7102　集合問題（蕭鴻銘、王人傑提供）

設 $S=\{1,2,\cdots,n\}$，若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 爲 S 中 n 個相異子集，試證存在 $x\in S$，使得 $A_1\cup\{x\}, A_2\cup\{x\}, \cdots, A_n\cup\{x\}$ 兩兩相異。

解答：（蕭鴻銘、王人傑提供）

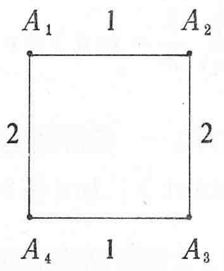
請先看兩個例子：

① $n=4$：

	1	2	3	4
A_1	1	0	1	0
A_2	0	0	1	0
A_3	0	1	1	0
A_4	1	1	1	0

（表 1）

G_1：



（圖 1）

表 1 表示　$A_1=\{1,3\}$，$A_2=\{3\}$，
$A_3=\{2,3\}$，
$A_4=\{1,2,3\}$

圖 1 表示　$A_1\cup\{1\}=A_2\cup\{1\}$，
$A_2\cup\{2\}=A_3\cup\{2\}$，$\cdots$
etc.

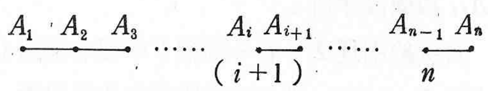
容易檢查：“ $x=3$ 或 $4 <=> A_i \cup \{x\} \neq A_j \cup \{x\} \quad \forall i \neq j$, $i, j=1, 2, 3, 4$”

②$A_i=\{1, \cdots, i\}$ ， $i=1, \cdots, n$

	1	2 ……	i ……	n
A_1	1	0 ……	0 ……	0
A_2	1	1 0 …………		0
⋮				
A_i	1	1 ……	1	0⋯0
⋮				
A_n	1	1 ………………		1

（表 2 ）

G_2 ：



檢查：“ $x=1 <=> A_i \cup \{x\} \neq A_j \cup \{x\}$, $\forall i \neq j$, $i, j=1, 2, \cdots, n$ ”

在證明之前，先讓我們來稍爲認識此命題的意思。

設 A ， B 爲兩集合，定義

$A-B=\{x \mid x \in A$ 且 $x \notin B\}$

$A \Delta B=(A-B) \cup(B-A)$

相信你很快可證得

(1) $A \Delta B=\phi <=> A=B$

(2) $A \Delta B=\{x\}$

$<=> A \cup\{x\}=B \cup\{x\}$ ， $A \neq B$

$<=> A-\{x\}=B-\{x\}$ ， $A \neq B$

仿上面二例，我們可用兩種觀點來看這個題目，由之有二種證法

（證法甲一數學歸納法的應用）：表的觀點

＜1＞當 $n=2$ 時，若給 $A_1 \neq A_2$ ，

	1	2
A_1	α_1	α_2
A_2	β_2	β_2

， α_i, $\beta_i \in \{0 。1\}$ ，

易知 $\alpha_1 \neq \beta_1$ 或 $\alpha_2 \neq \beta_2$ ，前者取 $x=2$ ，由表：

	1	2
$A_1 \cup\{2\}$	α_1	1
$A_2 \cup\{2\}$	β_1	1

$\therefore A_1 \cup\{2\} \neq A_2 \cup\{2\}$ ；後者取 $x=1$ 即可。

＜2＞設 $2 \leqslant n<m$ 時，原命題成立。

則當 $n=m$ 時，任給 m 個 $\{1, 2, \cdots, m\}$ 中相異子集 $A_1, \cdots, A_m$ 看表如下：

	1	2⋯	y	x	$(m-1)$	m
A_1	a_{11}	$a_{12}\cdots$			$a_{1(m-1)}$	a_{1m}
A_2	⋮	⋮				
⋮						
A_p	a_{p1}	$a_{p2}\cdots$	a_{py}			a_{pm}
A_{m-1}						
A_m	a_{m1}	$a_{m2}\cdots$	a_{my}		$a_{m,(m-1)}$	a_{mm}

$a_{ij} \in\{0, 1\}$

$i, j=1, 2, \cdots, m$

定義： $a_{ij}=1 <=> j \in A_i$

利用

$A_i \Delta A_j=\{x\} <=> a_{ik}=a_{jk} \quad \forall k \neq x$

且 $a_{ix} \neq a_{jx}$ （ why ？）

⊙請注意，原結論同義於 $\exists x \in S$ 使得表中 x 那一行（即 a_{ix} ， $\forall_i$ ）全塡成 1 （或擦去），新表中 $A_1^{\prime}, \cdots, A_n^{\prime}$ 仍然相異”

首先，將 m 行遮去，看虛線所框成的新表，這時可能有些 $A_i^{\prime} \neq A_j^{\prime}$ ， $i \neq j$ （事實上，最多爲兩個一組，why ？又這多少個與證明無關，所以才有最後的推廣）， $\therefore A_1^{\prime}$ ， $A_2^{\prime}$ ， $\cdots$ ， $A_{m-1}^{\prime}$ 爲 $\{1, 2, \cdots, m-1\}$ 中， l （ $\leqslant m-1$ ）個相異子集（若 $l=1$ 會有什麼結論？）

由假設， $\exists y \in\{1, 2, \cdots, m-1\} \ni$ “ $A_i^{\prime} \neq A_j^{\prime} \Rightarrow A_i^{\prime} \Delta A_j^{\prime} \neq\{y\}$ ”，此時再放手看原表，則會發現 $A_i \cup\{y\} \neq A_j \cup\{y\}$ ，

$i \neq j$, i , $j = 1$, $\cdots$, $m-1$
因爲

$$\left\{\begin{array}{l} A'_i \neq A'_j \ \Rightarrow \ A'_i \Delta A'_j \neq \{y\} \\ (\ y\text{的取法})\Rightarrow A_i \Delta A_j \neq \{y\} \\ (\text{why ?}) \\ \qquad \text{或} \\ A'_i = A'_j \ \Rightarrow \ a_{im} \neq a_{jm} \\ \Rightarrow m \in A_i \Delta A_j \ \Rightarrow \ A_i \Delta A_j \neq \{y\} \\ \because y \neq m \end{array}\right.$$

現在看A_m，要是$A_m \Delta A_i \neq \{y\}$ ，$\forall 1 \leqslant i \leqslant m-1$ 則證畢。

否則$\exists !\, p \ni A_m \Delta A_p = \{y\}$
$(\because A_m \cup \{y\} = A_p \cup \{y\} \neq A_j \cup \{y\}$, $\forall_j \neq p)$

這時再遮去y行，又得$S-\{y\}$中$(m-1)$個相異子集$\bar{A}_1$，$\cdots$，$\bar{A}_p(=\bar{A}_m)$，$\cdots$，$\bar{A}_{m-1}$，再由假設，$\exists x \in S-\{y\} \ni$ “$\bar{A}_i \neq \bar{A}_j \Rightarrow \bar{A}_i \Delta \bar{A}_j \neq \{x\}$”，仿原先之討論，(注意$\bar{A}_p = \bar{A}_m$ <=> $a_{py} \neq a_{my}$ 且 $a_{pj} = a_{mj}$ ，$\forall_j \neq y$) 可證得$A_i \Delta A_j \neq \{x\}$ ，$i \neq j$; i , $j = 1$, 2 , $\cdots$, m。此x即爲所求，原命題得證。

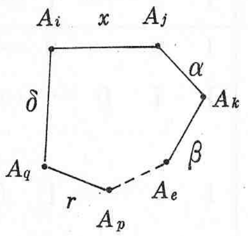
(證法乙—圖網理論 (graph theory) 淺介)：圖的觀點

將A_1，$\cdots$，A_n看成平面上n個相異點；若$A_i \Delta A_j = \{x\}$ ，則將點A_i和點A_j用一標記x的線段連接(由此可知標記是唯一)自然形成一圖網 (graph) G ，G由給定的A_1，$\cdots$，A_n 所決定。

定義Lab$(G)=\{y \mid y$爲G中的標記$\}$，在例中，可看到Lab$(G_1)=\{1, 2\}$ ，Lab $(G_2)=\{2, 3, \cdots, n\}$ ，易知原結論同義於“ $\mid$Lab $(G) \mid < \mid S \mid = n$ ”由於“ $x \notin$ Lab(G) <=> $A_i \Delta A_j \neq \{x\}$ ，$Ai \neq y$ ”

首先證引理1：上述G中任一迴路 (cycle)，即一個多邊形中的標記都至少出現2次。(事實上，都出現偶次數。)

若存在一迴路，其標記x祇出現一次，如下所示：



α , β , $\cdots$, r , $\delta \neq x$ ，且設$x \in A_j$，$\therefore x \notin A_i$

$\because \alpha \neq x$且$x \in A_j \Rightarrow x \in A_k$

同理，β , $\cdots$, r , $\delta \neq x$ ，所以推得$x \in A_i$，與假設矛盾。

其次給引理2：若一圖網F中沒有迴路(稱之爲forest)，則F中線段數必少於點數。(此引理請讀友自己劃幾個圖網即可知道。)

由引理1，可將G中任一標記只恰取一線段，有重覆的則擦掉，最後可得一個子圖網(subgraph) F ，Lab$(F)=$ Lab(G) 且F中沒有迴路。

由引理2，$\therefore \mid$Lab$(G)\mid = \mid$Lab$(F)\mid <F$中的點數$= n = \mid S \mid$，所以原命題得證。

註：(1)此題承陳其誠先生提出一個較廣義的看法：

“對任意集合T，若$A_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{in})$ $i = 1$, 2 , $\cdots$, n表任意n個相異向量，其中$a_{ij} \in T$ 。

則存在一分量$x \in \{1, 2, \cdots, n\}$ $\ni {}_xA_i \neq {}_xA_j$ ，$\forall i \neq j$ ，其中${}_xA_i = (a_{i1}, \cdots, \widehat{a_{ix}}, \cdots, a_{in})$。”例如

$A = (\dfrac{1}{10}, \sqrt{2}, -3, \pi)$ ，${}_3\hat{A}_i =$

$(\dfrac{1}{10}, \sqrt{2}, \pi)$。此可仿表的觀點證之。

原題卽爲$T=\{0,1\}$的一個特例。

*(2)設$S=\{1,2,\cdots,n\}$，$k<n$

定義 $f_n(k)=\max\ \{m\mid$任給S中m個相異子集$A_1,\cdots,A_m$必存在一$B\subset S$，$|B|=k$，使得$A_1\cup B$，…，$A_n\cup B$ 仍然互異$\}$。則原題卽爲$f_n(\mathrm{i})\geq n$，很容易檢查$f_n(1)=n$及$f_n(n-1)=2$。你對$f_n(k)$又會有何猜測呢？