漫談 數學應用與應用數學

戴久永

大家都知道「數學是科學之后」，但是談起數學，一般人却都對它持「敬鬼神而遠之」的態度，很多人都認爲數學是一門枯燥的學科，在學校已飽受其苦，也有人說學了數學又有什麼用？

比方說男仕與女朋友的交往難道事先一定要先調查清楚對方是否一定有錢有勢才開始追求嗎？這樣一來，女方又怎能知道這種追求是愛她本人還是她的家財呢？數學正像是一位富國的公主，學習數學過於講求它是否有用，必然無所得，而眞正愛她的人自然會受益。陳之藩博士在他的「劍河倒影」一書中，曾提到英國名科學史家李約瑟博士所著的「東西方的科學與社會」中，比較了中西科學而且談到中國科學對西方的影響，同時附有照片或圖片作爲證明。陳先生在閱完該書之後，提出了一個令人沈思的問題：「爲什麼中國人曾有那麼多的發明，却沒有導出像歐洲近五百年的科學發展？」他的結論是「中國科學在整個發展過程中主要是爲了「實用」，而歐洲近五百年來的科學發展，主要是爲了「好奇」。事實上數學的起源本來就是在解決人們實際所遭遇到的各類問題，但是如果過於强調「實用性」，任何數學結果均採用是否對現實狀況「有用」的尺度來衡量，這種短視的現實主義必然會使數學的發展大受局限，數學的理論必也因此日趨枯萎。

筆者並不是有意責怪居然有人會說「學了數學有什麼用，也並非不贊成講求數學的實用性。其實對於數學採用實用性爲判斷其價值的準則的作法，並不是現在才有。據說歐幾里得曾有個學生問他「研究幾何有什麼用？」歐氏令奴僕給這個學生三個便士，「因爲他必須由所學中獲得利潤。」由於古希臘人的不過於重視應用，使得數學發展在那個時期曾有一段光輝的歲月。當羅馬人征服了希臘，由於羅馬人對於數學、科學和哲學的進步全然不感興趣，只專注能直接應用於農業和建築的實用知識，例如羅馬的大建築師只應用一些不需要瞭解任何科學技術的基本規則，因此當時數學的進展只有停滯不前了。

學了數學有什麼用？我們把它姑且分爲直接應用和間接應用兩部份來談。首先談一下間接應用（或無形的應用）。

(1)現代人天天過著刻板的生活，以致容易呈現動脈硬化的症狀，惹起腦筋麻痺的現象，藉著這樣綳緊的頭腦，當然不可能產生豐富的獨創力或偉大的想像力。怎樣才能保持腦部的

靈活奔放呢？據說在當代的大物理學家愛因斯坦的書房一角，堆滿了有關數學遊戲（mathematical puzzles ）的書籍，他常駐足在這角落，做做臨時性的智力活動。這個小故事充分說明了數學的間接用途之一。

⑵學習數學，不但訓練我們對邏輯推理的思考能力，而且培養了分析與組織的能力，使我們能遇事獨立思考判斷、分析綜合，雖然未能隨時把學校所學數學技巧，用來解決個人日常生活所遇的問題，但是由解決數學問題所養成的推理、分析、歸納以及綜合等方法和精神却會在我們平時處理事務中自然而然地流露出來。

⑶由於對於機率理論的理解和統計學的薰陶，使我們遇事變得思考更爲具有彈性和週全，並且也更能客觀中肯地回答問題，凡事均懂得事先蒐集數據，據理以爭，有幾分資料說幾分話，這種理性的科學態度正是如今這個時代所迫切需要的。

數學的應用實有其不同的層次，日常生活中或許要以算術的加減乘除最爲實用。然而簡單的工具只能解決簡單的問題，倘若想解決複雜一點的問題，非有高深一點的工具就沒有辦法了。譬如我們想釘一枚釘子在牆上，只需要一個鐵鎚就夠了，如果要進行精密的工作，非得用精密的工具不可。反過來說，用精密的工具做簡單的工作，有時候給人一種「殺雞用牛刀」的滑稽感覺，有時候可能根本派不上用場也說不定是一樣的道理。一般人在日常生活所遭遇到的問題層次不會太高，因此在學校所學的高深數學也就「英雄無用武之地」了。

接著我們來談一下數學的直接應用。有人把它劃分成「內應用」和「外應用」，也有人把它歸類爲「短程應用」和「遠程應用」。所謂內應用就是把數學的結果仍應用於數學之中。例如我們在解固有值問題時，利用到分解因式，或利用代數方法解決幾何上的問題。一般人所說的應用多爲指數學的「外應用」，就是把數學應用於其他方面。數學中的算術、幾何、代數以及三角是工程計算的基本工具，對局論（theory of game） 是利用數學分析步驟把人性的行爲影響於決策的因素加以研究。

所謂「短程的應用」是立即的應用，例如學了算術，就可在上街買東西時立即派得上用場。「長程的應用」則是在數學理論發展的當時，並不知道有什麼實際用途，事隔多年才發現它的用處。譬如古希臘幾何學家阿波羅尼斯研究了圓錐曲綫論，當時並沒有任何應用，事隔一千八百餘年後，德國數學家兼數學物理學家刻卜勒讀到阿氏的著作，進而把它用到光學和拋物綫迴轉鏡面的研究上，後來更進一步把行星的軌道用橢圓來描述，爲牛頓的萬有引力理論奠定了基礎。這種長程應用現象的發生實在於理論領先技藝或實用的緣故，正如計算機的發明早在十九世紀英國數學家包貝治（Chorle Bobbaze，1792-1871）就已有那種構想，但是由於技藝的無法配合而失敗，所以不是無用，而是時機還未成熟而已。

早先我們曾提到數學發展的起源是由於實際的需要，譬如爲了大量土地，發展出了幾何學；爲了播種需要，觀看日月星辰的變化，結果訂出了曆法。數學的發展也是藉著社會文化的進步爲原動力。例如十七世紀由定量數學進入變量數學的發展，也就是由代數方程式的研究轉變爲微積分的發明，就是當時歐洲的人們想要對曲綫加以研究，對於運動（motion ）的研究和其伴隨而來的觀念如速度、加速度，都導致對「研究動態的數學」的渴求。天文學家體認到星體是沿著橢圓軌跡進行，並且任一星體的速度隨時在變，他們渴望求出星體在任一瞬間的速度。軍事上的發展，爲了求精確有效地發射砲彈，命中目標及射程遠近的投射體運動問題，這種種事實證明了文化上的需求助長了數學的發展。

許多人認爲微積分的發明是現代數學的開端，隨著時間的流逝，數學的發展的結果，出現了許多新的分支，如今數學也逐漸被人們劃分成純粹數學和應用數學兩大類。事實上，截

至上一世紀爲止，一個有成就的數學家必定在應用方面有所表現。那時的數學家除了數學中的抽象世界之外，他們的腦海中還有一個充滿了各種自然現象的眞實世界。

其次，我們來看看什麼叫做應用數學？依照字面上的意義，應用數學就是具有實用價值的數學。這個意思含糊廣泛的定義固然可以爲大多數的數學家們所接受，但是用於討論時，却嫌太不明確。然而我們想要得出一個較嚴謹的定義却又困難重重。因爲在進行嘗試的時候，我們將會發現自己陷入了一個長久以來，一直存在著的有關「純數」與「應數」上「純粹」與「應用」之哲學意義和技術意義激烈爭辯的泥淖。

由於哲學意義的爭辯不是我們討論的重心，因此我們對應用數學的界定不妨採用1968年一群美國著名數學家們所提議的定義。這個團體就是美國國家科學學術院（National Academy of Sciences）的「支援數學科學研究委員會」Committee on Support of Research in the Methematical Sciences）。簡稱COSRIMS。他們主張把數學科學中和其他科學以及技藝有直接和重要關係的四大主要項目歸類成應用數學：計算機科學、作業研究、統計學和物理數學（古典應用數學）。但是該委員會並沒有稱其他的科目爲純粹數學，而是稱邏輯、數論、代數、幾何以及分析等傳統的學科爲「核心數學」（csntral core of mathematics）。然而我們却不應把應用數學和核心數學的區分視爲固定不變。我們可以抽取任何核心的數學，從日常生活所用的簡單算術到使用於天文學和物理學上的複雜現代數，來應用。另一方面，核心科目的許多主要觀念和想法也可溯源於數學之外的問題所引發。譬如數學與物理之間的關係明示了這種雙向的交互影響，不但在物理上引用了許多數學應用，同時物理問題也刺激了新數學的發展。微積分就是一個著名的例子。另外，有時候，物理模式也曾被用來解決數學問題，譬如 G. Polya的 *Induction and analogy in Mathematics* Vol Ⅰ, Ch Ⅱ上提到某些優選問題（ Optimization problems ）。

恰如美國數學史家Dirk J Struik 在他所著的 *A Concise History of Mathematics* 上所說的，十九世紀時，新的數學研究逐漸脫離了把力學和天文學視爲精確科學的最終目的的古典趨向。事實上，到了1870 年，數學已成長爲龐大拙笨的結構，分成許許多多的領域，每一領域只有專家才瞭解它的內容。這種數學成長上的「繁殖」，在十九世紀大量地發生。到了二十世紀更是昌盛一時。數學知識和技巧在範圍上擴大了，因而數學能夠應用得上的學科自然也大大地增多，遠超越了傳統上集中於物理科學的作法。尤其，在二次大戰以後，數學發展的主要趨勢是在生物科學、行爲科學和社會科學各方面的應用增加得特別快。例如Richard Stone 在1964 年寫道：「七十五年前，Irving Fisher （美國經濟學家）宣稱全世界的出版物中，關於數理經濟學（ Mathematical Economics ）稍具價值的書或論文不會超過 50 件，今天的局面大大地改觀了，不僅是經濟學，就是其他社會科學也是一樣，每年有上千種出版，堆向已是堆積如山的數學著作。」John G Kemeny 在他的一篇研究報告中指出，將數學應用到社會科學上的困難在於社會科學比物理科學複雜。一群人的行爲比行星系統中的軌跡難以掌握。這個事實不但使得社會科學發展較晚，同時也在於難於引用數學方法。對於數學家來說，最感興趣的問題或許是現今的數學是否足以應付這麼複雜的問題。假如答案是否定的，那麼正如物理科學在過去所扮演的角色一樣，生物科學、社會科學和行爲科學可以做爲引發新的數學分支的泉源。換句話說，數學可以用來解決這些新領域所發生的問題，同時這些領域也刺激新的有趣的數學形式。例如，國家公園體系中交通路綫，大都市垃圾車的排程，心理學上成對比較試驗結果的分析、實驗室內研究基因內在結

構等等問題。在這些個案中，必須有新的數學工具的發明，才足以得出令人信服的數學應用，才適於處置這些領域引發的困難數學問題。

但是這個現象對於社會學家、生物學家或行爲科學家們又代表了什麼意義呢？經濟學家、社會學家、心理學家、政治學家，甚至於歷史學家又如何能從這種數學的新方向上獲益呢？我想最主要的問題或許就是溝通。爲了改進溝通的可能性，社會科學家們必須多學點數學，而數學家們也應警覺到社會學家們可能帶給他們的各種問題。

數學有用性的一般批評相當良好，但是如今的問題是，如何把數學應用於社會科學上的種種問題。最基本的方法要算是數學模式的建立了。DonielP Maki和Maynard Thompson在他們的著作 *Mathematical Models and Applications* 一書中把它的過程分爲五個步驟。

數學模式的建立起始於現實世界上的一個問題。這個或許是如何設計出一個抽樣方法能準確地預測選擇結果；如何規劃利用農場的面積，獲取最大利潤；如何決定某一產品是否可推出上市；如何瞭解一個國家的經濟，以便進行有效的經建計劃或其他任何來自實際生活所遭遇的情勢。這第一個步驟就是對於問題的確認和描述，必須由對於問題有深刻認識的本行人士來做。

第二個步驟是努力將問題變得精確，目的是在於把非必要的資料捨棄，使問題簡化。例如一位心理學家設計一個學習實驗，利用猴子越越障碍，則攀登越過的障碍個數和爬行越過的障碍個數相比，對於最終結果並沒有什麼差異，因此沒有區分的必要。而減輕障碍的困難程度或猴子的年齡或性別的不同對於結果却有顯著差異。在仔細分析問題之後，接著進行第三步。

在這個階段，我們試著把整個問題改爲用符號表示，也就是把實際模式改成數學模式。這個步驟非常重要，同時也是最困難的階段。倘若數學模式的設立並沒有反應出眞實模式，那麼所得的結果必然不太有用。另外，對於每一個問題，並非永遠有一個最佳模式，而是依據不同觀點，可能得出不同模式。

由第三個步驟出來了數學系統之後，我們利用適當的數學概念和技巧來研究它。這種研究的結果通常以數學式子表示，是問題的原提出人做成結論的基礎。有時候，新的數學分支會由這裡產生。但是這種能視爲受益的副產品，主要的目的在於產生關於問題的新資訊。在這個階段，最重要的貢獻或許要數辨認出現於正在分析的問題與已知數學結果的關係。

最後的步驟是把預測的結果和實際現實事件相對比。所有可能解中的最佳解是把所有實際觀察到的都包括在數學模式。但是列出建立數學模式的過程比實際上去設立它容易得多了。由過程的描述來看，似乎比實際情況要簡潔得多。在實用上，社會科學、行爲科學甚至生物科學上的問題中，經常牽涉到非常難以數量化的因素。在面對這種問題的時候，則由實際問題轉化爲數學模式的過程中，重要的元素很可能就遺失了。

從某種意義上來說，我們每個人都有過一些處理數學模式的經驗。解決應用題牽涉到一部份建立模式的過程。譬如在小學的時候，我們爲了要回答如下的問題必須決定用加法或減法：已知小嵐有25元，小達有37元，試問小達比小嵐多幾元？我們就需要把實驗問題改爲數學形式。

事實上，成功地設立一個數學模式所需要的才能相當廣泛，除了對實際問題的理解和適當的數學底子都是必要的條件之外，更有甚者，從不同問題中看出類似的型式（ pattern ）的能力以及辨認基本架構，對於模式設立就像在純粹數學中一樣重要。

如今，數學的應用可說是無所不在。我們看看以下一部份在美國最新出版的書名就可見一般。

- Iannis Xenakis *Formajized Music: Thought and Mathematics in Composition* Indiana University Press 1971
- F. R. Hodson *Mathematics in the Archaeological and Historical Sciences*
- Ernesto Zierer *The Theory of Graphs in Linguistics*
- Gustav Levine C·J. Burke *Mathematical Models Technigues for Learning Theories*
- Robert G Murdick *Mathematical Models in Marketing*
- Murray A Beauchamp *Elements of Mathematical Sociology*
- Haig Edward Bohigion *The Foundations and Mathematical Models of Operations Research with Extensions to the Criminal Justice System*
- Frank Restle *Mathematical Models in Psychology*

另一方面，我們今天所享受的現代物質文明，例如飛機、電視、冰箱，以及由氣象衞星得到資訊的氣象預報或檢驗用的精密儀器及生產器械的製造，無一不與數學有關。伊索寓言上有一則故事，「有一群旅人經過漫長的旅途之後，看見路旁有一棵大樹，大家就坐在樹底下休息，好不涼快舒服，他們三言兩語地討論起這種樹有什麼用途的問題，結論是「無用處」，過了一會他們站起來繼續未完的旅程。大樹說：「忘恩負義的人啊，沒有我，你們剛才休息的時候會那麼舒服嗎？數學大概就像那棵大樹吧！

莊子逍遙篇中莊子對惠子講了一個故事：「宋國有個人善於製造使手不龜裂的藥，他家世代都以漂洗絲絮爲業，有一個客人聽說這種藥物，願意出百金收買他的祖傳密方，這個宋人召集了全家人來商量說：「我們家世代漂洗絲絮，只得到很少的錢渡日，現在只要賣出這個密方就可獲得百全，就賣了吧！客人得到藥方，便去遊說吳王，這時越國侵犯，吳王就派他將兵，冬天和越人水戰，大敗越人。於是吳王割地封賞他。同樣是一個使手不龜裂的藥方，有人因此得以封王，有人却只是用來漂洗絲絮；這就是使用的方法不同吧！我們對數學也應持這樣的觀點。數學並非無用，端視你如何來用它，所謂「運用之妙，存乎一心」，正是這個意思。

數學之爲數學，有其精神、方法和其哲學背景。王九逵博士說得好：「數學雖非哲學，但和哲學一樣崇尙理智的活動；數學雖非文學或音樂、藝術，却也像駢體文或莫扎特的樂章，有其安謐的靜態美。」我們知道科學的內涵不僅在於客觀知識的累積，更在於追求這些知識背後的精神。數學中有冷靜的深思和邏輯的諧調，我們學習數學，除了注重它對解決問題的實用價值之外，更應厚植我們的欣賞力和好奇心，希望藉著它潛移默化的力量使我們被文明重累緊緊壓縮之下的頭腦，活動起來，培養起自由奔放的思考力，進而把握充滿著夢想與希望的工作或生活方向。

附註：一份書單

對於數學的一般性討論，不必具有數學計算根底就可閱讀的，可參閱David Bergamini

和Life編輯部所編的Life Science Library叢書中 *Mathematies* 一書(New York ,Time Inc 1963)。中譯本由傅溥翻譯,書名爲「數學漫談」,台北美亞圖書公司印行。

James R Newman 所編的四册 *The World of Mathematics* (New York ,Simon and Schuster 1956)含有各類討論數學各層面的文章。

Mathematics in the Mordern World (San Francisco ,W.H. Freeman 1968)是一本觸及數學文方面的文集,這些文章原本出現於1948年至1968年的Scientific American,由Morris Kline 編輯並且介紹。本書的中譯本「現代數學」由台北黎明文化事業公司出版。

COSRIMS 出版了數學專家們所寫較爲專門性的數學文集 *The Mathematical Sciences : A collection of Essays* (Cambridge ,Mass ,MIT Press 1969),本書的目的雖然在於向非數學的外行人士介紹現代數學的各分支,但是由於內容是說各數學領域內的目前研究的問題,有些內容相當深入,不易爲外行人所瞭解。另一本也是由COSRIMS所出版的 *The Mathematical Sciences : A Report* (Wathington D.C.National of Sciences 1968)是敍述數學的進展和(由1968 年)預測未來數學研究的可能目標。

關於數學史方面,最具可讀性的大概要數Dirk J. Struik所寫的 *A Concise History of Mathematics* 3rd editim(New York ,Dover 1967),內容包括至十九世紀爲止的數學發展。美國名數學史家E.T.B. Bell 所著 *Men of Mathematics* (New York ,Simon and Schuster ,1937)則專注於偉大數學家的生平和著作,他的另一本著作 *The Development of Mathematics* (New York ,Mc Graw Hill ,1945)則强調現代數學,這兩本書都相當生動有趣。Morris Kline 所著 *Mathematics in Western Culture* (New York ,Oxford University Press ,1953)是一本數學和文化交互影響史,而不純是數學史。

至於對於較專門性的數學模式的建立感興趣的話,Doniel P. Maki 和 Maynard Thompson 合著的 *Mathematical Models and Applications* (Engleword Cliffs ,N.J. Prentice Hall ,1973)可供參考。這本書必須要學過微積分的讀者才看得懂,但是少數章節不必用到微積分也可以理解。另外一本是Fred S. Roberts 的 *Discrete Mathematical Models with applications to social ,biological and environmental problems* ,介紹在社會科學,生物科學以及環境科學方面的模式建立。M,Braun 的 *Differential Eguations and Their Applications* (2nd edition) 中則介紹了如何用微分方程建立數學模式,解決實際問題的實例,相當有可讀性。

最後,對於數學史有興趣的讀者可參閱數學傳播第四卷第一期筆者所寫「閒話數學史」一文後面所列書目或筆者所編「現代數學入門(上),(新竹凡異出版社)。

(本文作者現任敎於交大管科系)