

## 問題詳解

6401(周雲雄提供)

此題之關鍵在於  $9 = 10 - 1$ ，設取出之數  $A$  的首位是  $a$ ，末位是  $a - n + 1$ ，即

$$A = a \cdot 10^{n-1} + (a-1)10^{n-2} + \dots + (a-n+1) \cdot 10^0; 9 \geq a \geq n > 1$$

爲方便計，簡計成

$$A = \overbrace{a, a-1, a-2, \dots, a-n+2, a-n+1}^{n \text{ 位}}$$

於是

$$9A = 10A - A$$

$$(*) = \overbrace{a, a-1, a-2, \dots, a-n+1, 0}^{n \text{ 位}} \\ - \quad a, a-1, \dots, a-n+2, a-n+1$$

現逐次計算各數位：

個位：本是  $0 - (a - n + 1)$ ，由十位借一，得  $10 + 0 - (a - n + 1) = 9 - a + n \geq 0$

十位：本是  $(a - n + 1) - (a - n + 2) = 1$ ，被個位借去一，現向百位借一，得  $10 - 1 + (a - n + 1) - (a - n + 2) = 8$

百位：本是  $(a - n + 2) - (a - n + 3) = -1$ ，被十位借去一，現向千位借一，得  $10 - 1 + (a - n + 2) - (a - n + 3) = 8$

同理，千位，萬位， $\dots$ 至  $10^{n-1}$ 位皆是8，至

於  $10^n$  位則易見爲  $a - 1$ 。

故知由倒數第二位起向前至少有  $(n - 1)$  個 8。

另外一解法是

$$A = \overbrace{a, a, a, \dots, a}^{n \text{ 位}}$$
$$\underbrace{- 1, 2, 3, \dots, n - 1}_{n \text{ 位}} = B - C$$

仿照(\*)的計算易見

$$9B = \overbrace{a - 1, 9, 9, \dots, 9, 10 - a}^{n + 1 \text{ 位}}$$

$$9C = \underbrace{1, 1, 1, \dots, 1, 0, 11 - n}_{n \text{ 位}}$$

$$\text{於是 } 9A = \overbrace{a - 1, 8, 8, 8, \dots, 8, 9 - a + n}^{n + 1 \text{ 位}}$$