不定型的極限

王湘君

當同學初學極限時，有些性質被視爲理所當然，例如，和的極限就是極限的和，又如 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty$ 等等。但當同學第一次看到一個簡單的不定型，如 $\frac{0}{0}$，他們很懷疑兩個極小的量之比可以爲任何值。無論如何，一些不定型如 0^0，∞^0，及 1^∞ 對同學來說是很納悶的。舉個例來說，有人認爲 1^∞ 是 1（根據底猜測的），有人卻認爲是 ∞（根據指數猜測的），而很難看出這個不定型的極限可以爲任何非負實數，甚至它並不收驗。通常用下面的例子來說明 1^∞ 的極限是 1 以外的實數。

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,\ 2<e<3$$

下面將舉出一些相關的例子來說明每一種不定型的極限，好讓初學的人，避免錯誤。

〔註〕設 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)$ 的結果不確定，此型簡記爲 $\infty-\infty$，餘類推。

一、不定型 $\frac{\infty}{\infty}$

例 1：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+5}{4n-7}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+\frac{5}{n}}{4-\frac{7}{n}}=\dfrac{3}{4}$

（注意：不可寫成 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+5}{4n-7}=\dfrac{\infty}{\infty}=1$）

例 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^n}{6^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right]=0$

例 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x}=\infty$

例 4. 令 $f(n)=\begin{cases}2n & \text{若 } n \text{ 爲偶數}\\ n & \text{若 } n \text{ 爲奇數},\end{cases}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{n}$ 之極限不存在。

二、不定型 $\infty-\infty$

例 1. $\lim\limits_{n\to\infty}(2n^3-n^2)=\lim\limits_{n\to\infty}n^3\left(2-\dfrac{1}{n}\right)=\infty$

（注意：不可寫成 $\lim\limits_{n\to\infty}(2n^3-n^2)=\infty-\infty=0$）

例 2. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$$

三、不定型 $0\cdot\infty$

例 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+1}\,(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{1}{2}$$

例 2 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left[1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

四、不定型$\frac{0}{0}$

例 1 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+4}\Big/\frac{1}{2n^2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+4}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{4}{n^2}}=2$

例 2 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

五、不定型∞^0

例 1 $\lim\limits_{n\leftarrow\infty}(3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}4\left[\left(\frac{3}{4}\right)^n+1\right]^{\frac{1}{n}}=4$

例 2 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$，$\forall n>0$

證：

$\because n^{\frac{1}{n}}\geqslant1$

$\therefore$可令$n^{\frac{1}{n}}=1+x_n$，$x_n\geqslant0$

$n=(1+x_n)^n\geqslant\frac{n(n-1)}{2}x_n^2$，

$n\geqslant2$

$\frac{2}{n-1}\geqslant x_n^2\geqslant0$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$（夾擠原理）

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$

六、不定型0^0

例 1 $f(x)=2^{-x}$，$g(x)=\frac{1}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)^{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}(2^{-x})^{\frac{1}{x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}2^{-\frac{1}{x}}=1$

例 2 $f(x)=a^x$，$a<0<1$，$g(x)=\frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)^{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}(a^x)^{\frac{1}{x}}=a$，

$0<a<1$

七、不定型1^∞

例 1 $f(x)=2^{\frac{1}{x}}$，$g(x)=x^2$

$\lim\limits_{n\to\infty}f(x)=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}g(x)=\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)^{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}(2^{\frac{1}{x}})^{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}2^x=\infty$

例 2 $f(x)=a^{\frac{1}{x}}$，$a>0$，$g(x)=x$

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)^{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}(a^{\frac{1}{x}})^x=a$

從上面的例子可以看出不定型的極限，可為任何實數，也可能不收斂。

參考資料：Mathematics Teacher

（本文作者現任教於師大附中）