} k^s\le\sum_{k=1}^{n} n^s=n^{s+1}$$

由(9)易得

$$\frac{(n+1)^{a+1}-1}{n^{a+1}}-\sum_{s=0}^{a-1}\binom{a+1}{s}\frac{n^{s+1}}{n^{a+1}}\le\frac{\binom{a+1}{a}\sum_{k=1}^{n} k^a}{n^{a+1}}\le\frac{(n+1)^{a+1}-1}{n^{a+1}}$$

令 $n\to\infty$，於是(3)式得證。

因

$$(n+1)^{a+1}=n^{a+1}+(a+1)n^a+\sum_{s=0}^{a+1}\binom{a+1}{s}n^s$$

由(9)

$$(a+1)\sum_{k=1}^{n} k^a-n^{a+1} \tag{10}$$

$$= (a+1)n^a + \sum_{s=1}^{a-1} \binom{a+1}{s} n^s$$

$$- \frac{(a+1)a}{2} \sum_{k=1}^{n} k^{a-1}$$

$$- \sum_{s=0}^{a-2} \binom{a+1}{s} \sum_{k=1}^{n} k^s$$

因由(3)知

$$\sum_{k=1}^{n} k^s / n^a = \begin{cases} 1/a, & s = a-1 \\ 0, & s = 0, 1, \cdots, a-2 \end{cases}$$

若將⑽兩端同除以$(a+1)n^a$，再將$n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^a - \frac{n^{a+1}}{a+1}}{n^a} = 1 - \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$$

所以(4)得證。

B. $a > 0$　因函數$f(x) = x^a$在$[0, n]$是遞增，由積分法則知

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^a \le \int_0^n x^a\, dx \le \sum_1^n k^a$$

由於

$$\int x^a\, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$$

由上可得

$$\frac{n^{a+1}}{a+1} \le \sum_1^n k^a \le n^a + \frac{n^{a+1}}{a+1}$$

於是不難證明(3)；另一證法是根據Riemann sum　之定義

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} k^a}{n^{a+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^a \to \int_0^1 x^a\, dx = \frac{1}{a+1}$$

關於(4)式，首先

$$\int_k^{k+1} a x^{a-1} [x]\, dx$$

$$= k \int_k^{k+1} a x^{a-1}\, dx$$

$$= k[(k+1)^a - k^a]$$

其中$[x]$表$\le x$的最大整數。令$k = n-1, n-2, \cdots, 1, 0$後，相加起來

$$\int_0^n a x^{a-1} [x]\, dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} k[(k+1)^a - k^a]$$

$$= [(n-1)n^a + (n-2)(n-1)^a + \cdots + 1.2^a + 0.1^a]$$

$$- [(n-1)(n-1)^a + (n-2)(n-2)^a + \cdots + 2.2^a + 1.1^a]$$

$$= n^{a+1} - \sum_{k=1}^{n} k^a$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n} k^a - \frac{n^{a+1}}{a+1}$$

$$= \frac{a}{a+1} n^{a+1} - \int_0^n a x^{a-1} [x]\, dx$$

$$= \int_0^n a x^{a-1} (x - [x])\, dx$$

注意：$x - [x]$是週期二1的函數

$$\text{上式右端} = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} a x^{a-1} (x - [x]),\ dx$$

令$x = t + k$做變數變換

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 a(t+k)^{a-1} \cdot t\, dt$$

$$= \int_0^1 a \left[\sum_{k=0}^{n-1} (t+k)^{a-1}\right] t\, dt$$

因為$0 \le t \le 1$，$a > 1$，

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^{a-1} \le \sum_{k=0}^{n-1} (t+k)^{a-1} \le \sum_{k=1}^{n} k^{a-1},$$

而且 $$\int_0^1 t\ dt=\frac{1}{2}$$

故綜合得

$$\frac{a}{2}\sum_{k=1}^{n-1}k^{a-1}\le\sum_{k=1}^{n}k^{a}-\frac{n^{a+1}}{a+1}$$
$$\le\frac{a}{2}\sum_{k=1}^{n}k^{a-1}$$

若 $a>1$，則 $a-1>0$。將上式除以 n^a 再利用(3)式，馬上可得證

$$(4)\qquad \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}k^{a}-\frac{n^{a+1}}{a+1}\Big)/n^{a}=\frac{1}{2}$$

事實上(4)式對 $1>a>0$ 亦成立。因爲(3)式對 $-1<a<0$ 成立。作法相同，只需注意當 $-1<b<0$ 時，$f(x)=x^b$ 在 $(0,\infty)$ 是遞減。

另一作法類似於 $a\in N$ 的情形，係利用一般的二項式展開定理：對任意實數 c

$$(11)\qquad (1+x)^c=1+\binom{c}{1}x+\binom{c}{2}x^2+\cdots+\binom{c}{k}x^k+\cdots,$$
$$|x|<1$$

其中

$$\binom{c}{k}=\frac{c(c-1)(c-2)\cdots(c-k+1)}{k!}$$

令 $c=a+1$，$x=-1/k$，兩邊同乘 k^{1+a}，經移項後可得

$$(12)\qquad k^{1+a}-(k-1)^{1+a}$$
$$=\binom{a+1}{1}k^{a}-\binom{a+1}{2}k^{a-1}+\binom{a+1}{3}k^{a-2}\cdots\cdots$$
$$=\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s+1}\binom{a+1}{s}k^{a+1-s}$$

注意上式右端其實並非交錯級數，而是由第〔a〕$+2$ 項開始該級數爲全正或全負。(這也是爲何我們令(11)中的 x 爲 $-1/k$ 而非 $1/k$)。剩下來的作法與(9)—(10)相似，雖然(12)右端是無窮級數和，利用(11)我們其實只需考慮前面若干有限項即可。有興趣的同學可仔細想一想。