有關費氏數之無窮級數的分數和

林炳炎

1953 年 Feton Stancliff提出了下面的式子，但沒有證明：

(1) $\sum 10^{-(i+1)} F_i = \dfrac{1}{89}$ ，F_i 爲費氏數

這個式子如果用小數來表示的話，一定更清楚，由於費氏數列是由：首二項爲 1 ，且其後項爲前二項之代數和組成，即 1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，… ，上面這個式子用小數來表示，就可寫成爲：$0.0F_1F_2F_3F_4F_5\cdots\cdots = 1/89$，89 是費氏數列中一數，也是一個質數，它的倒數有 44 位循環小數，即

$$\frac{1}{89} = 0.01123595505617977528089887640449438022471 91$$

1981 年C.T. Long 在費氏季刊發表了一篇文章，他用數學歸納法及一點技巧，很巧妙的把這個等式證明了，這篇文章我把它譯成中文，並略加改寫及說明，投給數學傳播，數播在 22 期刊登。 1981 年 12 月份費氏季刊登了Richard H. Hudson 和 C.F. Winans兩人合作的成果，他們兩人研究

$$\sum_{i=1}^{\infty} 10^{-k(i+1)} F_{\alpha i}$$

的和，也就是某一型態的分數之展開，會得到上述的結果，他們得到的分數如下：

$$(2)\begin{cases} \text{當 } \alpha \text{ 是奇數，分母是正數時} \\ \dfrac{F_\alpha}{10^{2k} - 10^k - 1 - 10^k\left(\sum\limits_{j=1}^{(\alpha-1)/2} L_{2j}\right)} \\ \text{當 } \alpha \text{ 是偶數，分母是正數時} \\ \dfrac{F_\alpha}{10^{2k} - 3(10^k) + 1 - 10^k\left(\sum\limits_{j=1}^{(\alpha-2)/2} L_{2j+1}\right)} \end{cases}$$

其中 L_j 是路卡斯數

本文想對這個問題作一番探討，提出筆者在演算中所得到的一些結果，筆者將提出較Hudson和 Winans 的解答更簡潔的結果，最後並推論出廣義費氏數列的結果。

我們在小學作除法運算時，一定算過“ 1 ÷ 3 ”，“ 1 ÷ 9 ”這類的題目，發現商沒有辦法停止在某一位小數上，這對小學生而言是很感困惑的，只好問老師，老師說這還不簡單，只要在重複的數字頭上點一點做記號就可以了，從此我們就與無窮小數結下不解緣，對於這種頭上有點的小數，可以很快的求得一個對應分數，這種數稱爲有理數。現在來看看這種無窮小數用代數學的方法怎樣處理。我們知道

$0.\dot{7} = 0.777777\cdots\cdots\cdots$

$= 0.7 + 0.07 + 0.007 + 0.0007 + \cdots\cdots\cdots$

$$=7(0.1+0.01+0.001+0.0001+$$

$$=7\left[\frac{1}{10}+\left(\frac{1}{10}\right)^2+\left(\frac{1}{10}\right)^3+\left(\frac{1}{10}\right)^4+\left(\frac{1}{10}\right)^5+\cdots\cdots\cdots\right]$$

我們對於像 $r+r^2+r^3+\cdots+r^n=\dfrac{r(1-r^{n+1})}{1-r}$ 的式子一定很熟，當 $r<1$ 時，而 n 又很大時，r^{n+1} 就會很小，在數學上說，當 n 趨近無窮大時，r^{n+1} 就趨近於 0，上面式子就變成：

(3) $$r+r^2+r^3+r^4+\cdots\cdots=\frac{r}{1-r}$$

$$\text{所以}\ 0.7=7\cdot\left[\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}}\right]=\frac{7}{9}$$

本文就想利用上述的想法來處理我們的問題，我們想看看費氏數列，路卡斯數列，以及廣義的費氏數列等所組成的無窮小數，它的分數形式是怎樣的？

1. $\Sigma 10^{-k(i+1)}F_{\alpha i}$ 的觀察結果

費氏數列可用下面這個式子表示：

(4) $$F_n=\frac{1}{\sqrt5}\left[\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\right]$$

有關這個式子的推演可閱數播 22 期或科月。我們選擇一個 k，α 之值來計算，當 $\alpha=2$，$k=3$ 時，我們得到結果如下：

(5) $$\sum_{i=1}^{\infty}10^{-3(i+1)}F_{2i}$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1000\sqrt5}\left[\left(\frac{1+\sqrt5}{2\sqrt{1000}}\right)^{2i}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2\sqrt{1000}}\right)^{2i}\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1000\sqrt5}\left[\left(\frac{3+\sqrt5}{2000}\right)^{i}-\left(\frac{3-\sqrt5}{2000}\right)^{i}\right]$$

$$=\frac{1}{1000\sqrt5}\left[\frac{\frac{3+\sqrt5}{2000}}{1-\frac{3+\sqrt5}{2000}}-\frac{\frac{3-\sqrt5}{2000}}{1-\frac{3-\sqrt5}{2000}}\right]$$

下面表 1 是筆者依上面算法，一個一個算得的。

k \ α	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	$\frac{1}{89}$	$\frac{1}{71}$	$\frac{2}{59}$	$\frac{3}{31}$						
2	$\frac{1}{9899}$	$\frac{1}{9701}$	$\frac{2}{9599}$	$\frac{3}{9301}$	$\frac{5}{8899}$	$\frac{8}{8201}$	$\frac{13}{7099}$	$\frac{21}{5301}$	$\frac{34}{2399}$	
3	$\frac{1}{998999}$	$\frac{1}{997001}$	$\frac{2}{995999}$	$\frac{3}{993001}$	$\frac{5}{988999}$	$\frac{8}{982001}$	$\frac{13}{970999}$	$\frac{21}{953001}$	$\frac{34}{923999}$	$\frac{55}{877001}$
	$\frac{89}{800999}$	$\frac{144}{678001}$	$\frac{233}{478999}$	$\frac{377}{157001}$						

表 1 $\sum 10^{-k(i+1)}F_{\alpha i}$ 之部份結果

在計算上面式子時，要注意當 $r\geq1$ 時，這無窮級數是發散，因此無法求和，如果閉著眼睛算，會得到一個奇怪的結果，像上面 $k=1$，$\alpha\geq5$；$k=2$，$\alpha\geq10$；$k=3$，$\alpha\geq15$ 都是這種現象。

從表 1 中的分子及分母詳細的觀察，我們可以得到 $\sum 10^{-k(i+1)}F_{\alpha i}$ 之結果如下：

(6) 對不同的 k，所能求得分數的個數是 $5k-1$。

(7) $$\sum_{i=1}^{\infty}10^{-k(i+1)}F_{\alpha i}=\frac{F_\alpha}{10^{2k}-L_\alpha(10^k)+(-1)^\alpha}$$

(7)這個結果與(2)是表示相同的分數，但(7)式是更簡潔多了。

2. $\Sigma 10^{-k(i+1)} L_{\alpha i}$ 的觀察結果

求得上述結果，筆者興趣大發，接著就想費氏數列的兄弟路卡斯數列又是如何呢？路卡斯數列（Lucas Sequence）可用下面式子表示，19世紀法國數學家首先研究費氏數列，費氏迷把1，3，4，7，11，18，29，47…稱爲路卡斯數列。

(8) $$L_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

同樣的，我們也選擇一個 k,α 值來計算，$k=2$，$\alpha=7$，我們得結果如下：

(9) $$\sum_{i=0}^{\infty} 10^{-2(i+1)} L_{7i}$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{100}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt[7]{100}}\right)^{7i}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt[7]{100}}\right)^{7i}\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{100}\left[\left(\frac{29+13\sqrt{5}}{200}\right)^{i}+\left(\frac{29-13\sqrt{5}}{200}\right)^{i}\right]$$

$$=\frac{1}{100}\left[\frac{1}{1-\frac{29+13\sqrt{5}}{200}}+\frac{1}{1-\frac{29-13\sqrt{5}}{200}}\right]$$

$$=\frac{171}{7099}$$

在計算這一類的式子，要展開 $(1+\sqrt{5})^n$，這個展開有一很奇特的性質，這性質筆者稱之爲孿生兄弟。因費氏數與路卡斯數會以同樣型式出現在我們分數的分子與分母中；而在這展開中，他們一齊出現，這是費氏數列的一奇特本性，以下討論廣義費氏數列將再度提起。

(10) $$(1\pm\sqrt{5})^n=2^{n-1}(L_n\pm F_n\sqrt{5})$$

式(10)可以用式(4)及式(8)而證明，請讀者自己試一試。

下面表2是筆者依上面的算法，一個個筆算而得。

k \ α	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	$\frac{19}{89}$	$\frac{17}{71}$	$\frac{16}{59}$	$\frac{13}{31}$						
2	$\frac{199}{9899}$	$\frac{197}{9701}$	$\frac{196}{9599}$	$\frac{193}{9301}$	$\frac{189}{8899}$	$\frac{182}{8201}$	$\frac{171}{7099}$	$\frac{153}{5301}$	$\frac{124}{2399}$	
3	$\frac{1999}{998999}$	$\frac{1997}{997001}$	$\frac{1996}{995999}$	$\frac{1993}{993001}$	$\frac{1989}{988999}$	$\frac{1982}{982001}$	$\frac{1971}{970999}$	$\frac{1953}{953001}$	$\frac{1924}{923999}$	$\frac{1877}{877001}$
	$\frac{1801}{800999}$	$\frac{1678}{678001}$	$\frac{1479}{478999}$	$\frac{1157}{157001}$						

表2　$\sum_{i=0}^{\infty} 10^{-k(i+1)} L_{\alpha i}$ 之部份結果

從表2中，我們詳細的觀察分數的分子、分母，得到 $\sum 10^{-k(i+1)} L_{\alpha i}$ 的結果，如下：

(11) 對不同的 k 值，所能求得分數的個數是 $5k-1$。

(12) $$\sum 10^{-k(i+1)} L_{\alpha i}=\frac{2(10^k)-L_\alpha}{10^{2k}-L_\alpha(10^k)+(-1)^\alpha}$$

3. $\Sigma(-10^k)^{-(i+1)} F_{\alpha i}$ 的觀察結果

做完了費氏孿生兄弟的解後，意猶未盡，從參考資料〔2〕中，給了筆者一個現在這種數列其結果又如何？經過一連串的計算後，筆者得到表3之結果，在此僅列出 $k=2$，$\alpha=8$ 的計算供讀者參考。

(13) $$\sum_{i=1}^{\infty}(-100)^{-(i+1)} F_{8i}$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{100\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt[8]{100}}\right)^{8(2i-1)}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt[8]{100}}\right)^{8(2i-1)}\right]-\frac{1}{100\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt[8]{100}}\right)^{16i}\right.\right.$$

$$-(\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt[8]{100}})^{16i}]\}$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\{\frac{1}{100\sqrt{5}}[(\frac{47+21\sqrt{5}}{200})^{2i-1}-(\frac{47-21\sqrt{5}}{200}))]-\frac{1}{100\sqrt{5}}[(\frac{47+21\sqrt{5}}{200})^{2i}-(\frac{47-21\sqrt{5}}{200})^{2i}]\}$$

$$=\frac{1}{100\sqrt{5}}[\frac{\frac{47+21\sqrt{5}}{200}}{1-\frac{47+21\sqrt{5}}{200}}-\frac{\frac{47-21\sqrt{5}}{200}}{1-\frac{47-21\sqrt{5}}{200}}]-\frac{1}{100\sqrt{5}}[\frac{(\frac{47+21\sqrt{5}}{200})^{2}}{1-(\frac{47+21\sqrt{5}}{200})^{2}}-\frac{(\frac{47-21\sqrt{5}}{200})^{2}}{1-(\frac{47-21\sqrt{5}}{200})^{2}}]=\frac{21}{14701}$$

k \ α	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	$\frac{1}{109}$	$\frac{1}{131}$	$\frac{2}{139}$	$\frac{3}{171}$						
2	$\frac{1}{10099}$	$\frac{1}{10301}$	$\frac{2}{10399}$	$\frac{3}{10701}$	$\frac{5}{11099}$	$\frac{8}{11801}$	$\frac{13}{12899}$	$\frac{21}{14701}$	$\frac{34}{17599}$	
3	$\frac{1}{1000999}$	$\frac{1}{1003001}$	$\frac{2}{1003999}$	$\frac{3}{1007001}$	$\frac{5}{1010999}$	$\frac{8}{1018001}$	$\frac{13}{1028999}$	$\frac{21}{1047001}$	$\frac{34}{1075999}$	$\frac{55}{1123001}$
	$\frac{89}{1198999}$	$\frac{144}{1322001}$	$\frac{233}{1520999}$	$\frac{377}{1843001}$						

表3 $\sum_{i=1}^{\infty}(-10^{k})^{-(i+1)}F_{\alpha i}$之部份結果

我們得到結果如下：

(14) 不同的 k 值，所能求得最大的分數個數爲 $5k-1$。

(15) $\sum_{i=1}^{\infty}(-10^{k})^{-(i+1)}F_{\alpha i}$

$$=\frac{F_{\alpha}}{10^{2k}+10^{k}(L_{\alpha})+(-1)^{\alpha}}$$

4. $\Sigma(-10^{k})^{-(i+1)}L_{\alpha i}$的觀察結果

同法，令 $k=1$，$\alpha=4$，路卡斯數列亦有和如下：

(16) $\sum_{i=1}^{\infty}(-10)^{-(i+1)}L_{4i}$

$$=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{\infty}[(\frac{7+3\sqrt{5}}{20})^{2i-1}+(\frac{7-3\sqrt{5}}{20})^{2i-1}]-\frac{1}{10}\sum_{i=0}^{\infty}[(\frac{7+3\sqrt{5}}{20})^{2i}+(\frac{7-3\sqrt{5}}{20})^{2i}]$$

$$=-\frac{27}{171}$$

k \ α	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	$-\frac{21}{109}$	$-\frac{23}{131}$	$-\frac{24}{139}$	$-\frac{27}{171}$						
2	$-\frac{201}{10099}$	$-\frac{203}{10301}$	$-\frac{204}{10309}$	$-\frac{207}{10701}$	$-\frac{211}{11099}$	$-\frac{218}{11801}$	$-\frac{229}{12899}$	$-\frac{247}{14701}$	$-\frac{276}{17599}$	
3	$\frac{-2001}{1000999}$	$\frac{-2003}{1003001}$	$\frac{-2004}{1003999}$	$\frac{-2007}{1007001}$	$\frac{-2011}{1010999}$	$\frac{-2018}{1018001}$	$\frac{-2029}{1028999}$	$\frac{-2047}{1047001}$	$\frac{-2076}{1075999}$	$\frac{-2123}{1123001}$
	$\frac{-2199}{1198999}$	$\frac{-2322}{1322001}$	$\frac{-2521}{1520999}$	$\frac{-2843}{1843001}$						

表4 $\sum(-10^k)^{-(i+1)}L_{\alpha i}$ 之部份結果

其結果如下：

(17) 所能求得最大的分數個數是 $5k-1$ 。

(18) $\sum_{i=0}^{\infty}(-10^k)^{-(i+1)}L_{\alpha i}$

$$=-\frac{2\times10^k+L_\alpha}{10^{2k}+10^k(L_\alpha)+(-1)^\alpha}$$

5. 式(7)(12)(15)(18) 能證明嗎？

上述(7)、(12)、(15)、(18)式都是觀察結果，這些觀察結果能證明嗎？答案是肯定的。

這問題的證明可能有三個方法，其一是用數學歸納法，對 k ，α 二整數分別加以證明，雖然演算過程稍長，是一可行途徑，其二是利用參考資料2所提 Long 的結果，($\sum_{i=1}^{\infty}\frac{U_{i-1}}{B^i}=\frac{N}{Bm}$)，將我們的問題化成 Long 的型式處理，有些困難，作者雖曾花時間，但未能突破困難。其三是用本文所用方法，利用本文所提費氏數列之學生性質來推導，本文只導出式(7)，其餘三式請讀者自行仿照證明。

(7) 試證：$\sum_{i=1}^{\infty}10^{-k(i+1)}F_{\alpha i}$

$$=\frac{F_\alpha}{10^{2k}-L_\alpha(10^k)+(-1)^\alpha}$$

證明：$\sum_{i=1}^{\infty}10^{-k(i+1)}F_{\alpha i}$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{10^k\sqrt5}\left[\left(\frac{1+\sqrt5}{2\sqrt[\alpha]{10^k}}\right)^{\alpha i}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2\sqrt[\alpha]{10^k}}\right)^{\alpha i}\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{10^k\sqrt5}\left[\left\{\frac{2^{\alpha-1}(L_\alpha+F_\alpha\sqrt5)}{2^\alpha\cdot10^k}\right\}^i-\left\{\frac{2^{\alpha-1}(L_\alpha-F_\alpha\sqrt5)}{2^\alpha\cdot10^k}\right\}^i\right]$$

$$=\sum\frac{1}{10^k\sqrt5}\left[\left(\frac{L_\alpha+F_\alpha\sqrt5}{2\cdot10^k}\right)^i-\left(\frac{L_\alpha-F_\alpha\sqrt5}{2\cdot10^k}\right)^i\right]$$

$$=\frac{1}{10^k\sqrt5}\left[\frac{\dfrac{L_\alpha+F_\alpha\sqrt5}{2\cdot10^k}}{1-\dfrac{L_\alpha+F_\alpha\sqrt5}{2\cdot10^k}}-\frac{\dfrac{L_\alpha-F_\alpha\sqrt5}{2\cdot10^k}}{1-\dfrac{L_\alpha-F_\alpha\sqrt5}{2\cdot10^k}}\right]$$

$$=\frac{1}{10^k\sqrt5}\left[\frac{L_\alpha+F_\alpha\sqrt5}{2\cdot10^k-L_\alpha-F_\alpha\sqrt5}-\frac{L_\alpha-F_\alpha\sqrt5}{2\cdot10^k-L_\alpha+F_\alpha\sqrt5}\right]$$

$$=\frac{1}{10^k\sqrt5}\left[\frac{(L_\alpha+F_\alpha\sqrt5)(2\cdot10^k-L_\alpha+F_\alpha\sqrt5)-(L_\alpha-F_\alpha\sqrt5)(}{(2\cdot10^k-L_\alpha)^2-5F_\alpha^2}\right.$$

$$\frac{2\cdot 10^k-L_\alpha-F_\alpha\sqrt{5})}{}\,]$$

$$=\frac{4\cdot 10^k F_\alpha\sqrt{5}}{10^k\sqrt{5}(4\cdot 10^{2k}-4\cdot 10^k\cdot L_\alpha+L_\alpha^2-5F_\alpha^2)}$$

$$=\frac{4F_\alpha}{4\cdot 10^{2k}-4\cdot 10^k\cdot L_\alpha+L_\alpha^2-5F_\alpha^2}$$

$$=\frac{4F_\alpha}{4\cdot 10^{2k}-4\cdot 10^k L_\alpha+4(-1)^\alpha}$$

（$L^2_\alpha-5F_\alpha{}^2=4(-1)^\alpha$ 詳下所註）

$$=\frac{F_\alpha}{10^{2k}-10^k\cdot L_\alpha+(-1)^\alpha}$$

故得所欲證。

〔註：$F_\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^\alpha-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^\alpha]$

$$F_\alpha{}^2=\frac{1}{5}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^\alpha-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^\alpha]^2$$

$$\therefore\quad 5F_\alpha{}^2=(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{2\alpha}+(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{2\alpha}-2(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^\alpha(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^\alpha$$

$$=(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{2\alpha}+2(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^\alpha(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^\alpha+(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2-4(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^\alpha(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^\alpha$$

$$=[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^\alpha+(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^\alpha]^2-4(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2})^\alpha$$

$$=L_\alpha{}^2-4(-1)^\alpha$$

$$\therefore\quad L_\alpha{}^2-5F_\alpha{}^2=4(-1)^\alpha\qquad]$$

本文所提式⑽稱之為學生性質，在證明式⑺時却發揮了它的功效，若沒有式⑽，則這個證明會更煩，這個式子使一個二項式的展開變成只是二個代數和，其實這項結論，是作者在計算上面四個表時就已發現。

6. 結　　論

在參考資料〔2〕中，曾討論廣義費氏數列的式子；當 a,b,c,d 皆是正整數，$T_0=c$，$T_1=d$，$T_n=aT_{n-1}+bT_{n-2}$，則 T_n 為

$$(19)\quad T_n=(\frac{c}{2}+\frac{2d-ca}{2\sqrt{a^2+4b}})(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2})^n-(\frac{c}{2}-\frac{2d-ca}{2\sqrt{a^2+4b}})(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2})^n$$

$$=\frac{2d-ca}{2}[(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2})^n-(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2})^n]+\frac{c}{2}[(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2})^n+(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2})^n]$$

$$=\frac{2d-ca}{2}R_n+\frac{c}{2}S_n$$

$$(20)\quad R_n=\frac{1}{\sqrt{a^2+4b}}[(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2})^n-(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2})^n]$$

$$(21)\quad S_n=(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2})^n+(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2})^n$$

T_n 是廣義費氏數列一般項，如果 $c=0$，$a=b=d=1$，T_n 就變成式⑷所表示狹義費氏數的一般項，又如 $c=2$，$a=b=d=1$，則 T_n 就變成式⑻所表示的路卡斯數列。又當 $c=0$，$d=1$，T_n 就變成 R_n；$c=2$，$d=a$，T_n 就成 S_n，由此可見 R_n 與 F_n 很相像，S_n 與 L_n 很相像，它們亦有類似學生性質。

$$(22)\quad (a\pm\sqrt{a^2+4b})^n=2^{n-1}(S_n\pm R_n\sqrt{a^2+4b})$$

應用上面所述的方法，我們可以很容易求出下列級數之和。

$$(23)\quad \sum_{i=0}^{\infty}10^{-k(i+1)}T_{ai}$$

$$=\frac{\frac{c}{2}(2\times 10^k-S_\alpha)+\frac{2d-ca}{2}R_\alpha}{10^{2k}-S_\alpha\cdot 10^k+(-b)^\alpha}$$

(24) $\sum_{i=0}^{\infty}(-10)^{-k(i+1)}T_{\alpha i}$

$$=\frac{-\frac{c}{2}(2\times 10^k+S_\alpha)+\frac{2d-ca}{2}R_\alpha}{10^{2k}+S_\alpha\cdot 10^k+(-b)^\alpha}$$

此處求和時在 $r<1$ 時才有結果，當 $r\geq 1$ 時級數發散，無和可求。也就是

$$\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2\sqrt[\alpha]{10^k}}\right)^\alpha<1$$

利用(22)化簡爲

$$\frac{S_\alpha+R_\alpha\sqrt{a^2+4b}}{2\times 10^k}<1$$

當 $c=0$，$a=b=d=1$，$k=1$，$\alpha=5$

$$\frac{S_\alpha+R_\alpha\sqrt{a^2+4b}}{2\times 10^k}=1.1090\cdots>1$$

故表1上 $k=1$，$\alpha=5$ 是空白。

參考文獻

1. Richard H. Hudson和C.F. Winans. "*A Complete Characterization of the Decimal Fractions that can be Represented as* $\sum 10^{-k(i+1)}F_{\alpha i}$ *, where* $F_{\alpha i}$ *is the* αi*-th Fibonacci Number*". The Fibonacci Quarterly 1981：p. 414～p. 421
2. Calvin T. Long. "*The Decimal Expansion of* 1/89 *and Related Results*." The Fibonacci Quarterly 1981：p. 53～p. 55.（中文可閱數學傳播22期）
3. C.F. Winans. "*The Fibonacci Series in the Decimal Equivalents of Fractions*." A Collection of Manuscripts Related to the Fibonacci Sequence. 18 th Anniversary Volume. p. 78～p. 81
4. 費氏數列與路卡斯數列的數值表

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584	4184
L_n	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	332	521	843	1364	2207	3571	5778	9349

（本文作者現任職於台電公司營建處