

這部分 π 是不 $\pi = 3 - \frac{1}{3} = 2\pi$ 是蓋立青兩

。這部分 π 是不出 $\pi = 3 + \frac{1}{3} = \pi$ 是圓缺因

。這部分 π 是立 π 是圓缺因，這五丑圓缺

循環小數

讀一為半讀四

$0.28423 = \pi$

$0.3 = \pi + 0.3 = \text{味字讀讀讀}$

$894 = \text{味字讀讀讀}$

，這部分 π 是 $33 = 133 - 100 = \text{美立青兩}$

可直式相加減

II 的倒數識別法有中學的數學和物理都會介紹過。我們很自然地會想到： $131 = 131$ 的方法可以用來減去 131 循環小數，若用最簡單的數學概念， $131 - 131 = 0$ 這次對 131 中 1 ， 3 沒味， $1 = \text{味字讀讀讀}$ 。

當我們遇到循環小數的加減法運算，通常是將它化成分數，然後再去運算，再化為循環小數。往往會有一些較複雜的小數令人感到困擾，我們忍不住要問，難道沒有更簡便的方法嗎？

在此筆者提供一套理論以供大家參考，雖然簡易的循環小數加減時，早已知曉直式加減法，不過對於繁雜的小數加減法時，未有理想方法，在此提出更具體的研究及其證明，適用於所有循環小數之加減。並能減少計算的錯誤機會。

循環小數之加減法步驟如下所述，看似甚煩，實極為簡便，現將方法敘述於後：

1. 改變循環節次序，使二數非循環節位數相同。

2. 取各循環節位數的最小公倍數，使二數循環節的位數也相同。

3. 相加減時，若循環節部份之和發生進位時，則再將所得之和的末尾 1 加 1；若不夠減時，則再將所得之差的末尾減 1。

4. 所得之和或差，其非循環節位數與循環節位數與(2)中相同。

因循環小數有一特別處，可將循環節的次序變動使得非循環節部份的位數有所改變，而在運算小數加減時，可以分成整數部份與小數部份相加減。因此在此證明中，可令

$a = 0.p_1 p_2 \dots p_r \overline{a_1 a_2 \dots a_m}$ 與 $b = 0.q_1 q_2 \dots q_r \overline{b_1 b_2 \dots b_n}$ 。

為了討論方便暫設

$$a > b, \quad g.c.d.(m, n) = g, \quad m = g \times k, \quad n = g \times l, \quad (k, l) = 1$$

則

$$= a_{m+k} + \dots + a_{m+g} + \dots$$

(小圓圈代表某位數對應於文本)

其中 a_0, a_1, \dots, a_m 都是正質整數，而

樣的方法去觀察以一數乘以 10^k 所得餘數。

餘數這些餘數依序排列下去得到一個遺數列。

CC = 味字讀讀讀

$$a = 0 \cdot p_1 p_2 \cdots p_r \overline{a_1 a_2 \cdots a_m} = \frac{\sum_{i=1}^r p_i \times 10^{m+r-i} + \sum_{i=1}^m a_i \times 10^{m-i} - \sum_{i=1}^r p_i \times 10^{r-i}}{\sum_{i=1}^m 9 \times 10^{m+r-i}}$$

$$= \frac{(\sum_{i=1}^r p_i \times 10^{m+r-i} + \sum_{i=1}^r a_i \times 10^{m-i} - \sum_{i=1}^r p_i \times 10^{r-i}) \times \sum_{j=1}^l 10^{(l-j)m}}{\sum_{i=1}^m 9 \times 10^{m+r-i} \times \sum_{j=1}^l 10^{(l-j)m}}$$

分子乘式中的 $\sum_{i=1}^r p_i \times 10^{m+r-i} \times \sum_{j=1}^l 10^{(l-j)m} - \sum_{i=1}^r p_i \times 10^{r-i} \times \sum_{j=1}^l 10^{(l-j)m}$

$$= \sum_{i=1}^r p_i \times 10^{r-i} \cdot [\sum_{j=1}^l 10^m \sum_{j=1}^l 10^{(l-j)m} - \sum_{j=1}^l 10^{(l-j)m}]$$

$$= \sum_{i=1}^r p_i \times 10^{r-i} [10^m (10^0 + 10^m + \dots + 10^{(l-1)m}) - (10^0 + 10^m + \dots + 10^{(l-1)m})]$$

$$= \sum_{i=1}^r p_i \times 10^{r-i} (10^{ml} - 1)$$

分子乘式中的分數

$$= \sum_{i=1}^r p_i \times 10^{rk + r-i} - \sum_{i=1}^r p_i \times 10^{r-i}$$

分子乘式中的 $\sum_{i=1}^m a_i \times 10^{m-i} \times \sum_{j=1}^l 10^{(l-j)m}$

$$= \sum_{i=1}^m a_i \times 10^{m-i} [10^0 + 10^m + \dots + 10^{(l-1)m}]$$

$$= \sum_{i=1}^m a_i \times 10^{m-i} + \sum_{i=1}^m a_i \times 10^{2m-i} + \sum_{i=1}^m a_i^{3m-i} + \dots + \sum_{i=1}^m a_i \times 10^{ml-i}$$

$$= \sum_{i=1}^m a_i \times 10^{tm-i} \quad (\text{式中 } a_t = a_i, t \equiv i \pmod{m}, 1 \leq t \leq m)$$

即 $\sum_{i=1}^m a_i \times 10^{tm-i}$ 同時表示疊加量，總額並計前三位，表示本位與本位不以 (1) 例題為輔助。

分母乘式中的 $\sum_{i=1}^m 9 \times 10^{m+r-i} \times \sum_{j=1}^l 10^{(l-j)m}$

$$= \sum_{i=1}^m 9 \times 10^{m+r-i} \times [10^0 + 10^m + \dots + 10^{(l-1)m}]$$

$$= 10^r \left[\sum_{i=1}^m 9 \times 10^{m-i} \times 10^0 + \sum_{i=1}^m 9 \times 10^{m-i} \times 10^m + \dots \right]$$

$$+ \sum_{i=1}^m 9 \times 10^{m-i} \times 10^{(t-i)m}$$

$$= 10^r \left[\sum_{i=1}^m 9 \times 10^{m-i} + \sum_{i=1}^m 9 \times 10^{2m-i} + \dots + \sum_{i=1}^m 9 \times 10^{m(t-i)} \right]$$

$$= 10^r \sum_{i=1}^m 9 \times 10^{j(m-i)}$$

$$= 10^r \sum_{i=1}^m 9 \times 10^{g_{kl}-i}$$

$$= \sum_{i=1}^m 9 \times 10^{g_{kl}+r-i}$$

$$\sum_{i=1}^r p_i \times 10^{g_{kl}+r-i} + \sum_{i=1}^r a_i \times 10^{g_{kl}-i} - \sum_{i=1}^r p_i \times 10^{r-i}$$

故 $a = \frac{\sum_{i=1}^r p_i \times 10^{g_{kl}+r-i} + \sum_{i=1}^r a_i \times 10^{g_{kl}-i} - \sum_{i=1}^r p_i \times 10^{r-i}}{\sum_{i=1}^m 9 \times 10^{g_{kl}+r-i}}$

在計算時，我們遇到一個問題：當 $r < m$ 時，上述式子的分母為零，無法計算。

過於繁瑣的十數加減法時，我們便會考慮到循環小數的加減法。其證明，先加後減，將之加減。並舉一例：

$$\sum_{i=1}^r q_i \times 10^{g_{kl}+r-i} + \sum_{i=1}^r b_i \times 10^{g_{kl}-i} - \sum_{i=1}^r q_i \times 10^{r-i}$$

同理 $b = \frac{\sum_{i=1}^r q_i \times 10^{g_{kl}+r-i} + \sum_{i=1}^r b_i \times 10^{g_{kl}-i} - \sum_{i=1}^r q_i \times 10^{r-i}}{\sum_{i=1}^m 9 \times 10^{g_{kl}+r-i}}$

[以後式中的 $a_i = a_t$, $t \equiv i \pmod{m}$, $b_i = b_t$, $t \equiv i \pmod{n}$, $1 \leq t \leq n$]

則 $a \pm b = \frac{\sum_{i=1}^r (p_i \pm q_i) \times 10^{g_{kl}+r-i} + \sum_{i=1}^r (a_i \pm b_i) \times 10^{g_{kl}-i} - \sum_{i=1}^r (p_i \pm q_i) \times 10^{r-i}}{\sum_{i=1}^m 9 \times 10^{g_{kl}+r-i}}$

此式乃依循環小數加減法一般方式求得。

以下將依本題所示之方法，分三種情形討論，是否與上式相同。

(i) 循環節部份之和不發生進位，或循環節部份之差夠減。(請參照例 1)

即 $\sum_{i=1}^m (a_i + b_i) \times 10^{g_{kl}-i} < 10^{g_{kl}}$ (或 $\sum_{i=1}^m (a_i - b_i) \times 10^{g_{kl}-i} > 0$)

可設 $\sum_{i=1}^m (a_i \pm b_i) \times 10^{g_{kl}-i}$

$$\text{化成分數} = \sum_{i=1}^{gk} c_i \times 10^{gk-i} \quad [a_i = a_i \quad t \equiv i \pmod{m} \quad 1 \leq t \leq m]$$

$$a = 0.p_1 p_2 \cdots p_r \overbrace{a_1 a_2 \cdots a_m \cdots \cdots a_1 a_2 \cdots a_m}^l \text{組} \quad (+)$$

$$\pm b = 0.q_1 q_2 \cdots q_r \overbrace{b_1 b_2 \cdots b_n \cdots \cdots b_1 b_2 \cdots b_n}^k \text{組}$$

$$c = 0.(p_1 \pm q_1)(p_2 \pm q_2) \cdots (p_r \pm q_r) \overline{c_1 c_2 \cdots \cdots \cdots c_{gk}}$$

[註] : $(p_i \pm q_i)$ 為上下對應數相加減

$$\text{如: } \begin{array}{r} 3 \quad 5 \quad 8 \\ + \quad 5 \quad 7 \quad 9 \\ \hline (8)(12)(17) \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \quad 5 \quad 8 \\ - \quad 5 \quad 7 \quad 9 \\ \hline (-2)(-2)(-1) \end{array}$$

即可表示

即可表示為

$$8 \times 10^2 + 12 \times 10^1 + 17 \times 10^0 \quad -2 \times 10^2 + (-2) \times 10^1 + (-1) \times 10^0$$

$$= 937$$

將其化成分數

$$\text{範例 1} \quad c = \frac{\sum_{i=1}^{gk} (p_i \pm q_i) \times 10^{gk+i-r-i} + \sum_{i=1}^{gk} c_i \times 10^{gk-i} - \sum_{i=1}^r (p_i \pm q_i) \times 10^{r-i}}{\sum_{i=1}^{gk} 9 \times 10^{gk+i-r-i}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^r (p_i \pm q_i) \times 10^{gk+i-r-i} + \sum_{i=1}^r (a_i \pm b_i) \times 10^{gk-i} - \sum_{i=1}^r (p_i \pm q_i) \times 10^{r-i}}{\sum_{i=1}^{gk} 9 \times 10^{gk+i-r-i}}$$

$$\therefore c = a \pm b$$

(ii) 循環節部份之和發生進位至非循環節部份的情形，需在末尾再加 1。 (請參照範例 2)

$$\text{即} \quad \sum_{i=1}^{gk} (a_i + b_i) \times 10^{gk-i} \geq 10^{gk} \text{時}$$

$$\text{令} \quad \sum_{i=1}^{gk} (a_i + b_i) \times 10^{gk-i} = 10^{gk} + \sum_{i=1}^{gk} c_i \times 10^{gk-i}$$

$$\text{則 } a = 0 \cdot p_1 p_2 \cdots p_r \underbrace{\overbrace{a_1 a_2 \cdots a_m}^l \cdots \overbrace{a_1 a_2 \cdots a_m}^l}_{k \text{組}}$$

$$+) \quad b = 0 \cdot p_1 p_2 \cdots p_r \underbrace{\overbrace{b_1 b_2 \cdots b_n}^l \cdots \overbrace{b_1 \cdots b_n}^l}_{k \text{組}} 0 = b$$

$$c = 0 \cdot (p_1 + q_1) (p_2 + q_2) \cdots (p_r + q_r + 1) c_1 c_2 \cdots (c_{g_{kl}} + 1)$$

化成分數

$$c = \frac{\sum_{i=1}^{r-1} (p_i + q_i) \times 10^{g_{kl} + r-i} + (p_r + q_r + 1) \times 10^{g_{kl}} + \sum_{i=1}^r c_i \times 10^{g_{kl}-i} + 1 - [\sum_{i=1}^r (p_i + q_i) \times 10^{r-i} + 1]}{\sum_{i=1}^{g_{kl}} 9 \times 10^{g_{kl} + r-i}}$$

 c 之分子

$$= [\sum_{i=1}^{r-1} (p_i + q_i) \times 10^{g_{kl} + r-i} + (p_r + q_r) \times 10^{g_{kl}} + 10^{g_{kl}} + \sum_{i=1}^{g_{kl}} c_i \times 10^{g_{kl}-i}] - [\sum_{i=1}^r (p_i + q_i) \times 10^{r-i}]$$

$$= \sum_{i=1}^r (p_i + q_i) \times 10^{g_{kl} + r-i} + \sum_{i=1}^{g_{kl}} (a_i + b_i) \times 10^{g_{kl}-i} - \sum_{i=1}^r (p_i + q_i) \times 10^{r-i}$$

同理 c 的分子與分母與 $a + b$ 的分子與分母分別相同

$$\therefore c = a + b$$

(iii) 循環節部份之差不夠減時，需在末尾再減 1 (請參照範例 3)。

$$\text{即 } \sum_{i=1}^{g_{kl}} (a_i - b_i) \times 10^{g_{kl}-i} < 0$$

$$\text{可設 } 10^{g_{kl}} + \sum_{i=1}^{g_{kl}} (a_i - b_i) \times 10^{g_{kl}-i} = \sum_{i=1}^{g_{kl}} c_i \times 10^{g_{kl}-i}$$

$$\text{則 } \sum_{i=1}^{g_{kl}} (a_i - b_i) \times 10^{g_{kl}} = -1 \times 10^{g_{kl}} + \sum_{i=1}^{g_{kl}} c_i \times 10^{g_{kl}-i}$$

$$a = 0 \cdot p_1 p_2 \cdots p_r \underbrace{\overbrace{a_1 a_2 \cdots a_m}^l \cdots \overbrace{a_1 a_2 \cdots a_m}^l}_{k \text{組}}$$

$$-) \quad b = 0 \cdot q_1 q_2 \cdots q_r \underbrace{\overbrace{b_1 b_2 \cdots b_n}^l \cdots \overbrace{b_1 \cdots b_n}^l}_{k \text{組}}$$

$$c = 0 \cdot (p_1 - q_1) (p_2 - q_2) \cdots (p_r - q_r - 1) c_1 c_2 \cdots (c_{g_{kl}} - 1)$$

化成分數

$$c = \frac{\left[\sum_{i=1}^{r-1} (p_i - q_i) \times 10^{q_{kl} + r-i} + (p_r - q_r - 1) \times 10^{q_{kl}} + \sum_{i=1}^{q_{kl}} c_i \times 10^{q_{kl}-i} - 1 \right] - \left[\sum_{i=1}^r (p_i - q_r) \times 10^{r-i} - 1 \right]}{\sum_{i=1}^{q_{kl}} 9 \times 10^{q_{kl}+r-i}}$$

 c 之分子

$$= \left[\sum_{i=1}^{r-1} (p_i - q_i) \times 10^{q_{kl} + r-i} + (p_r - q_r) \times 10^{q_{kl}} - 1 \times 10^{q_{kl}} + \sum_{i=1}^{q_{kl}} c_i \times 10^{q_{kl}-i} \right]$$

舊時王

$$\text{例 1} \quad - \left[\sum_{i=1}^r (p_i - q_i) \times 10^{r-i} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^r (p_i - q_i) \times 10^{q_{kl} + r-i} + \sum_{i=1}^{q_{kl}} (a_i - b_i) \times 10^{q_{kl}-i} - \sum_{i=1}^r (p_i - q_i) \times 10^{r-i}$$

 $a - b$ 的分子且 c 的分母與 $a - b$ 的分母相同。 $\therefore c = a - b$ 故循環小數 a , b 依上述規則作直式相加減而得的結果，與將 a , b 先化成分數再加減的結果相同。因此本題結論正確無訛。

範例 1

$$2.\overline{283} + 0.\overline{1143} - 0.\overline{74} = 1.6507$$

$$\begin{array}{r} 2.2838 \\ + 0.1143 \\ \hline 2.3981 \\ - 0.7474 \\ \hline 1.6507 \end{array}$$

範例 2

$$0.\overline{471} + 0.\overline{328} = 0.\overline{4717171} + 0.\overline{3283283}$$

$$\begin{array}{r} = 0.8000455 \\ 0.4717171 \\ + 0.3283283 \\ \hline 0.8000455 \end{array}$$

範例 3

$$3.\overline{665} + 2.\overline{33434} - 2.\overline{331} = 3.66868777$$

$$\begin{array}{r} 3.66565656 \\ + 2.33434434 \\ \hline 6.00000091 \\ - 2.33131313 \\ \hline 3.66868777 \end{array}$$

(本文作者現任教於海山國中)