上期徵答問題

優勝名單

7101答對者：

林俊吉 （台中一中）

7102優勝名單：

良好：吳泰良（中興應數）

7103優勝名單：

優良：丘世禎 （高雄中學）

卓世傑 （成功中學）

陳進生 （東港國中）

謝侑龍 （建國中學）

良好：吳泰良 （中興應數）

林文斌 （中興機械）

註：⑵式在非正整數的情況無人答對。

問題詳解

7101 級數問題（林建宏提供）

若 $s>0$，試證 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(1-\frac{1}{ns})(1-\frac{1}{ns-s})\cdots\cdots(1-\frac{1}{s})$ 收斂。

解答：（周雲雄提供）

首先我們注意到原級數並非正項級數，譬如 $0<s<1$ 時，$1-\frac{1}{s}<0$。但是，它差不多是正項級數，因 $s>0$，由阿基米德性質可知存在正整數 c 使得 $cs>1$。令

$$(1)\quad a_n=(1-\frac{1}{ns})(1-\frac{1}{(n-1)s})\cdots(1-\frac{1}{cs}),\quad n\geqslant c$$

則有

$$原級數=\sum_{n=1}^{c-1}\frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{1}{ks})+(\prod_{k=1}^{c-1}(1-\frac{1}{ks}))\cdot\sum_{n=c}^{\infty}a_n/n$$

故原級數收斂若且唯若正項級數

(2) $\prod_{n=c}^{\infty} a_n/n < \infty$.

易見

(3) $\dfrac{a_{n+1}/(n+1)}{a_n/n} = \dfrac{n(n+1)s-n}{(n+1)^2 s}$

$= \dfrac{n^2+(1-s^{-1})n}{n^2+2n+1} \longrightarrow 1$

故比值審斂法（ ratio test ）不適用。然而下列結果成立

定理：設 Σb_n 爲一正項級數 且存在常數 $m, p, q, \cdots$ 使得（ n 相當大時）

(4) $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{n^m + pn^{m-1} + \cdots}{n^m + qn^{m-1} + \cdots}$

則（i） 當 $q-p>1$ 時，$\Sigma b_n < \infty$

（ii） 當 $q-p \leqslant 1$ 時，Σb_n 發散

根據(3)及上述定理，因 $2-(1-s^{-1}) = 1+s^{-1}>1$ ，我們可知(2)成立，然而這不能算是一個很好的作法，假設了太多而學到很少。

讓我們假設

(5) $e^x = 1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots, \quad x \in R$

(6) $\lim\limits_{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln n \right) = r$

其中 $r = 0.5772\cdots$ 被稱做歐拉常數（Euler's constant），$\ln x$ 係 e^x 的反函數。(6)式值得注意。大家皆知調和級數 $\sum_1^{\infty} 1/k$ 係發散，(5)式則清楚地表示 $\sum_1^{n} 1/k$ 成長的速度。關於(5)，(6)之證明可參考任何一本微積分教本。其實我們只需要

(6′) $\sum_1^{n} \dfrac{1}{k} \geqslant \int_1^{n+1} \dfrac{1}{x}\,dx = \ln(n+1) \geqslant \ln n$

前式可由積分法則馬上得到。

在眞正開始證明(2)之前，我們還需要一個輔助公式

(7) $1+x \leqslant e^x, \quad x \in R$

當 $x \geqslant 0$ 時，(7)顯然成立，因爲(5)式右端每一項皆 $\geqslant 0$ 。當 $x \leqslant -1$ 時亦是，因爲 $1+x \leqslant 0 \leqslant e^x$ 。而 $-1 < x < 0$ 時，由(5)

$$e^x = (1+x) + \left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right) + \left(\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}\right) + \cdots$$

上式右端括號內的每一項皆正。故(7)式對任意 $x \in R$ 成立。特別來說

(8) $\ln(1+x) \leqslant x, \quad x > -1$

欲證(2)成立，很明顯地我們須先估計 a_n。由(1)，a_n 係許多項的連乘積，在此種場合我們經常使用的一個方法是：取對數以化乘爲加

(9) $\ln a_n = \sum_{k=c}^{n} \ln\left(1-\dfrac{1}{ks}\right)$ ， 由(8)

$\leqslant \sum_{k=c}^{n} \ln\left(e^{-\frac{1}{ks}}\right)$

$= \dfrac{-1}{s}\left(\sum_c^n \dfrac{1}{k}\right)$ 由(6′)

$\leqslant \dfrac{-1}{s}\left[a + \ln n\right]$

其中 $a = -\sum_1^c k^{-1}$ 。於是

(10) $a_n/n \leqslant e^{-\frac{a}{s}-\frac{1}{s}\ln n}/n$

$= e^{-\frac{a}{s}} \cdot e^{\ln(n)^{s^{-1}}}/n$

$= e^{-\frac{a}{s}}/n^{(1+\frac{1}{s})}$

因爲 $1+\dfrac{1}{s} > 1$ 且 $\Sigma a_n/n$ 係正項級數，故由 p 級數定理及比較收斂法（Comparison test）知(2)式成立，亦即原級數收斂。

現在我們可回過來證明以前所引述的定理(i)。由(4)

(11) $$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{1+pn^{-1}+\cdots}{1+qn^{-1}+\cdots}$$
$$\approx(1+pn^{-1}+\cdots)(1-qn^{-1}\cdots)$$
$$\doteq〔1+(p-q)n^{-1}\cdots〕$$

事實上，不難嚴格地證明存在正整數 c 及常數 $1<a\ (<q-p)$ 使得

(12) $$\frac{b_{n+1}}{b_n}\leqslant 1-an^{-1},\quad n\geqslant c$$

於是

$$b_{n+1}\leqslant b_c\cdot\prod_{k=c}^{n}(1-ak^{-1}),\quad n\geqslant c$$

如同(9)－(10)，可導出

$$b_{n+1}\leqslant A/n^a\qquad n\geqslant c$$

其中 A 係一常數。於是 $\Sigma\, b_n<\infty$。

至於定理(ii)，作法相同。只是爲了使所有的不等式都反向，我們需要

(13) $$\sum_1^n\frac{1}{k}\leqslant 1+\int_1^n\frac{1}{x}\,dx=1+\ln n$$

(14) $$\ln(1-x)\geqslant -x-x^2,\quad 0<x<\frac{1}{2}$$

其實，下列展式

(15) $$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\cdots\qquad |x|<1$$

也可在任何一本微積分教本找到。請比較(5)及(15)。(14)可馬上由(15)導出。

在此我們不詳證定理(ii)。只是希望提醒有興趣的同學特別留心 $q-p=1$ 的情形。此時可能必需先證明，當 n 相當大時

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}\geqslant 1-n^{-1}-an^{-1-\epsilon}$$

其中 $\epsilon>0$，a 係常數。

7102 集合問題(蕭鴻銘、王人傑提供)

設 $S=\{1,2,\cdots,n\}$，若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 爲 S 中 n 個相異子集，試證存在 $x\in S$，使得 $A_1\cup\{x\}$, $A_2\cup\{x\}$, $\cdots$, $A_n\cup\{x\}$ 兩兩相異。

解答：(蕭鴻銘、王人傑提供)

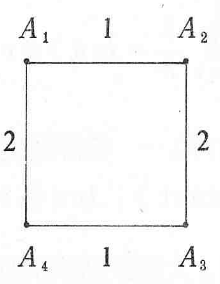
請先看兩個例子：

① $n=4$：

	1	2	3	4
A_1	1	0	1	0
A_2	0	0	1	0
A_3	0	1	1	0
A_4	1	1	1	0

(表 1)

G_1：



(圖 1)

表 1 表示 $A_1=\{1,3\}$，$A_2=\{3\}$，$A_3=\{2,3\}$，$A_4=\{1,2,3\}$

圖 1 表示 $A_1\cup\{1\}=A_2\cup\{1\}$，$A_2\cup\{2\}=A_3\cup\{2\}$，… etc.