

從

建中月考

看

大專聯考

石厚高

本文最後附錄是本校七十一學年度上學期高三自然組第一次月考數學試題，考試時間七十分鐘，由筆者命題。考畢頗獲同仁好評，乃不揣冒昧以試題及各項統計數字一併寄上，請「數播」讀者指正。

試題中 76 分出自課本例題與習題（本校採用實驗本），有一字不易者，亦有僅變更數據者。

本校高三學生是兩年前以第一志願入學的，這次考試的平均成績是 56.44，滿分僅 2 人，筆者極感意外。

所以，命題人不宜以本身對專業知識的認識來衡量考生程度。入學考試試題的設計尤其要注意這一點，因命題的良窳影響考生前途。

也有學生說：「未到最後關頭，不曾全力以赴。」是考不好的原因。不過「由於數學教材的枯燥無味，教材教法之守舊和呆板，再加上平時考師們喜以艱深題目難倒學生，和聯考試題命題不均、不當，使得很多學生望數學而生畏，放棄數學之呼聲不僅在鄉間學校佔絕大多數，甚至連幾所有名中學亦如此，誠為今日數學教育發展之隱憂。」（摘自「數播」第六卷第三期，王秋夫：從七十一年聯考數學試題談數學教育之改革），學生放棄數學也是成績

低落的原因。

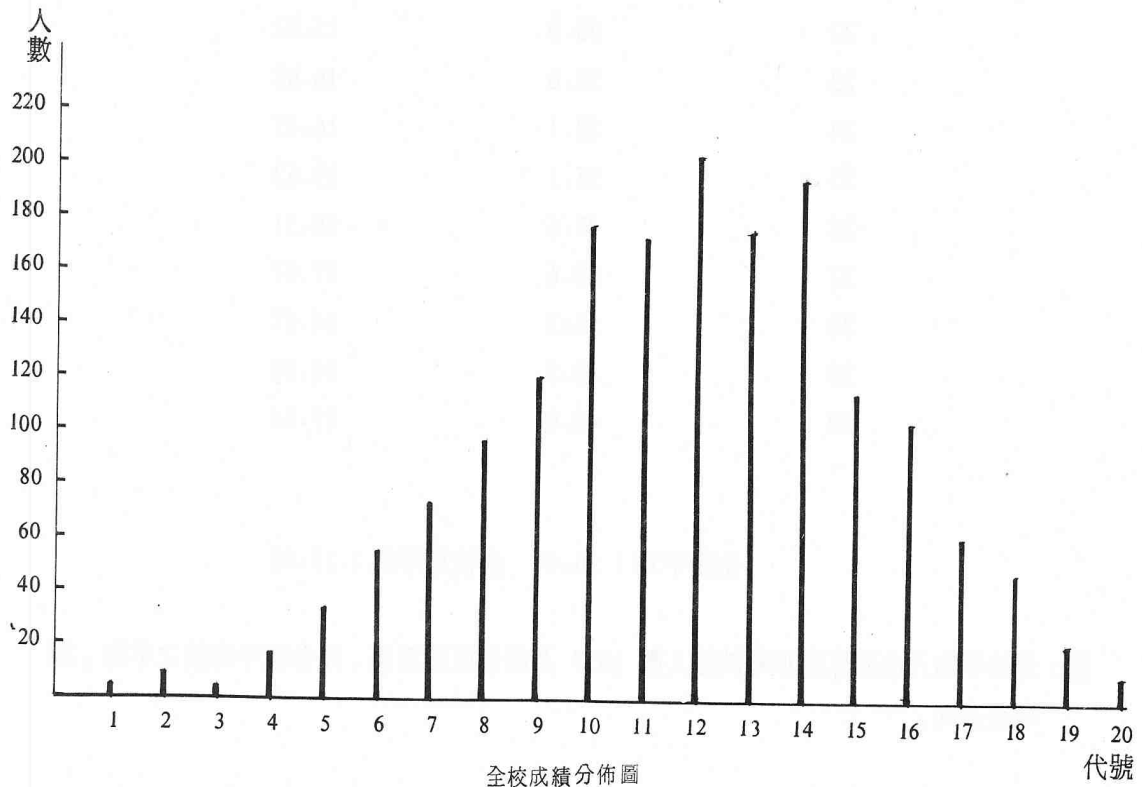
筆者以為考不好的原因有下列數端：

1. 學生不“讀”課本已成慣，有些同學甚至不買課本，不作習題更是“常態”。只是求助於“以例題解答為中心”的“數學突破”或“××數學”。這種參考書的特色是羅列三種現行數學課本的重點，例題與習題解答。很多同學抱著這些“救星”猛作，只想從題目的演練來瞭解理論；而不從根本作起，先瞭解理論，再作習題以印證理論。
2. 數學是“投資報酬率”最低的科目，花了時間，又不一定能得高分，自然降低了學習的興趣。
3. 應屆畢業生課業負擔太重，心理壓力大。讀一些不想讀的科目，例如矢志國文或歷史者要考數學，數學系吸收學生時亦無必要衡量其化學成就，這種措施使考生痛苦，教師困惑。

這份試題筆者花了很多時間，我一想到它是三十班約一千五百名學生（1677人）的考卷，即感責任深重，撰就後特別情商林初堂老師演算一遍，提供改進意見，謹此致謝。

| 代號 | 成績區間 | 人數 |
|----|--------------|-----|
| 1 | 0 5 | 4 |
| 2 | 6 10 | 10 |
| 3 | 11 15 | 6 |
| 4 | 16 20 | 20 |
| 5 | 21 25 | 36 |
| 6 | 26 30 | 58 |
| 7 | 31 35 | 74 |
| 8 | 36 40 | 96 |
| 9 | 41 45 | 120 |
| 10 | 46 50 | 175 |
| 11 | 51 55 | 170 |
| 12 | 56 60 | 202 |
| 13 | 61 65 | 172 |
| 14 | 66 70 | 193 |
| 15 | 71 75 | 107 |
| 16 | 76 80 | 101 |
| 17 | 81 85 | 59 |
| 18 | 86 90 | 44 |
| 19 | 91 95 | 20 |
| 20 | 96 100 | 10 |

全校成績統計表



| 班級 | 平均 | 標準差 |
|----|------|-------|
| 1 | 55.3 | 15.91 |
| 2 | 55.0 | 18.67 |
| 3 | 58.1 | 18.20 |
| 4 | 58.5 | 18.48 |
| 5 | 61.2 | 18.18 |
| 6 | 62.9 | 19.16 |
| 7 | 55.6 | 19.22 |
| 8 | 57.4 | 19.74 |
| 9 | 55.5 | 18.93 |
| 10 | 58.4 | 14.89 |
| 11 | 53.5 | 12.83 |
| 12 | 48.6 | 19.25 |
| 13 | 64.7 | 16.76 |
| 14 | 63.0 | 14.57 |
| 15 | 58.6 | 12.92 |
| 16 | 60.5 | 17.57 |
| 17 | 59.3 | 16.72 |
| 18 | 54.9 | 15.33 |
| 19 | 57.6 | 14.48 |
| 20 | 56.0 | 16.60 |
| 21 | 60.9 | 13.72 |
| 22 | 58.0 | 15.82 |
| 23 | 52.6 | 16.68 |
| 24 | 52.1 | 16.47 |
| 25 | 51.1 | 19.63 |
| 26 | 47.6 | 16.51 |
| 27 | 60.6 | 17.07 |
| 28 | 58.2 | 14.67 |
| 29 | 50.2 | 16.99 |
| 30 | 48.0 | 17.64 |

全校平均：56.44 全校標準差：17.48

註：全校平均乃由高三參加考試總人數 1677 及總分直接算出，非各班平均數之平均，標準差亦同。

附錄：

台北市建國中學71學年度第一學期
高三自然組數學試卷

- (甲) $\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3} =$ (1)
 $\tan^{-1} 1 + \tan^{-1} \frac{3}{2} + \tan^{-1} 5 =$ (2)
 $\cos^{-1} \cos 10 =$ (12)
- (乙) 點 $(-1, -1)$ 之極坐標 $[r, \theta]$ 為
 (3) (式中 $r < 0, 0 < \theta < 2\pi$)
- (丙) 兩點 $P_1 [7, \frac{3\pi}{4}]$, $P_2 [5, \tan^{-1} 7]$
 間之距離為 (13)
- (丁) 圓 $r = -2 \cos \theta + 2 \sin \theta$ 之圓心極坐標為 $[r, \theta]$, 若 $r > 0, 0 < \theta < 2\pi$
 則 $r =$ (4), $\theta =$ (5) 又此圓半徑為
 (4)
- (戊) 極坐標方程式 $r = \frac{15}{4 - \cos \theta}$ 所表曲線為
 (6) 頂點為 (7) 中心為 (15) 焦點為
 (16) 準線方程式為 (17) (答案必須以極坐標表示)
- (己) 拋物線 $r = \frac{2}{1 - \cos \theta}$ 之頂點為 c , 一焦點
 弦 AB 之長為 8, 則 ΔABC 之面積為 (18)
- (庚) 設 $A[4, 120^\circ]$, $B[6, 60^\circ]$, $C[-4, 30^\circ]$, 則 ΔABC 之面積為 (19)
- (辛) 求過三點 $[0, 0]$, $[a, 0]$, $[b, \frac{\pi}{2}]$
 之圓之極方程式 ($ab \neq 0$) (8)
- (壬) 正焦弦長為 8, 準線方程式為 $r \cos \theta = 4$ 之二次曲線之極方程式為 (20) (焦點在極)

以下各題答案數值必須化至最簡, 例: $6! = 720$, 始予計分。

- (癸) 將“庭院深深幾許深”七個字任意排列, 其法有幾 (9)
- 自 6 人中選出 3 人排成一列, 但某甲必須入選, 其法有幾 (21)
- 設 $S = \{a, b, c, d\}$, $T = \{x, y, z\}$ 則由 T 到 S 的映射個數為 (10)
 S 到 S 的對射個數為 (11)
 S 到 T 的蓋射個數為 (22)
- 令 N 表一切自然數所成的集合, 設 $S \subset N$, 則使命題「若 $x \in S$ 則 $(18-x) \in S$ 」為真的非空集合 S 有 (23) = (24) 個 (23 填算式, 24 填答案, 例: $4 \cdot 5! = 480$, 僅有正確答案不予計分)

每空格 2 分

| | | | |
|----|--|----|--|
| 1 | | 2 | |
| 3 | | 4 | |
| 5 | | 6 | |
| 7 | | 8 | |
| 9 | | 10 | |
| 11 | | | |

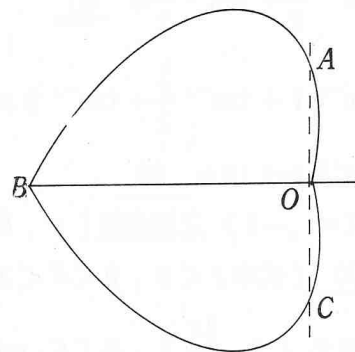
每空格 4 分

| | | | |
|----|--|----|--|
| 12 | | 13 | |
| 14 | | 15 | |
| 16 | | 17 | |
| 18 | | 19 | |
| 20 | | 21 | |
| 22 | | 23 | |
| 24 | | | |

3. 例：

心臟線

$$r = 2(1 - \cos \theta)$$

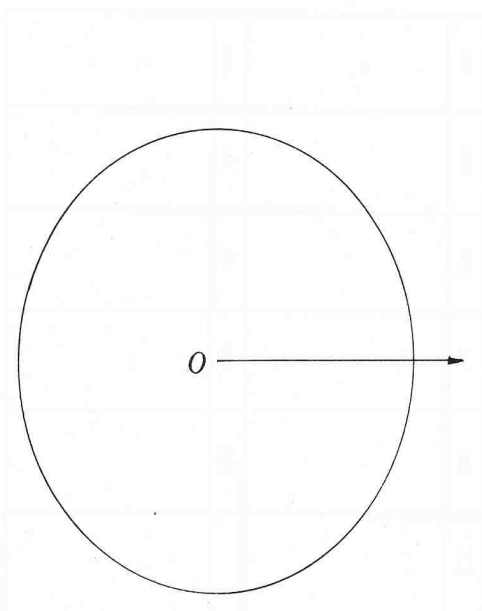


(子) (1)(a)作 $r = 1 + 4 \cos 3\theta$ 之圖 (10 分)

(b)自 0 至 2π 取點描繪時說明圖形繪出之流程 (6 分)

注意：1. 先填下表，本表不作評分依據，但有助作圖。

2. 長度以公分為單位，下方之圓半徑為 5 公分。



自 0 至 2π 取點描繪時，圖形繪出之流程為 $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow O$

$C \rightarrow O$ (起點)

或

$\begin{matrix} \uparrow & \downarrow \\ B & \leftarrow A \end{matrix}$

| | | | | | | | | | | |
|----------|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| r | | | | | | | | | | |
| θ | 0° | 10° | 20° | 30° | 40° | 50° | 60° | 70° | 80° | 90° |

| | | | | | | | | | |
|----------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| r | | | | | | | | | |
| θ | 100° | 110° | 120° | 130° | 140° | 150° | 160° | 170° | 180° |

(2)設坐標平面上以極為焦點之二次曲線上

含 $P_1 [1, \alpha]$, $P_2 [2, \frac{\pi}{2} + \alpha]$,

$P_3 [5, \pi + \alpha]$, 求其離心率 (10 分)

參考答案與評分標準

每格 2 分

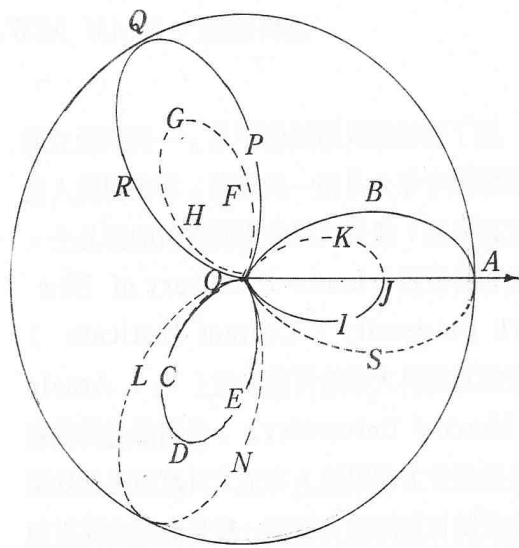
| | | | |
|----|------------------------------|----|-------------------------------------|
| 1 | $\frac{\pi}{4}$ | 2 | π |
| 3 | $[-\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}]$ | 4 | $\sqrt{2}$ |
| 5 | $\frac{3\pi}{4}$ | 6 | 橢圓 |
| 7 | $[5, 0], [3, \pi]$ | 8 | $r = a \cos \theta + b \sin \theta$ |
| 9 | 840 | 10 | 24 |
| 11 | 24 | | |

每格 4 分

| | | | |
|----|---------------------------------|----|---|
| 12 | $4\pi - 10$ | 13 | $4\sqrt{2}$ |
| 14 | $\sqrt{2}$ | 15 | $[1, 0]$ |
| 16 | $[0, 0], [2, 0]$ | 17 | $r \cos \theta = -15$ $r \cos \theta = 17$ |
| 18 | $2\sqrt{2}$ | 19 | $2 + 6\sqrt{3}$ |
| 20 | $r = \frac{4}{1 + \cos \theta}$ | 21 | 60 |
| 22 | 36 | 23 | $2^9 - 1$ |
| 24 | 511 | | |

- 填空第 7 16 17 均有兩個答案，如僅答對一個，給予半對。
- 第 6 題橢寫作橢或橢皆為半對。
- 第 3 7 15 16 題 [] 寫作 ()，仍以答對給分為宜。

- (1) 作圖題實線部份完整解出為半對 (得 5 分)，全部解出 (實線、虛線全部畫出) 得 10 分，其他情形皆不得分。作圖之流程為 (圖形未全對或半對，此處不予評閱)。



$A \rightarrow B \rightarrow O \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow O \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow O \rightarrow I \rightarrow J \rightarrow K \rightarrow O \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow O \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow O \rightarrow S \rightarrow A$

(2) 設二次曲線之方程式為

$$r = \frac{pe}{1 - e \cos \theta}$$

以 P_1, P_2, P_3 之坐標代入

求出 $e \cos \alpha = -\frac{2}{3}$ (3 分)

$e \sin \alpha = -\frac{1}{6}$ (3 分)

$\therefore e = \frac{\sqrt{17}}{6}$ (4 分)