（2. 王敦正來函）

編輯先生：

請問

1. $T_{(k)}$ 表 k 的正因數之個數， $S_{(k)}$ 表 k 之正因數總和，則

$$\sum_{k=1}^{n} T_{(k)} = \left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{n}\right]$$

$$\sum_{k=1}^{n} S_{(k)} = 1 \cdot \left[\frac{n}{1}\right] + 2 \cdot \left[\frac{n}{2}\right] + 3 \cdot \left[\frac{n}{3}\right] \cdots\cdots$$

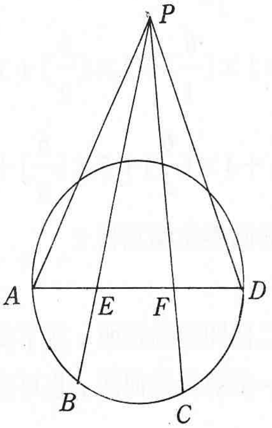
$$\cdots + n \cdot \left[\frac{n}{n}\right]$$

此公式的來源如何？

2.（此題是我國中時代別人問的，至今仍不解。）

已知：$\overline{AD}$ 為直徑，$\triangle PAD$ 為正△，E、F 將 $\overline{AD}$ 三等分，$\overrightarrow{PE}$，$\overrightarrow{PF}$ 交圓於 B、C 兩點。

求證：$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$



讀者　王敦正上

王同學：

許多結論常是通過觀察、分析、歸納再加證明而得。因此，對於你的第一個問題，不妨取一個較小的 n 來考慮，比如 $n=6$。那麼1至6的正整數，它們的因數列表如下，並統計因數的個數及它們的和：

正整數 / 正因數	1，2，3，4，5，6	正因數個數（註）	正因數的　和
1	∨ ∨ ∨ ∨ ∨ ∨	$6=\left[\frac{6}{1}\right]$	1×6
2	∨　∨　∨	$3=\left[\frac{6}{2}\right]$	2×3
3	∨　　∨	$2=\left[\frac{6}{3}\right]$	3×2
4	∨	$1=\left[\frac{6}{4}\right]$	4×1
5	∨	$1=\left[\frac{6}{5}\right]$	5×1
6	∨	$1=\left[\frac{6}{6}\right]$	6×1

註：其實這個問題的解決關鍵在下面這件事實：1至 n 的正整數中，可被正整數 k 整除（$k\leq n$）者共有〔n/k〕。

$$\therefore \sum_{k=1}^{6} T_{(k)} = 6+3+2+1+1+1$$

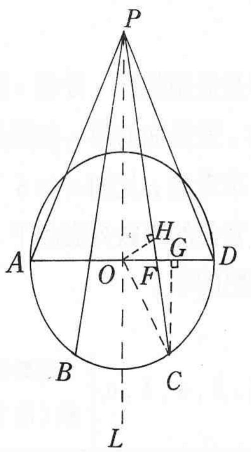
$$= \left[\frac{6}{1}\right]+\left[\frac{6}{2}\right]+\left[\frac{6}{3}\right]+\left[\frac{6}{4}\right]+\left[\frac{6}{5}\right]+\left[\frac{6}{6}\right]$$

$$\sum_{k=1}^{6} S_{(k)} = 1\times\left[\frac{6}{1}\right]+2\times\left[\frac{6}{2}\right]+3\times\left[\frac{6}{3}\right]+4\times\left[\frac{6}{4}\right]+5\times\left[\frac{6}{5}\right]+6\times\left[\frac{6}{6}\right]$$

不知道這樣的回答你滿意嗎？

至於第二個問題的證明，底下提供一個綜合幾何法及一個解析幾何法，也可藉茲比較兩者的差異。

⑴綜合幾何法：



分析：過 P 點作 AD 的垂直綫 L，知道整個圖形對稱於 L，因此，要是能夠證明 $\triangle OCD$ 是正三角形，問題便算解決。爲方便起見，取圓的半徑爲一個單位。過點 C 作 CG 垂直 OD，我們發現要是證明了 $\overline{OG}=\frac{1}{2}$，也就證明了 $\triangle OCD$ 是正三角形，因此，我們把目標放在 $\overline{OG}=\frac{1}{2}$ 的證明上。

證明：因爲取 $\overline{OD}=1$，所以 $\overline{OF}=\frac{1}{3}$，

$\overline{OP}=\sqrt{3}$，$\overline{PF}=\frac{\sqrt{28}}{3}$，過 O 點作 OH 垂直 PC，

由 $\triangle OHF \sim \triangle POF$，得

$$\frac{\overline{OH}}{\sqrt{3}}=\frac{\overline{HF}}{\frac{1}{3}}=\frac{\overline{OF}}{\frac{\sqrt{28}}{3}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{OH}=\sqrt{\frac{3}{28}} \\ \overline{HF}=\frac{1}{3\sqrt{28}} \end{cases}$$

另外，由 $\triangle CGF \sim \triangle POF$，得

$\overline{CG}=3\sqrt{3}\,\overline{FG}$

因此，$\overline{HC}=\overline{HF}+\overline{FC}$

$$=\frac{1}{3\sqrt{28}}+\sqrt{\overline{CG}^2+\overline{FG}^2}$$

$$=\frac{1}{3\sqrt{28}}+\sqrt{28}\,\overline{FG}$$

但是，$\triangle OCH$ 是直角三角形，

$$\therefore \quad \overline{OC}^2=\overline{OH}^2+\overline{HC}^2$$

$$\Rightarrow \quad 1=\frac{3}{28}+\left(\frac{1}{3\sqrt{28}}+\sqrt{28}\,\overline{FG}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \overline{FG}=\frac{1}{6}$$

故 $\overline{OG}=\overline{OF}+\overline{FG}=\frac{1}{2}$ ||

⑵解析幾何法：

取座標系，使圖形位置如下：

AD 爲 x 軸，

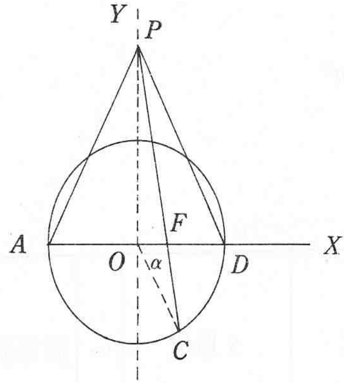
圓心 $O=(0,0)$，$D=(1,0)$

$F=\left(\frac{1}{3},0\right)$，$P=(0,\sqrt{3})$

$C=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，

其中 $\sin\alpha<0$，$\cos\alpha>0$，α 待定，

我們的目標是證明 $\alpha=-60^\circ$



證明：由 P，F，C 三點共綫，得

$$\frac{\cos\alpha}{\frac{1}{3}}=\frac{\sin\alpha-\sqrt{3}}{-\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \quad \sin\alpha+3\sqrt{3}\cos\alpha=\sqrt{3}$$

此式與 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 聯立，解得

$$\begin{cases}\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\[2ex] \cos\alpha=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

知 $\alpha=-60^\circ$ ||

葉東進　覆

71年12月22日（冬至）