

## 本期徵答問題

### 7101 級數問題 (林建宏提供)

若  $s > 0$ ，試證  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{ns}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{ns-s}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{s}\right)$  收斂。

### 7102 集合問題 (蕭鴻銘、王人傑提供)

設  $S = \{1, 2, \dots, n\}$ ，若  $A_1, A_2, \dots, A_n$  為  $S$  中  $n$  個相異子集，試證存在  $x \in S$ ，使得  $A_1 \cup \{x\}, A_2 \cup \{x\}, \dots, A_n \cup \{x\}$  兩兩相異。

### 7103 級數問題 (周雲雄提供)

1. 證明對任意正整數  $a$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n k^a \right) / n^{a+1} = \frac{1}{a+1} \quad \dots\dots\dots(1)$$

2. 更進一步，證明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( \sum_{k=1}^n k^a - \frac{n^{a+1}}{a+1} \right)}{n^a} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

(註：不訪先驗證  $a = 1, 2$ ，及 3 的情況)

3. (假使你懂微積分) 根據積分法則 (*integral test*)，易見(1)對任意正數  $a > 0$  成立，證明(2)式對任意正數  $a > 1$  亦成立。