循環小數

可直式相加減

葉景再

當我們遇到循環小數的加減法運算，通常是將它化成分數，然後再去運算，再化爲循環小數。往往會有一些較複雜的小數令人感到困擾，我們忍不住要問，難道沒有更簡便的方法嗎？

在此筆者提供一套理論以供大家參考，雖然簡易的循環小數加減時，早已知曉直式加減法，不過對於繁雜的小數加減法時，未有理想方法，在此提出更具體的研究及其證明，適用於所有循環小數之加減。並能減少計算的錯誤機會。

循環小數之加減法步驟如下所述，看似甚煩，實極爲簡便，現將方法敍述於后：

1. 改變循環節次序，使二數非循環節位數相同。
2. 取各循環節位數的最小公倍數，使二數循環節的位數也相同。
3. 相加減時，若循環節部份之和發生進位時，則再將所得之和的末尾加 1；若不夠減時，則再將所得之差的末尾減 1。
4. 所得之和或差，其非循環節位數與循環節位數與(2)中相同。

因循環小數有一特別處，可將循環節的次序變動使得非循環節部份的位數有所改變，而在運算小數加減時，可以分成整數部份與小數部份相加減。因此在此證明中，可令

$$a=0.p_1p_2\cdots p_r\overline{a_1a_2\cdots a_m}\quad 與\quad b=0.q_1q_2\cdots q_r\overline{b_1b_2\cdots b_n}\text{ 。}$$

爲了討論方便暫設

$$a>b\ ,\quad g.c.d.(m,n)=g\ ,\quad m=g\times k\ ,\quad n=g\times l\ ,\quad (k,l)=1$$

則

$$l.c.m.(m,n)=gkl$$

（本文作者現任敎於高雄市愛國國小）

$$a = 0 \cdot p_1\ p_2 \cdots p_r\ \overline{a_1\ a_2 \cdots a_m} = \frac{\sum_{i=1}^{r} p_i \times 10^{m+r-i} + \sum_{i=1}^{m} a_i \times 10^{m-i} - \sum_{i=1}^{r} p_i \times 10^{r-i}}{\sum_{i=1}^{m} 9 \times 10^{m+r-i}}$$

$$= \frac{\left(\sum_{i=1}^{r} p_i \times 10^{m+r-i} + \sum_{i=1}^{m} a_i \times 10^{m-i} - \sum_{i=1}^{r} p_i \times 10^{r-i}\right) \times \sum_{j=1}^{l} 10^{(l-j)m}}{\sum_{i=1}^{m} 9 \times 10^{m+r-i} \times \sum_{j=1}^{l} 10^{(l-j)m}}$$

分子乘式中的 $\sum_{i=1}^{r} p_i \times 10^{m+r-i} \times \sum_{j=1}^{l} 10^{(l-j)m} - \sum_{i=1}^{r} p_i \times 10^{r-i} \times \sum_{j=1.}^{l} 10^{(l-j)m}$

$$= \sum_{i=1}^{r} p_i \times 10^{r-i} \cdot \left[10^m \sum_{j=1}^{l} 10^{(l-j)m} - \sum_{j=1}^{l} 10^{(l-j)m} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{r} p_i \times 10^{r-i} \left[10^m (10^0 + 10^m + \cdots 10^{(l-1)m}) - (10^0 + 10^m \cdots 10^{(l-1)m} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{r} p_i \times 10^{r-i} (10^{ml} - 1)$$

$$= \sum_{i=1}^{r} p_i \times 10^{gkl+r-i} - \sum_{i=1}^{r} p_i \times 10^{r-i}$$

分子乘式中的 $\sum_{i=1}^{m} a_i \times 10^{m-i} \times \sum_{j=1}^{l} 10^{(l-j)m}$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_i\, 10^{m-i} \left[10^0 + 10^m \cdots + 10^{m(l-1)} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_i \times 10^{m-i} + \sum_{i=1}^{m} a_i \times 10^{2m-i} + \sum_{i=1}^{m} a_i^{3m-i} + \cdots\cdots + \sum_{i=1}^{m} a_i \times 10^{ml-i}$$

$$= \sum_{i=1}^{m,} \sum_{j=1}^{l} a_i \times 10^{jm-i} \quad (\text{式中 } a_t = a_i \quad t \equiv i\ (m\theta dm) \quad 1 \leq t \leq m\ )$$

$$= \sum_{i=1}^{gkl} a_i \times 10^{gkl-i}$$

分母乘式中的 $\sum_{i=1}^{m} 9 \times 10^{m+r-i} \times \sum_{j=1}^{l} 10^{(l-j)m}$

$$= \sum_{i=1}^{m} 9 \times 10^{m+r-i} \times \left[10^0 + 10^m \cdots\cdots + 10^{(l-1)m} \right]$$

$$= 10^r \left[\sum_{i=1}^{m} 9 \times 10^{m-i} \times 10^0 + \sum_{i=1}^{m} 9 \times 10^{m-i} \times 10^m + \cdots\cdots \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{m} 9 \times 10^{m-i} \times 10^{(l-i)m} \right]$$

$$= 10^r \left[\sum_{i=1}^{m} 9 \times 10^{m-i} + \sum_{i=1}^{m} 9 \times 10^{2m-i} + \cdots\cdots + \sum_{i=1}^{m} 9 \times 10^{ml-i} \right]$$

$$= 10^r \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{l} 9 \times 10^{jm-i}$$

$$= 10^r \sum_{i=1}^{gkl} 9 \times 10^{gkl-i}$$

$$= \sum_{i=1}^{gkl} 9 \times 10^{gkl+r-i}$$

故 $$a = \frac{\sum_{i=1}^{r} p_i \times 10^{gkl+r-i} + \sum_{i=1}^{gkl} a_i \times 10^{gkl-i} - \sum_{i=1}^{r} p_i \times 10^{r-i}}{\sum_{i=1}^{gkl} 9 \times 10^{gkl+r-i}}$$

同理 $$b = \frac{\sum_{i=1}^{r} q_i \times 10^{gkl+r-i} + \sum_{i=1}^{gkl} b_i \times 10^{gkl-i} - \sum_{i=1}^{r} q_i \times 10^{r-i}}{\sum_{i=1}^{gkl} 9 \times 10^{gkl+r-i}}$$

〔以後式中的 $a_i = a_t \quad t \equiv i \pmod m \quad 1 \le t \le m$ ， $b_i = b_t \quad t \equiv i \pmod n \quad 1 \le t \le n$〕

則 $$a \pm b = \frac{\sum_{i=1}^{r} (p_i \pm q_i) \times 10^{gkl+r-i} + \sum_{i=1}^{gkl} (a_i \pm b_i) \times 10^{gkl-i} - \sum_{i=1}^{r} (p_i \pm q_i) \times 10^{r-i}}{\sum_{i=1}^{gkl} 9 \times 10^{gkl+r-i}}$$

此式乃依循環小數加減法一般方式求得。

以下將依本題所示之方法，分三種情形討論，是否與上式相同。

（i） 循環節部份之和不發生進位，或循環節部份之差夠減。（請參照例 1 ）

即 $\sum_{i=1}^{gkl} (a_i + b_i) \times 10^{gkl-i} < 10^{gkl}$ （或 $\sum_{i=1}^{gkl} (a_i - b_i) \times 10^{gkl-i} > 0$ ）

可設 $\sum_{i=1}^{gkl} (a_i \pm b_i) \times 10^{gkl-i}$

$$= \sum_{i=1}^{gkl} c_i \times 10^{gkl-i} \quad [\, a_t = a_i \quad t \equiv i \ (\bmod \quad m) \quad 1 \leqslant t \leqslant m \,]$$

$$a = 0.p_1 \ p_2 \cdots p_r \ \overbrace{\underbrace{a_1 \, a_2 \cdots a_m}\cdots\cdots\underbrace{a_1 \ a_2 \cdots a_m}}^{l\text{組}}$$

$$\pm)\ b = 0.\ q_1 q_2 \cdots q_r \ \overbrace{\underbrace{b_1 \ b_2 \cdots b_n}\cdots\cdots\underbrace{b_1 \ b_2 \cdots b_n}}^{k\text{組}}$$

$$c = 0.(\ p_1 \pm q_1\ )(\ p_2 \pm q_2\ )\cdots\cdots(\ p_r \pm q_r\ )\ \overline{c_1 \ c_2 \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ c_{gkl}}$$

〔註〕：$(\ p_i \pm q_i\ )$爲上下對應數相加減

如：

$$\begin{array}{rrr} 3 & 5 & 8 \\ +\ 5 & 7 & 9 \\ \hline (8) & (12) & (17) \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} 3 & 5 & 8 \\ -\ 5 & 7 & 9 \\ \hline (-2) & (-2) & (-1) \end{array}$$

即可表示

$8 \times 10^2 + 12 \times 10^1 + 17 \times 10^0$

$= 937$

即可表示爲

$-2\times10^2+(-2)\times10^1+(-1)\times10^0$

$=-221$

將其化成分數

$$c = \frac{\sum_{i=1}^{r}(\ p_i \pm q_i\ ) \times 10^{gkl+r-i} + \sum_{i=1}^{gkl} c_i \times 10^{gkl-i} - \sum_{i=1}^{r}(\ p_i \pm q_i\ )\times 10^{r-i}}{\sum_{i=1}^{gkl} 9 \times 10^{gkl+r-i}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{r}(\ p_i \pm q_i\ )\times 10^{gkl+r-i} + \sum_{i=1}^{gkl}(\ a_i \pm b_i\ )\times 10^{gkl-i} - \sum_{i=1}^{r}(\ p_i \pm q_i\ )\times 10^{r-i}}{\sum_{i=1}^{gkl} 9 \times 10^{gkl+r-i}}$$

$\therefore \quad c = a \pm b$

(ii) 循環節部份之和發生進位至非循環節部份的情形，需在末尾再加 1 。(請參照範例 2)

即 $\sum_{i=1}^{gkl}(\ a_i + b_i\ ) \times 10^{gkl-i} \geq 10^{gkl}$ 時

令 $\sum_{i=1}^{gkl}(\ a_i + b_i\ ) \times 10^{gkl-i} = 10^{gkl} + \sum_{i=1}^{gkl} c_i \times 10^{gkl-i}$

$$\text{則}\quad a = 0.p_1\,p_2\cdots\cdots p_r\,\overbrace{\underbrace{a_1\,a_2\cdots\cdots a_m}\cdots\cdots\underbrace{a_1\,a_2\cdots\cdots a_m}}^{l\text{組}}$$

$$+)\quad b = 0.p_1\,p_2\cdots\cdots p_r\,\overbrace{\underbrace{b_1\,b_2\cdots\cdots b_n}\cdots\cdots\cdots\underbrace{b_1\cdots\cdots b_n}}^{k\text{組}}$$

$$c = 0.(\,p_1+q_1\,)(\,p_2+q_2\,)\cdots\cdots(\,p_r+q_r+1\,)\,c_1\,c_2\cdots(\,c_{gkl}+1\,)$$

化成分數

$$c=\frac{\sum_{i=1}^{r-1}(\,p_i+q_i\,)\times 10^{gkl+r-i}+(\,p_r+q_r+1\,)\times 10^{gkl}+\sum_{i=1}^{gkl}c_i\times 10^{gkl-i}+1\,]-[\,\sum_{i=1}^{r}(\,p_i+q_i)\times 10^{r-i}+1\,]}{\sum_{i=1}^{gkl}9\times 10^{gkl+r-i}}$$

c 之分子

$$=[\,\sum_{i=1}^{r-1}(\,p_i+q_i)\times 10^{gkl+r-i}+(\,p_r+q_r\,)\times 10^{gkl}+10^{gkl}+\sum_{i=1}^{gkl}c_i\times 10^{gkl-i}\,]$$

$$-[\,\sum_{i=1}(\,p_i+q_i\,)\times 10^{r-i}\,]$$

$$=\sum_{i=1}^{r}(\,p_i+q_i)\times 10^{gkl+r-i}+\sum_{i=1}^{gkl}(\,a_i+b_i\,)\times 10^{gkl-i}-\sum_{i=1}^{r}(\,p_i+q_i\,)\times 10^{r-i}$$

c 的分子與分母與 $a+b$ 的分子與分母分別相同

$\therefore\quad c=a+b$

(iii) 循環節部份之差不夠減時，需在末尾再減 1（請參照範例 3）。

$$\text{即}\quad \sum_{i=1}^{gkl}(\,a_i-b_i\,)\times 10^{gkl-i}<0$$

$$\text{可設}\quad 10^{gkl}+\sum_{i=1}^{gkl}(\,a_i-b_i\,)\times 10^{gkl-i}=\sum_{i=1}^{gkl}c_i\times 10^{gkl-i}$$

$$\text{則}\quad \sum_{i=1}^{gkl}(\,a_i-b_i\,)\times 10^{gkl}=-1\times 10^{gkl}+\sum_{i=1}^{gkl}c_i\times 10^{gkl-i}$$

$$a = 0.p_1\,p_2\cdots\cdots p_r\,\overbrace{\underbrace{a_1\,a_2\cdots\cdots a_m}\cdots\cdots\underbrace{a_1\,a_2\cdots a_m}}^{l\text{組}}$$

$$-)\quad b = 0.q_1\,q_2\cdots\cdots q_r\,\overbrace{\underbrace{b_1\,b_2\cdots\cdots b_n}\cdots\cdots\underbrace{b_1\cdots\cdots b_n}}^{k\text{組}}$$

$$c = 0.(\,p_1-q_1\,)(\,p_2-q_2\,)\cdots\cdots(\,p_r-q_r-1\,)\,c_1\,c_2\cdots\cdots(\,c_{gkl}-1)$$

化成分數

$$c=\frac{\left[\sum_{i=1}^{r-1}(p_i-q_i)\times 10^{gkl+r-i}+(p_r-q_r-1)\times 10^{gkl}+\sum_{i=1}^{gkl}c_i\times 10^{gkl-i}-1\right]-\left[\sum_{i=1}^{r}(p_i-q_r)\times 10^{r-i}-1\right]}{\sum_{i=1}^{gkl}9\times 10^{gkl+r-i}}$$

c 之分子

$$=\left[\sum_{i=1}^{r-1}(p_i-q_i)\times 10^{gkl+r-i}+(p_r-q_r)\times 10^{gkl}-1\times 10^{gkl}+\sum_{i=1}^{gkl}c_i\times 10^{gkl-i}\right]$$

$$-\left[\sum_{i=1}^{r}(p_i-q_i)\times 10^{r-i}\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{r}(p_i-q_i)\times 10^{gkl+r-i}+\sum_{i=1}^{gkl}(a_i-b_i)\times 10^{gkl-i}-\sum_{i=1}^{r}(p_i-q_i)\times 10^{r-i}$$

$= a-b$ 的分子

且 c 的分母與 $a-b$ 的分母相同。 $\therefore c=a-b$

故循環小數 a，b 依上述規則作直式相加減而得的結果，與將 a，b 先化成分數再加減的結果相同。因此本題結論正確無訛。

範例1

$$2.2\overline{83}+0.11\overline{43}-0.\overline{74}=1.65\overline{07}$$

$$\begin{array}{rr} & 2.28\overline{38} \\ +) & 0.11\overline{43} \\ \hline & 2.39\overline{81} \\ -) & 0.74\overline{74} \\ \hline & 1.65\overline{07} \end{array}$$

範例2

$$0.\overline{471}+0.\overline{328}=0.\overline{4717171}+0.\overline{3283283}$$

$$=0.\overline{8000455}$$

$$\begin{array}{rr} & 0.4\overline{717171} \\ +) & 0.3\overline{283283} \\ \hline & 0.\overline{800045\boxed{5}} \end{array}$$

範例3

$$3.6\overline{65}+2.3\overline{3434}-2.\overline{331}=3.66\overline{868777}$$

$$\begin{array}{rr} & 3.66\overline{565656} \\ +) & 2.33\overline{434434} \\ \hline & 6.000000\boxed{91} \\ -) & 2.33\overline{131313} \\ \hline & 3.66\overline{86877\boxed{7}} \end{array}$$

（本文作者現任教於海山國中）