數 學 一 二

編者註：本文作者現專任美國馬利蘭州立大學數學系教授。曾於 1979 年獲Sloan Fellowship，1982年獲Gugenheim Fellowship。1980年6月至8月及1982年8月至1983年7月在本所做訪問研究。

劉太平

數學家喜歡在閒暇的時候，談些哲學性的問題：那位數學家較行？什麼是（好的）數學？數學的本質爲何？等等。研究數學非常有趣，時而愉快，但卻不是輕鬆的。許多人把聊這些問題當做一種調劑、可以一次再一次的重覆，而得不到一致的結論。這正足以反映數學內涵的博大精深，無法以固定的尺度來衡量。有的數學理論以內在結構的完美見長，有以闡釋而解決其他學科的問題而取勝。或新技巧、或新看法。正是各有千秋、難分上下。

什麼是數學？這類問題我自然也極感興趣，這些年來所得的答案一再改變，如果我把現得的答案說出來，等別人看到時說不定已不能代表我那時心裏的想法了，不如不說。在這裏我只想舉三個淺顯的例子，向中小學的數學同好們談及數學裏一些美妙的想法。這些例子都是以前小學生讀過的，頂多只是算術裏的一麟半爪；然而它們和某些較深入的數學在精神本質上是相通的。

雞兔同籠，頭共 16 ，
脚共 40 ，問雞兔各幾
隻？

這個「雞兔問題」（ 雅稱龜鶴問題 ）的解法很簡單：先假設 16 隻全是雞，這只得 32 隻脚而少了 8 隻脚，當然不對。如果把其中一隻雞換成一隻兔，就多了兩隻脚，因此爲了補足少了的 8 隻脚，得換 4 隻雞，而答案爲：雞 12 隻，兔 4 隻。我剛學到這個解法的時候，覺得很有意思，還記得和家附近的農夫們談及，他們也覺得很妙。其要點爲：第一步先猜個不太離譜的答案（16隻全是雞），通常是錯的，這不要緊，只要「知過能改」，下一步再設法改進（把一些雞換成兔子）。對于雞兔問題一步改進便解決了，比較複雜的問題卻必須好幾步，甚或無窮多步的改進才得解決。這種漸近的手法在數學上很重要，譬如要找多項式 $P_n(x)=0$ 的實數解，先設法找兩個數 x_1 和 x_2，$P_n(x_1)<0<P_n(x_2)$，再令 $x_3=(x_1+x_2)/2$。若 $P_n(x_3)>0$，那麼一定有個解在 x_3 和 x_1 之間，故令 $x_4=(x_1+x_3)/2$。反之，若 $P_n(x_3)<0$ 令 $x_4=(x_2+x_3)/3$。如此可得一列數 $x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots$，漸近 $P_n(x)=0$ 的一個解。二項式三項式乃至四項式，$n=2, 3, 4$，都有現成的公式可解，漸近法既只能逼近而不能在有限步驟內得到眞解，因此顯得不如現成的公式。其實不然，現成的公式含有根號，在一般學科的應用上所要的是小

數點的近似，與其把這些根號開出來，還不如用漸近法來得簡便，更何況大部份的方程式是沒有公式可解的。自從計算機問世以來，漸近手法變得切實際而發展成數學的一大分枝。

三點和四點之間，時針分針何時重合？

粗想起來，這個「時鐘問題」的答案在三點十五分和三點二十分之間。三點時，時針在十五分位置，等到分針走到十五分時，時針已在十五分又多一點的位置了。如果用這個角度來看，這個問題還不簡單呢。一個簡單的方法是把它類比成「賽跑問題」：開始三點的時候，時針在分針之前十五尺，每分鐘分針走一尺而時針只走 5／60 尺，差別爲 11／12 尺，故分針追上時針需時 $15 \div 11/12 = 16\frac{4}{11}$ 分，而答案爲：時針和分針在三點十六又十一分之四分時重合。我幼時習慣把時針比做烏龜分針比做兔子，這是類比把在直覺上不同的問題，看出它們在本質上相同的地方，進而研討這個本質，是數學上極重要的想法。對上述的問題，這個本質是兩個東西相追的事，很容易研究清楚；可是給一個具體的問題，要找出一個合適而已被研究過的法則來解決它，是數學上一個重要而並不簡單的課題。數學上類比的例子不勝枚舉，譬如聲波的傳遞和一條彈性絲的擺動都可用波動偏微分方程式來描述，晶體結構的變化和一串珠子的排列均合乎群論的法則。

1 至 100 之間有那些質數？

一個自然數如果是兩個大于 1 的自然數的乘積，便不是質數，如 6（＝2×3），12（＝3×4）均不是質數；反之，1，3，5，7 都是質數。在還沒有解這個問題之前，你可能要問：「爲什麼要看這個問題？」偶而問問這樣的問題是好的，研究科學最重要的便是要問對問題。話說回來，也不能常常問這樣的問題，有些基本的科學理論並不是一時間可以看出它的好處。我們現在討論的質數問題並不只是一種數字遊戲；任何一個自然數都可以寫成幾個質數的乘積，因此質數可以說是自然數裏的基本粒子，質數的研究便顯得有意義了。1 至 100 之間有那些質數？這個問題只要花時間便一定可以解決，從 1 到 100 一個一個數目去查驗便得了。答案是：1，2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，31，37，41，43，47，53，59，61，67，71，73，79，83，89，97。如果你眞的一個一個去查，便會發現有些省力的辦法。譬如偶數都可被 2 整除，因此除了 2 以外其他偶數皆不是質數，奇數中結尾是 5 的二位數可被 5 整除。有個比較重要的法則：如果 $x = yz$，那麼 y 和 z 之一必不大于 $\sqrt{x}$，是以一個自然數如果不被小于它的平方根的質數（1 除外）所整除，那麼這個自然數一定是個質數。如我們很快就可以查知 83 不能被 2，3，5，7 所整除，而又沒有其他小于 $\sqrt{83}$ 的質數，我們便可斷定 83 是個質數了。剛提到的這些法則可以用來查驗任何一個自然數是否爲質數，如果你把我們當初的問題用上法去做，再反覆思考，便可得到這些法則。如果你再去看些別的問題，腦子便慢慢靈通起來，很快可以察覺自己是否在繞圈子走遠路。一般所謂的「數學的成熟度」比知道記得許多東西來得重要。說到一般法則，通常是由簡單問題出發，經過提鍊而得到的，如果一下子便想解決一個複雜的問題，常常會徒勞無功而流于玄想。即使像高斯那麼偉大的數學家，他還是耐著性子，花了很多時間去估計質數的總數，他由一估計到一百萬，然後再提出有名的質數定理的憶測。苦功夫是不可少的。

什麼是數學？這常常要看學習者的態度而定。如果把上述的第一個問題化成初中的代數問題，並不增加其數學成份，如果不加思考而只套用現成的公式，那便不是數學了，什麼也不是。