點之線性相關，線性無關及其應用

許振榮

在向量代數及高等幾何中我們學了下列事情：

如果 A，B，C，D的位置向量各以$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$表示，則三點 A，B，C 在同一直線上的充要條件為有不全為零的α，β，γ 存在，使

(1) $$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=0\text{，且 }\alpha+\beta+\gamma=0$$

成立。又四點 A，B，C，D在同一平面上的充要條件為有不全為零的α，β，γ，δ 存在使

(2) $$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}+\delta\vec{d}=0\text{，且 }\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$$

成立。

一般而言，我們可得下列定理：

定理1 設（$n+2$）個點A_1，A_2，…，A_{n+2} 的位置向量分別為$\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$,…，$\vec{a}_{n+2}$ 。此時這些（$n+2$）個點在同一n維的平直空間（即被包含於一個n維的平直空間中）的充要條件係有不全為零的（$n+2$）個數μ_1, μ_2,…，μ_{n+2} 存在，使

(3) $$\mu_1\vec{a}_1+\mu_2\vec{a}_2+\cdots+\mu_{n+2}\vec{a}_{n+2}=0\text{，且}\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_{n+2}=0$$

成立。

為了讀者之方便，今記述其證明於下：

定理1之證明 設（$n+1$）個點 A_1，A_2，…，A_{n+1} 決定一個n維的平直空間，故不在任何（$n-1$）維的平直空間中。又設 A_{n+2} 為此n維平直空間中的一點，則$\vec{a}_2-\vec{a}_1$,…，$\vec{a}_{n+1}-\vec{a}_1$ 為線性無關的n個向量。故有n個數 λ_2, λ_3,…，λ_{n+1} 存在使下列關係成立：

(4) $$(\vec{a}_{n+2}-\vec{a}_1)=\lambda_2(\vec{a}_2-\vec{a}_1)+\lambda_3(\vec{a}_3-\vec{a}_1)+\cdots+\lambda_{n+1}(\vec{a}_{n+1}-\vec{a}_1)$$

今置 $\lambda_1=1-\lambda_2-\lambda_3-\cdots-\lambda_{n+1}$，則

(5) $$\vec{a}_{n+2}=(1-\lambda_2-\lambda_3-\cdots-\lambda_{n+1})\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\cdots+\lambda_{n+1}\vec{a}_{n+1}$$
$$=\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\cdots+\lambda_{n+1}\vec{a}_{n+1}$$

且

(6) $$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n+1}=1$$

成立。如果

$$\mu_1=m\lambda_1\ ,\ \mu_2=m\lambda_2\ ,\cdots\cdots,\ \mu_{n+1}=m\lambda_{n+1}\ ,\ m\neq 0$$

成立，則

$$\mu_1+\mu_2+\cdots\mu_{n+1}=m(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n+1})=m$$

成立，故

$$\lambda_1=\frac{1}{m}\mu_1\ ,\ \lambda_2=\frac{1}{m}\mu_2\ ,\cdots\cdots,\ \mu_{n+1}=m\lambda_{n+1}$$

因之，$\vec{a}_{n+2}$ 可表成下列形狀：

(7) $$\vec{a}_{n+2}=\frac{\mu_1\vec{a}_1+\mu_2\vec{a}_2+\cdots+\mu_{n+1}\vec{a}_{n+1}}{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_{n+1}}$$

此時

$$-(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_{n+1})\vec{a}_{n+2}=\mu_1\vec{a}_1+\mu_2\vec{a}_2+\cdots+\mu_{n+1}\vec{a}_{n+1}$$

今置

$$\mu_{n+2}=-(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_{n+1})$$

則下列二式同時成立：

(8) $$\begin{cases}\mu_1\vec{a}_1+\mu_2\vec{a}_2+\cdots+\mu_{n+1}\vec{a}_{n+1}+\mu_{n+2}\vec{a}_{n+2}=0\ ,\\ \mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_{n+1}+\mu_{n+2}=0\ 。\end{cases}$$

此處 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{n+2}$ 不全爲零。故如果 A_1，A_2，$\cdots$，A_{n+2} 在同一 n 維的平直空間中，則有不全爲零的 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{n+2}$ 存在使(8)式成立。

反之，如果有不全爲零的 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{n+2}$ 存在，使(8)式成立。例如 $\mu_{n+2}\neq 0$，則由(8)式得

$$\vec{a}_{n+2}=-\frac{1}{\mu_{n+2}}(\mu_1\vec{a}_1+\mu_2\vec{a}_2+\cdots+\mu_{n+1}\vec{a}_{n+1})。$$

設

$$\lambda_i=\frac{-\mu_i}{\mu_{n+2}}\ ,\quad i=1\ ,\cdots,\ n+1\ ,$$

則 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n+1}=1$，且

$$\vec{a}_{n+2}-\vec{a}_1=(\lambda_1-1)\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\cdots+\lambda_{n+1}\vec{a}_{n+1}。$$

故

$$\vec{a}_{n+2}-\vec{a}_1=(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n+1}-1)\vec{a}_1+\lambda_2(\vec{a}_2-\vec{a}_1)+\cdots\cdots$$
$$+\lambda_{n+1}(\vec{a}_{n+1}-\vec{a}_1)$$
$$=\lambda_2(\vec{a}_2-\vec{a}_1)+\lambda_3(\vec{a}_3-\vec{a}_1)+\cdots+\lambda_{n+1}(\vec{a}_{n+1}-\vec{a}_1)$$

所以 $\vec{a}_{n+2}-\vec{a}_1$ 在 $\{\vec{a}_2-\vec{a}_1\ ,\ \vec{a}_3-\vec{a}_1\ ,\cdots,\ \vec{a}_{n+1}-\vec{a}_1\}$ 所張的線性向量空間中。如果這一組向量爲線性無關，則 $\vec{a}_{n+2}-\vec{a}_1$ 在這個 n 維的向量空間中，故 A_{n+2} 在 A_1，A_2，$\cdots$，A_{n+1} 所決定的 n 維平直空間中。如果上列向量組爲線性相關，則 A_1，A_2，$\cdots$，A_{n+1} 所決定的平直空間的維數比 n 小。故 A_1，A_2，$\cdots$，A_{n+1}，A_{n+2} 在一個維數小於 n 的平直空間中，故必有一個 n 維的

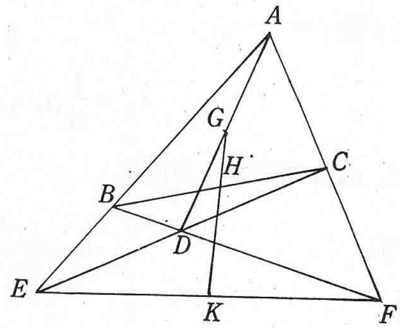
平直空間，他包含所有這些點。

現在讓我們來談談定理 1 的一、兩個應用：

牛頓線（Newton line）定理

定義 完全四邊形的三對角線之中點在同一直線上。此直線稱為**牛頓線**。

定理 如右圖，$ABCD$為完全四邊形，對邊AB，CD之之交點為E，對邊AC，BD之交點為F。AD，BC，EF為完全四邊形之三個對角線。對角線AD，BC，EF上的中點分別以G，H，K表之。則G，H，K在同一直線上



圖一

證明 設點A，B，C，D，E，F，G，H，K之位置向量分別為$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$，$\vec{e}$，$\vec{f}$，$\vec{g}$，$\vec{h}$，$\vec{k}$，則

$$\vec{d}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c}\,,\quad \lambda+\mu+\nu=1\,,$$

$$\vec{e}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\vec{a}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\vec{b}=-\frac{\nu}{\lambda+\mu}\vec{c}+\frac{1}{\lambda+\mu}\vec{d}\,,$$

$$\vec{f}=\frac{\lambda}{\lambda+\nu}\vec{a}+\frac{\nu}{\lambda+\nu}\vec{c}=-\frac{\mu}{\lambda+\nu}\vec{b}+\frac{1}{\lambda+\nu}\vec{d}\,,$$

$$\vec{g}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{d})=\frac{1}{2}[(1+\lambda)\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c}]\,,$$

$$\vec{h}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})\,,$$

$$\vec{k}=\frac{1}{2}(\vec{e}+\vec{f})$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\nu}\right)\vec{a}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\vec{b}+\frac{\nu}{\lambda+\nu}\vec{c}\right]$$

今設
$$l=-1\,,\quad m=-\frac{\mu\nu}{\lambda}\,,\quad n=\frac{(\lambda+\mu)(\lambda+\nu)}{\lambda}\,,$$

則

$$\begin{aligned}
l\vec{g}+m\vec{h}+n\vec{k}&=\frac{1}{2}[-(1+\lambda)\vec{a}-\mu\vec{b}-\nu\vec{c}]\\
&\quad+\frac{1}{2}\left[\qquad -\frac{\mu\nu}{\lambda}\vec{b}-\frac{\mu\nu}{\lambda}\vec{c}\right]\\
&\quad+\frac{1}{2}\left[(\lambda+\nu+\lambda+\mu)\vec{a}+\frac{\mu(\lambda+\nu)}{\lambda}\vec{b}+\frac{\nu(\lambda+\mu)}{\lambda}\vec{c}\right]\\
&=0
\end{aligned}$$

且

$$l+m+n=-1\frac{\mu\nu}{\lambda}+\frac{(\lambda+\mu)(\lambda+\nu)}{\lambda}=\frac{\lambda(-1+\lambda+\mu+\nu)}{\lambda}$$

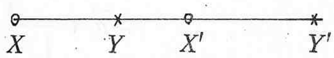
$$=0$$

故依定理 1，三點 G，H，K 在同一直線上。證明完了。

為了次定理的陳述我們先給二個定義：

定義 1　設二個相異的點 X，X' 的位置向量為 $\vec{x}$，$\vec{x}'$。直線 XX' 上的二點 Y，Y' 之位置向量分別為

$$\vec{y}=(1-\lambda)\vec{x}+\lambda\vec{x}',$$
$$\vec{y}'=(1-\lambda')\vec{x}+\lambda'\vec{x}',$$



圖二

則

$$\frac{XY}{YX'}\bigg/\frac{XY'}{Y'X'}=\frac{\lambda}{1-\lambda}\bigg/\frac{\lambda'}{1-\lambda'}$$

稱為這四點 $XX'YY'$ **的複比**。

定義 2　複比等於 1 時四點 $XX'YY'$ 稱為**調和點列**。當這四點為調和點列時 $\lambda'=\dfrac{-\lambda}{1-2\lambda}$。

上述牛頓線定理為擬似（affine）幾何的一定理。在擬似幾何中一線段的兩端點被其中點和此線段所在的直線上的無限遠點分成調和點列。如果在完全四邊形所在的擬似平面和其無限遠直線所成的射影平面上實行（apply）任一射影變換，則完全四邊形之像為一完全四邊形，對角線的像為一對角形，牛頓線及無限遠直線之像各為一直線。這二個線直線與對角線的像直線之交點把對角線線分之二端點之像點分成為調和點列。此因調和點列為在射影幾何中的不變性質之故。因之，牛頓線定理在射影幾何中可陳述如下：

對應於牛頓線定理的射影幾何中定理：設 $ABDC$ 為一完全四邊形。又設點 G,G' 在對角線 AD 上並且（$ADGG'$）為調和點列；H,H' 在對角線 BC 上且（$BCHH'$）為調和點列；K,K' 在對角線 EF 上，且（$EFKK'$）為調和點列，則 G，H，K 在同一直線上的充要條件為 G'，H'，K' 在同一直線上。

用向量代數的證明：設 G'，H'，K' 之位置向量分別為 $\vec{g}'$，$\vec{h}'$，$\vec{k}'$，其他各點的位置向量是如上述的。此時有 α，β，γ 存在使

$$\vec{g}=(1-\alpha)\vec{a}+\alpha(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c})$$
$$=\vec{a}+\alpha[\mu(\vec{b}-\vec{a})+\nu(\vec{c}-\vec{a})],$$
$$\vec{h}=(1-\beta)\vec{b}+\beta\vec{c}$$
$$=\vec{a}+[(1-\beta)(\vec{b}-\vec{a})+\beta(\vec{c}-\vec{a})],$$

$$\vec{k}=(1-\gamma)\left[\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\vec{a}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\vec{b}\right]+\gamma\left[\frac{\lambda}{\lambda+\nu}\vec{a}+\frac{\nu}{\lambda+\nu}\vec{c}\right]$$

$$=\vec{a}+\left[(1-\gamma)\frac{\mu}{\lambda+\mu}(\vec{b}-\vec{a})+\gamma\frac{\nu}{\lambda+\nu}(\vec{c}-\vec{a})\right],$$

成立。此時我們又得

$$\vec{g}'=\frac{1}{1-2\alpha}\left[(1-\alpha)\vec{a}-\alpha(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c})\right]$$

$$=\vec{a}-\frac{\alpha}{1-2\alpha}\left[\mu(\vec{b}-\vec{a})+\nu(\vec{c}-\vec{a})\right],$$

$$\vec{h}'=\frac{1}{1-2\beta}\left[(1-\beta)\vec{b}-\beta\vec{c}\right]$$

$$=\vec{a}+\frac{1}{1-2\beta}\left[(1-\beta)(\vec{b}-\vec{a})-\beta(\vec{c}-\vec{a})\right],$$

$$\vec{k}'=\frac{1}{1-2\gamma}\left[(1-\gamma)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\vec{a}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\vec{b}\right)-\gamma\left(\frac{\lambda}{\lambda+\nu}\vec{a}+\frac{\nu}{\lambda+\nu}\vec{c}\right)\right]$$

$$=\vec{a}+\left[(1-\gamma)\frac{\mu}{\lambda+\mu}(\vec{b}-\vec{a})-\gamma\frac{\nu}{\lambda+\nu}(\vec{c}-\vec{a})\right]$$

現在，依定理 1，三點 G，H，K爲共線之條件爲有不全爲零的三數 l，m，n存在使

$$l\vec{g}+m\vec{h}+n\vec{k}=0 \quad 且 \quad l+m+n=0$$

成立。因

$$\begin{aligned}&l\vec{g}+m\vec{h}+n\vec{k}\\&=l\vec{a}+l\alpha\left[\mu(\vec{b}-\vec{a})+\nu(\vec{c}-\vec{a})\right]\\&\quad+m\vec{b}+m\left[(1-\beta)(\vec{b}-\vec{a})+\beta(\vec{c}-\vec{a})\right]\\&\quad+n\vec{c}+n\left[(1-\gamma)\frac{\mu}{\lambda+\mu}(\vec{b}-\vec{a})+\gamma\frac{\nu}{\lambda+\nu}(\vec{c}-\vec{a})\right]\end{aligned}$$

故G，H，K爲共線之條件係有不全爲零的三數 l，m，n存在使

$$(9)\quad\begin{cases}l+m+n=0\\ l\alpha\left[\mu(\vec{b}-\vec{a})+\nu(\vec{c}-\vec{a})\right]+m\left[(1-\beta)(\vec{b}-\vec{a})+\beta(\vec{c}-\vec{a})\right]\\ +n\left[(1-\gamma)\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}(\vec{b}-\vec{a})+\gamma\dfrac{\nu}{\lambda+\nu}(\vec{c}-\vec{a})\right]=0\end{cases}$$

成立。同理三點G'，H'，K' 爲共線之條件係有不全爲零的三數 l'，m'，n' 存在使

$$(10)\quad\begin{cases}l'+m'+n'=0\\ -l'\left(\dfrac{\alpha}{1-2\alpha}\right)\left[\mu(\vec{b}-\vec{a})+\nu(\vec{c}-\vec{a})\right]+m'\left(\dfrac{1}{1-2\beta}\right)\\ \left[(1-\beta)(\vec{b}-\vec{a})-\beta(\vec{c}-\vec{a})\right]\\ +n'\left(\dfrac{1}{1-2\gamma}\right)\left[(1-\gamma)\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}(\vec{b}-\vec{a})-\gamma\dfrac{\nu}{\lambda+\nu}(\vec{c}-\vec{a})\right]=0\end{cases}$$

成立。現在置

$$\alpha'=\frac{-\alpha}{1-2\alpha},$$

則

$$1-\alpha' = \frac{1-\alpha}{1-2\alpha}$$

故⑽之二式可寫成下列形狀：

$$(10')\begin{cases} l' + m' + n' = 0 \\ l'\alpha'\left[\mu(\vec{b}-\vec{a})+\nu(\vec{c}-\vec{a})\right]+m'\left[(1-\beta')(\vec{b}-\vec{a})+\beta'(\vec{c}-\vec{a})\right] \\ +n'\left[(1-\gamma')\frac{\mu}{\lambda+\mu}(\vec{b}-\vec{a})+\gamma'\frac{\nu}{\lambda+\nu}(\vec{c}-\vec{a})\right]=0\ . \end{cases}$$

設 G，H，K 三點爲共線，則有不全爲零的 l，m，n 存在使⑼之二式成立。此時當然亦有不全爲零的 l', m'，n' 存在使 $(10')$ 之二式成立。故 G'，H'，K' 亦爲共線。卽如果 G，H，K 爲共線，則 G', H', K' 亦爲共線。同理，如果 G', H', K' 爲共線，則 G，H，K 亦爲共線。證明完了。

現在我們也想指出下列事情。此事情大家都不大注意。但是其實是很有用的：

如果三點 A，B，C 不在同一直線上，且對於三數 α，β，γ 下列二式同時成立：

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=0\ , \qquad \alpha+\beta+\gamma=0\ ,$$

則 $\alpha=\beta=\gamma=0$ 。

如果四點 A，B，C，D 不在同一平面上，且對於四數 α，β，γ，δ 下列二式同時成立：

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}+\delta\vec{d}=0\ , \qquad \alpha+\beta+\gamma+\delta=0\ ,$$

則 $\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$ 。

一般而言，我們可證明下列定理：

定理 2 設 $(n+2)$ 個點 A_1，A_2，⋯，A_{n+2} 不在同一個 n 維的平直空間中，而對於 $(n+2)$ 個數 α_1, α_2, ⋯, α_{n+2} 下列二式同時成立：

$$\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\cdots\cdots+\alpha_{n+2}\vec{a}_{n+2}=0\ ,$$
$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_{n+2}=0\ ,$$

則 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots\cdots=\alpha_{n+2}=0$ 。

在定理 1 及定理 2 中所述的情形與向量空間中向量的線性相關和線性無關之情形極其相似。因爲對於 n 個向量 $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ⋯，$\vec{a}_n$, 他們爲線性相關的條件爲有不全爲零的 n 數 α_1, α_2, ⋯，α_n 存在使

$$\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}+\cdots\cdots+\alpha_n\vec{a}_n=0$$

成立。又如果 n 個向量 $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ⋯，$\vec{a}_n$ 爲線性無關而上式成立，則 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$ 必須成立之故。

因之，我們可把在同一個 n 維平直空間中的 $(n+2)$ 個點 A_1，A_2，⋯，A_{n+2} 稱爲線性相關，而不在同一個 n 維平直空間中的 $(n+2)$ 個點稱爲**線性無關**。

定理 2 之證明　假設座標系的原點爲 0，則 $\overrightarrow{0A_i}=\vec{a}_i$，$i=1,2,\cdots,n+2$。由假定

(11) $$\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\cdots\cdots+\alpha_{n+1}\vec{a}_{n+1}+\alpha_{n+2}\vec{a}_{n+2}=0$$

次因

(12) $$\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_{n+2}=0$$

可得 $$\alpha_1\vec{a}_{n+2}+\alpha_2\vec{a}_{n+2}+\cdots\cdots+\alpha_{n+1}\vec{a}_{n+1}+\alpha_{n+2}\vec{a}_{n+2}=0$$

把(11)和(12)兩式邊邊相減可得

$$\alpha_1(\vec{a}_1-\vec{a}_{n+2})+\alpha_2(\vec{a}_2-\vec{a}_{n+2})+\cdots\cdots+\alpha_{n+1}(\vec{a}_{n+1}-\vec{a}_{n+2})=0$$

即 $$\alpha_1\overrightarrow{A_{n+2}A_1}+\alpha_2\overrightarrow{A_{n+2}A_2}+\cdots\cdots+\alpha_{n+1}\overrightarrow{A_{n+2}A_{n+1}}=0$$

因爲 $A_1,\cdots\cdots,A_{n+1},A_{n+2}$ 不在同一個 n 維的平直空間中，$\overrightarrow{A_{n+2}A_1}$，$\overrightarrow{A_{n+2}A_2}$，…，$\overrightarrow{A_{n+2}A_{n+1}}$ 不在同一個 n 維的向量空間中。即 $\{\overrightarrow{A_{n+2}A_1},\overrightarrow{A_{n+2}A_2},\cdots,\overrightarrow{A_{n+2}A_{n+1}}\}$ 爲線性無關。因之 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots\cdots=\alpha_{n+1}=0$。因爲(12)式成立，我們又可得 $\alpha_{n+2}=0$。證明完了。

以前在「孟氏定理及其一推廣」一文中，我們用了質量中心的概念來討論孟氏定理及其擴張，但是那時候的證明當然不是最簡單又最好的。現在我們想指出：利用上述的點之線性相關和線性無關，我們可得孟氏定理及其擴張的一種很好的證明於下：

孟氏定理　設三角形 $A_1A_2A_3$ 之三邊 A_1A_2，A_2A_3，A_3A_1 上（或其延長上）各有不是三角形頂點的點 B_1，B_2，B_3，則 B_1，B_2，B_3 爲共線之充要條件爲

(13) $$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\frac{A_3B_3}{B_3A_1}=-1$$

之成立。

孟氏定理在高維的情形如下：

設四點 A_1，A_2，A_3，A_4 不在一平面上，點 B_1，B_2，B_3，B_4 分別在線段 A_1A_2，A_2A_3，A_3A_4，A_4A_1 上（或其延長上），並皆與 A_1，A_2，A_3，A_4 相異，則 B_1，B_2，B_3，B_4 在同一平面上的充要條件爲下式之成立：

(14) $$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\frac{A_3B_3}{B_3A_4}\cdot\frac{A_4B_4}{B_4A_1}=1$$

最一般的情形如下：

擴張的孟氏定理　設 $(n+2)$ 個點 A_1，A_2，…，A_{n+2} 不在同一個 n 維的平直空間中，點 B_1，B_2，…，B_{n+2} 分別在線段 A_1A_2，A_2A_3，…，$A_{n+2}A_1$ 上（或其延長上），且各與 A_1，…，A_{n+2} 相異，則 B_1，B_2，…，B_{n+2} 在同一個 n 維的平直空間中的充要條件爲下式之成立：

(15) $$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\cdots\cdot\frac{A_{n+2}B_{n+2}}{B_{n+2}A_1}=(-1)^{n+2}=(-1)^n$$

擴張的孟氏定理之證明　設

(16) $$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}=\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1},\quad \frac{A_2B_2}{B_2A_3}=\frac{\alpha_2}{1-\alpha_2},\cdots,\frac{A_{n+2}B_{n+2}}{B_{n+2}A_1}=\frac{\alpha_{n+2}}{1-\alpha_{n+2}}$$

如上，假設A_1，A_2，…，A_{n+2} 之位置向量分別爲$\vec{a}_1$，$\vec{a}_2$，…，$\vec{a}_{n+2}$，且點B_1，B_2，…，B_{n+2}之位置向量分別爲$\vec{b}_1$，$\vec{b}_2$，…，$\vec{b}_{n+2}$。此時由(16)可得

(17) $$\vec{b}_1=(1-\alpha_1)\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2,\ \vec{b}_2=(1-\alpha_2)\vec{a}_2+\alpha_2\vec{a}_3,\cdots,$$
$$\vec{b}_{n+2}=(1-\alpha_{n+2})\vec{a}_{n+2}+\alpha_{n+2}\vec{a}_1。$$

我們先假設B_1，B_2，…，B_{n+2} 在同一個n維的平直空間中，則依定理1，有不全爲零的β_1，β_2，…，β_{n+2}存在使下列二式

(18) $$\begin{cases}\beta_1\vec{b}_1+\beta_2\vec{b}_2+\cdots+\beta_{n+2}\vec{b}_{n+2}=0, \\ \beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{n+2}=0\end{cases}$$

同時成立。代入(17)式於(18)之第一式中，則得

(19) $$[\beta_1(1-\alpha_1)+\beta_{n+2}\alpha_{n+2}]\vec{a}_1+[\beta_2(1-\alpha_2)+\beta_1\alpha_1]\vec{a}_2+\cdots$$
$$+[\beta_{n+2}(1-\alpha_{n+2})+\beta_{n+1}\alpha_{n+1}]\vec{a}_{n+2}=0$$

此時，依(18)之第二式，(19)式的諸係數的和爲零，即

(20) $$[\beta_1(1-\alpha_1)+\beta_{n+2}\alpha_{n+2}]+[\beta_2(1-\alpha_2)+\beta_1\alpha_1]+\cdots$$
$$+[\beta_{n+2}(1-\alpha_{n+2})+\beta_{n+1}\alpha_{n+1}]$$
$$=\sum_{i=1}^{n+2}\beta_i(1-\alpha_i)+\sum_{i=1}^{n+2}\beta_i\alpha_i=\sum_{i=1}^{n+2}\beta_i=0$$

因爲A_1，A_2，…，A_{n+2}不在同一個n維平直空間中，依定理2可得

(21) $$\beta_1(1-\alpha_1)+\beta_{n+2}\alpha_{n+2}=\beta_2(1-\alpha_2)+\beta_1\alpha_1$$
$$=\cdots\cdots=\beta_{n+2}(1-\alpha_{n+2})+\beta_{n+1}\alpha_{n+1}=0$$

由此式(21)，可得（因爲各B_i與各A_j相異，$\beta_i\neq 0$，$i=1$，…，$n+2$）

(22) $$\frac{\alpha_{n+2}}{1-\alpha_1}=-\frac{\beta_1}{\beta_{n+2}},\ \frac{\alpha_1}{1-\alpha_2}=-\frac{\beta_2}{\beta_1},\cdots,\frac{\alpha_n}{1-\alpha_{n+1}}=-\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n},\ \frac{\alpha_{n+1}}{1-\alpha_{n+2}}=-\frac{\beta_{n+2}}{\beta_{n+1}}$$

因之

(23) $$\frac{\alpha_{n+2}}{1-\alpha_1}\cdot\frac{\alpha_1}{1-\alpha_2}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{\alpha_n}{1-\alpha_{n+1}}\cdot\frac{\alpha_{n+1}}{1-\alpha_{n+2}}$$
$$=\left(-\frac{\beta_1}{\beta_{n+2}}\right)\left(-\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)\cdots\cdots\left(-\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}\right)\left(-\frac{\beta_{n+2}}{\beta_{n+1}}\right)$$
$$=(-1)^{n+2}$$

即

(24) $$\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\cdot\frac{\alpha_2}{1-\alpha_2}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{\alpha_n}{1-\alpha_n}\cdot\frac{\alpha_{n+1}}{1-\alpha_{n+1}}\cdot\frac{\alpha_{n+2}}{1-\alpha_{n+2}}=(-1)^n$$

此式可寫成下列形狀：

(25) $$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{A_{n+2}B_{n+2}}{B_{n+2}A_1}=(-1)^n$$

反之，假設(25)式成立。因爲我們假設(16)式，由(25)式可得(24)式。故(23)式的最左邊等於$(-1)^n$。因之，可適當地選β_1，β_{n+2}後依次選β_2，β_3，…，β_{n+1} 使(22)之第一，第二，…，至第$(n+1)$式成立。此時由(23)式可得(22)之最後式。即可適當地選$(n+2)$個數β_1，β_2，…，β_{n+2} 使(22)之所

有式均成立。因之(21)式成立。所以(19)式亦成立。其次由(20)式可得(18)之第二式。再由(17)式和(19)式可得(18)之第一式。因爲(18)之二式均成立，故 $B_1, B_2, \cdots, B_{n+2}$ 在一個 n 維的平直空間中。證明完了。

孟氏定理（ $n=1$ 時）的逆命題亦可以證明如下：

設直線 B_1B_2 與直線 A_1A_3 之交點爲 B_3' ，則由孟氏定理可得：

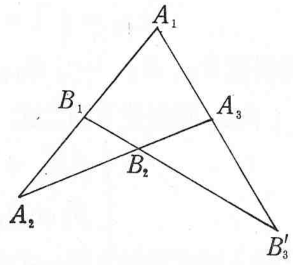
$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\frac{A_3B_3'}{B_3'A_1}=-1$$

另一方面，由孟氏定理的逆命題之假定可得

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\frac{A_3B_3}{B_3A_1}=-1$$

由此二式，可得

$$\frac{A_3B_3'}{B_3'A_1}=\frac{A_3B_3}{B_3A_1}$$



圖三

故得

$$\frac{A_3B_3'}{A_3B_3'+B_3'A_1}=\frac{A_3B_3}{A_3B_3+B_3A_1}\quad 即\quad \frac{A_3B_3'}{A_3A_1}=\frac{A_3B_3}{A_3A_1}$$

因之，可得

$$A_3B_3'=A_3B_3\quad 即\quad B_3'=B_3$$

所以，B_1，B_2，B_3 三點爲共線。

在一般的 n 時，如果把 $B_1, B_2, \cdots, B_{n+1}$ 所決定的 n 維平直空間與直線 A_1A_{n+2} 之交點以 B_{n+2}' 表之，則爲證明逆命題之成立，與上述 $n=1$ 時的證明相同地可證明：$A_{n+2}B_{n+2}'=A_{n+2}B_{n+2}$。因之，$B_{n+2}'=B_{n+2}$。如此可證明 $B_1, B_2, \cdots, B_{n+2}$ 在同一個 n 維的平直空間中。

在上述的孟氏定理（ $n=1$ 時）的逆命題的證明中，我們利用了「直線 B_1B_2 與直線 A_1A_3 相交」這一命題。但是，是否此命題爲眞確？對於此問題我們可以證明其眞確性如下：

假設直線 B_1B_2 與直線 A_1A_3 平行（即不相交），則

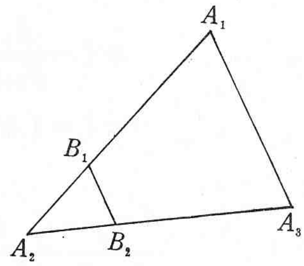
$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}=\frac{A_3B_2}{B_2A_2}$$

故

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}=1$$

因之，由孟氏定理的逆命題之假定，可得

$$\frac{A_3B_3}{B_3A_1}=-1$$



圖四

此爲不可能。故 B_1B_2 與 A_1A_3 相交。

此種初等幾何的證明對於孟氏定理在高維時的擴張中要證明其逆命題之成立時不容易應用之。例如，對於 $n=2$ 時，不容易用初幾何的方法來證明：B_1，B_2，B_3 三點所決定的平面與直線

A_1A_4 相交。但是，在孟氏定理（即 $n=1$ 時）的逆命辭之證明中,如果以解析的方法來證明「直線 B_1B_2 與直線 A_1A_3 相交」，則其方法可擴張至高維的情形。現在我們先來做 $n=1$ 時的解析的證明於下：

要證明：「直線 B_1B_2 與直線 A_1A_3 相交」，我們僅要證明：「$\{\overrightarrow{B_1B_2}, \overrightarrow{A_1A_3}\}$ 爲線性無關」即可。即證明：

$$\lambda_1(\vec{a}_3-\vec{a}_1)+\lambda_2(\vec{b}_2-\vec{b}_1)=0$$

必導出 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 之結果。因爲 $\vec{b}_1=(1-\alpha_1)\vec{a}_1+\alpha_1\vec{a}_2$，$\vec{b}_2=(1-\alpha_2)\vec{a}_2+\alpha_2\vec{a}_3$ 故得

$$\lambda_1(\vec{a}_3-\vec{a}_1)+\lambda_2[(1-\alpha_2)\vec{a}_2+\alpha_2\vec{a}_3-(1-\alpha_1)\vec{a}_1-\alpha_1\vec{a}_2]=0$$

即

$$-[\lambda_1+\lambda_2(1-\alpha_1)]\vec{a}_1+\lambda_2(1-\alpha_2-\alpha_1)\vec{a}_2+(\lambda_1+\lambda_2\alpha_2)\vec{a}_3=0$$

此式諸係數的和爲零，即

$$-\lambda_1-\lambda_2(1-\alpha_1)+\lambda_2(1-\alpha_1)-\lambda_2\alpha_2+\lambda_1+\lambda_2\alpha_2=0$$

因 A_1，A_2，A_3 不在一直線上，依定理 2 可得

$$\begin{cases}-\lambda_1-(1-\alpha_1)\lambda_2=0, \\ (1-\alpha_2-\alpha_1)\lambda_2=0, \\ \lambda_1+\alpha_2\lambda_2=0。\end{cases}$$

爲了解第一，第二方程式所成的方程組之目的，我們來考慮下列行列式：

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}-1 & -(1-\alpha_1) \\ 0 & 1-\alpha_2-\alpha_1\end{vmatrix}=-(1-\alpha_1-\alpha_2)$$
$$=-[(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)-\alpha_1\alpha_2]$$

如果 $\Delta_2=0$，則

$$\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\cdot\frac{\alpha_2}{1-\alpha_2}=1$$

故由逆命題的假定可得

$$\frac{\alpha_3}{1-\alpha_3}=-1$$

此爲不可能。故 $\Delta_2\neq0$。因之，上列方程式組的解爲 $\lambda_1=\lambda_2=0$。即 $\{\overrightarrow{B_1B_2}, \overrightarrow{A_1A_3}\}$ 爲線性無關。故直線 B_1B_2 與直線 A_1A_3 相交。

對於 $n=2$ 的情形，我們須要證明：「$\{\overrightarrow{B_1B_2}, \overrightarrow{B_2B_3}, \overrightarrow{A_1A_4}\}$ 爲線性無關。即要證明

$$\lambda_1(\vec{a}_4-\vec{a}_1)+\lambda_2(\vec{b}_2-\vec{b}_1)+\lambda_3(\vec{b}_3-\vec{b}_2)=0$$

必導出 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$。此式可寫成下列形狀：

$$\begin{aligned}&\lambda_1(\vec{a}_4-\vec{a}_1)+\lambda_2[(1-\alpha_2)\vec{a}_2+\alpha_2\vec{a}_3-(1-\alpha_1)\vec{a}_1-\alpha_1\vec{a}_2]\\&+\lambda_3[(1-\alpha_3)\vec{a}_3+\alpha_3\vec{a}_4-(1-\alpha_2)\vec{a}_2-\alpha_2\vec{a}_3]\\&=0\end{aligned}$$

故與 $n=1$ 之情形的討論相同地，可得

$$\begin{cases} -\lambda_1-\lambda_2(1-\alpha_1) & =0\ , \\ \qquad \lambda_2(1-\alpha_2-\alpha_1)-\lambda_3(1-\alpha_2) & =0\ , \\ \qquad \lambda_2\alpha \qquad\qquad +\lambda_3(1-\alpha_3-\alpha_2) & =0\ , \\ \lambda_1 \qquad\qquad\qquad +\lambda_3\alpha_3 & =0\ 。\end{cases}$$

此時

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} -1 & -(1-\alpha_1) & 0 \\ 0 & 1-\alpha_2-\alpha_1 & -(1-\alpha_2) \\ 0 & \alpha_2 & 1-\alpha_3-\alpha_2 \end{vmatrix}$$

將第二列和第三列加於第一列可得

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} -1 & 0 & -\alpha_3 \\ 0 & 1-\alpha_2-\alpha_1 & -(1-\alpha_2) \\ 0 & \alpha_2 & 1-\alpha_3-\alpha_2 \end{vmatrix}$$

其次，將第三列加於第二列可得

$$\begin{aligned}\Delta_3&=\begin{vmatrix} -1 & 0 & -\alpha_3 \\ 0 & 1-\alpha_1 & -\alpha_3 \\ 0 & \alpha_2 & 1-\alpha_3-\alpha_2 \end{vmatrix}\\ &=-\{(1-\alpha_1)(1-\alpha_3-\alpha_2)+\alpha_2\alpha_3\}\\ &=-\{(1-\alpha_1)[(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)-\alpha_2\alpha_3]+\alpha_2\alpha_3\}\\ &=-\{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)+\alpha_1\alpha_2\alpha_3\}\end{aligned}$$

所以，如果 $\Delta_3=0$，則

$$\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\cdot\frac{\alpha_2}{1-\alpha_2}\cdot\frac{\alpha_3}{1-\alpha_3}=-1$$

故，由逆命題之假定，又得

$$\frac{\alpha_4}{1-\alpha_4}=-1$$

此爲不可能。故 $\Delta_3\neq 0$。因之 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$。

對於一般的情形，要證明 $B_1, B_2, \cdots, B_{n+1}$ 所決定的 n 維平直空間與直線 A_1A_{n+2} 相交，我們僅要證明：$\{\vec{a}_{n+2}-\vec{a}_1, \vec{b}_2-\vec{b}_1, \vec{b}_3-\vec{b}_2, \cdots, \vec{b}_{n+1}-\vec{b}_n\}$ 爲線性無關。即要證明：

(26)　$$\lambda_1(\vec{a}_{n+2}-\vec{a}_1)+\lambda_2(\vec{b}_2-\vec{b}_1)+\lambda_3(\vec{b}_3-\vec{b}_2)+\cdots+\lambda_{n+1}(\vec{b}_{n+1}-\vec{b}_n)=0$$

必導出

(27)　$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\cdots\cdots=\lambda_{n+1}=0$$

由(17)式和(26)式可寫成下列形狀

(28)　$$\begin{aligned}&\lambda_1(\vec{a}_{n+2}-\vec{a}_1)+\lambda_2[\alpha_2\vec{a}_3+(1-\alpha_2-\alpha_1)\vec{a}_2-(1-\alpha_1)\vec{a}_1]\\ &+\lambda_3[\alpha_3\vec{a}_4+(1-\alpha_3-\alpha_2)\vec{a}_3-(1-\alpha_2)\vec{a}_2]\\ &+\lambda_4[\alpha_4\vec{a}_5+(1-\alpha_4-\alpha_3)\vec{a}_4-(1-\alpha_3)\vec{a}_3]\\ &+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+\lambda_n[\alpha_n\vec{a}_{n+1}+(1-\alpha_n-\alpha_{n-1})\vec{a}_n-(1-\alpha_{n-1})\vec{a}_{n-1}]\end{aligned}$$

$$+\lambda_{n+1}\left[\alpha_{n+1}\vec{a}_{n+2}+(1-\alpha_{n+1}-\alpha_n)\vec{a}_{n+1}-(1-\alpha_n)\vec{a}_n\right]$$
$$=0$$

即

$$\begin{aligned}
(29)\qquad & \left[-\lambda_1-\lambda_2(1-\alpha_1)\right]\vec{a}_1\\
& +\left[\lambda_2(1-\alpha_2-\alpha_1)-\lambda_3(1-\alpha_2)\right]\vec{a}_2\\
& +\left[\lambda_2\alpha_2+\lambda_3(1-\alpha_3-\alpha_2)-\lambda_4(1-\alpha_3)\right]\vec{a}_3\\
& +\left[\lambda_3\alpha_3+\lambda_4(1-\alpha_4-\alpha_3)-\lambda_5(1-\alpha_4)\right]\vec{a}_4\\
& +\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
& +\left[\lambda_{n-2}\alpha_{n-2}+\lambda_{n-1}(1-\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2})-\lambda_n(1-\alpha_{n-1})\right]\vec{a}_{n-1}\\
& +\left[\lambda_{n-1}\alpha_{n-1}+\lambda_n(1-\alpha_n-\alpha_{n-1})-\lambda_{n+1}(1-\alpha_n)\right]\vec{a}_n\\
& +\left[\lambda_n\alpha_n+\lambda_{n+1}(1-\alpha_{n+1}-\alpha_n)\right]\vec{a}_{n+1}\\
& +\left[\lambda_1+\lambda_{n+1}\alpha_{n+1}\right]\vec{a}_{n+2}\\
& =0
\end{aligned}$$

(29)式的諸係數之和為(28)式的諸係數之和，故為

$$\lambda_1-\lambda_1+\sum_{i=2}^{n+1}\lambda_i\alpha_i+\sum_{i=2}^{n+1}\lambda_i(1-\alpha_i-\alpha_{i-1})-\sum_{i=2}^{n+2}\lambda_i(1-\alpha_{i-1})=0$$

因為A_1，A_2，…，A_{n+2}不在同一個n維的平直空間中，依定理2可得(29)式的各係數均為零。即

$$\left\{\begin{aligned}
& -\lambda_1-\lambda_2(1-\alpha_1)=0\\
& \lambda_2(1-\alpha_2-\alpha_1)-\lambda_3(1-\alpha_2)=0\\
& \lambda_2\alpha_2+\lambda_3(1-\alpha_3-\alpha_2)-\lambda_4(1-\alpha_3)=0\\
& \lambda_3\alpha_3+\lambda_4(1-\alpha_4-\alpha_3)-\lambda_5(1-\alpha_4)=0\\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
& \lambda_{n-2}\alpha_{n-2}+\lambda_{n-1}(1-\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2})-\lambda_n(1-\alpha_{n-1})=0\\
& \lambda_{n-1}\alpha_{n-1}+\lambda_n(1-\alpha_n-\alpha_{n-1})-\lambda_{n+1}(1-\alpha_n)=0\\
& \lambda_n\alpha_n+\lambda_{n+1}(1-\alpha_{n+1}-\alpha_n)=0\\
& \lambda_1+\lambda_{n+1}\alpha_{n+1}=0
\end{aligned}\right.$$

我們希望證明此方程組的解為(27)式，即為$\lambda_1=\lambda_2=\cdots\cdots=\lambda_{n+1}=0$。為此目的，我們僅要證明下列行列式$\Delta_{n+1}\neq 0$：

$$(31)\quad \Delta_{n+1}=\begin{vmatrix}
-1 & -(1-\alpha_1) & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0\\
0 & 1-\alpha_2-\alpha_1 & -(1-\alpha_2) & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0\\
0 & \alpha_2 & 1-\alpha_3-\alpha_2 & -(1-\alpha_3) & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \alpha_3 & 1-\alpha_4-\alpha_3 & -(1-\alpha_4) & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \alpha_4 & 1-\alpha_5-\alpha_4 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_5 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & -(1-\alpha_{n+2}) & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 1-\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2} & -(1-\alpha_{n-1}) & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & \alpha_{n-1} & 1-\alpha_n-\alpha_{n-1} & -(1-\alpha_n)\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & \alpha_n & 1-\alpha_{n+1}-\alpha_n
\end{vmatrix}$$

為了證明 $\Delta_{n+1} \neq 0$，我們將以數學歸納法證明：

$$(32)\qquad \Delta_{n+1} = -\left[(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)\cdots(1-\alpha_{n+1}) + (-1)^n \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n+1}\right]$$

我們已經證明了，當 $n=1$ 時與 $n=2$ 時

$$\Delta_2 = -\left[(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) + (-1)^{2-1}\alpha_1\alpha_2\right]$$

$$(33)\qquad \Delta_3 = -\begin{vmatrix} 1-\alpha_2-\alpha_1 & -(1-\alpha_2) \\ \alpha_2 & 1-\alpha_3-\alpha_2 \end{vmatrix}$$

$$= -\left[(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3) + (-1)^{3-1}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\right]$$

現在假設對於 Δ_n，(32)式成立。若在 Δ_n 中將 α_i 改成 α_{i+1}，$i=1,2,\cdots,n$ 時所得的行列式以 $\overline{\Delta}_n$ 表之，則依此歸納法假設可得：

$$(34)\qquad \overline{\Delta}_n = \begin{vmatrix}
-1 & -(1-\alpha_2) & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1-\alpha_3-\alpha_2 & -(1-\alpha_3) & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & \alpha_3 & 1-\alpha_4-\alpha_3 & -(1-\alpha_4) & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \alpha_4 & 1-\alpha_5-\alpha_4 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \alpha_5 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & -(1-\alpha_{n-2}) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 1-\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2} & -(1-\alpha_{n-1}) & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & \alpha_{n-1} & 1-\alpha_n-\alpha_{n-1} & -(1-\alpha_n) \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & \alpha_n & 1-\alpha_{n+1}-\alpha_n
\end{vmatrix}$$

$$= \left[(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)\cdots\cdots(1-\alpha_{n+1}) + (-1)^{n-1}\alpha_2\alpha_3\cdots\cdots\alpha_{n+1}\right]$$

現在，如果將 Δ_{n+1} 關於第一行展開，則得

$$(35)\qquad \Delta_{n+1} = -\begin{vmatrix}
1-\alpha_2-\alpha_1 & -(1-\alpha_2) & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0 \\
\alpha_2 & 1-\alpha_3-\alpha_2 & -(1-\alpha_3) & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & \alpha_3 & 1-\alpha_4-\alpha_3 & -(1-\alpha_4) & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \alpha_4 & 1-\alpha_5-\alpha_4 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \alpha_5 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & -(1-\alpha_{n-2}) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 1-\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2} & -(1-\alpha_{n-1}) & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & \alpha_{n-1} & 1-\alpha_n-\alpha_{n-1} & -(1-\alpha_n) \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & \alpha_n & 1-\alpha_{n+1}-\alpha_n
\end{vmatrix}$$

把此行列式的第二，第三，…，第 n 列均加於第一列可得下列行列式（因為在第二行，第三行，…，第（$n-1$）行各行上的諸元素之和均為零）：

$$(36)\quad \Delta_{n+1}=-\begin{vmatrix} 1-\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & -\alpha_{n+1} \\ \alpha_2 & 1-\alpha_3-\alpha_2 & -(1-\alpha_3) & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 1-\alpha_4-\alpha_3 & -(1-\alpha_4) & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_4 & 1-\alpha_5-\alpha_4 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_5 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & -(1-\alpha_{n-2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 1-\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2} & -(1-\alpha_{n-1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & \alpha_{n-1} & 1-\alpha_n-\alpha_{n-1} & -(1-\alpha_n) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & \alpha_n & 1-\alpha_{n+1}-\alpha_n \end{vmatrix}$$

把此行列式關於第一列展開可得

$$(37)\quad \Delta_{n+1}=-(1-\alpha_1)\overline{\Delta}_n+(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} \alpha_2 & & * \\ & \alpha_3 & \\ \bigcirc & & \alpha_n \end{vmatrix}$$

由歸納法之假定(34)，可得

$$\begin{aligned}(38)\quad \Delta_{n+1}&=-(1-\alpha_1)[(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)\cdots(1-\alpha_{n+1})\\ &\quad+(-1)^{n-1}\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_{n+1}]-(-1)^n\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_{n+1}\\ &=-[(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)\cdots(1-\alpha_{n+1})\\ &\quad-(-1)^n\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_{n+1}+(-1)^n\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n+1}\\ &\quad+(-1)^n\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_{n+1}]\\ &=-[(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)\cdots(1-\alpha_{n+1})\\ &\quad+(-1)^n\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n+1}]\end{aligned}$$

現在，如果 $\Delta_{n+1}=0$ ，則得

$$(39)\quad \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\cdot\frac{\alpha_2}{1-\alpha_2}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{\alpha_{n+1}}{1-\alpha_{n+1}}=-(-1)^n$$

另一方面，由孟氏定理的擴張的逆命題的假定

$$\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\cdot\frac{\alpha_2}{1-\alpha_2}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{\alpha_{n+1}}{1-\alpha_{n+1}}\cdot\frac{\alpha_{n+2}}{1-\alpha_{n+2}}=(-1)^n$$

成立，故從(39)及此式可得

$$(40)\quad \frac{\alpha_{n+2}}{1-\alpha_{n+2}}=-1$$

此爲不可能。故 $\Delta_{n+1}\neq 0$ 。

—本文作者為本所研究員—