數的概念(下)

康明昌

3. 有理數系

正整數是從古代以來人類計數（counting）的工具。可以說，從「一頭牛，兩頭牛」或「五個人，六個人」抽象化成正整數的過程是相當自然的。事實上，我們有時候把正整數叫做自然數（the natural numbers）。

從現代的觀點來看，「負數」（the negative numbers）的概念是很簡單的。但是負數的誕生以至人類廣泛的接受負數的概念却是一段遙遠漫長的路程。負數和零的概念是印度人創造的，這些概念在文藝復興時代才傳入歐洲。經過四、五百年的考驗，直到十九世紀，歐洲人才安心的使用負數與零。

正整數、零，和負整數合稱爲整數（the integers）。整數是人類能夠掌握的最基本的數學工具。十九世紀德國大數學家 Kronecker 因此說：「只有整數是上帝創造的，其他的都是人類自己製造的。」（註）

有理數（the rational numbers）是可以表示成 $\frac{q}{p}$ 的型式的數，其中 p，q 是整數，$p \neq 0$。有理數就是同學所熟知的分數。

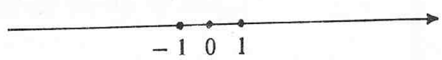
用 Kronecker 的話來說，有理數雖然不是上帝創造的，上帝並不禁止人類使用有理數。當我們想要解方程式

$$px = q \text{，其中 } p, q \text{ 是整數，} p \neq 0$$

我們就不得不求助於有理數。

在有理數系裏面，我們可以做加、減、乘、除。不過要注意，0 不能做除數。兩個有理數可以比較大小。

如果我們取一條直線（如下圖），任選一



註：Leopold Kronecker（1823 ～ 1891）這句話的用意是，只有整數的概念是精確而不容置疑的，其他的數學概念，如有理數實數，都應該建立在整數的基礎之上。因此把 2π 定義成半徑爲 1 的圓周的長度，不如定義 $\frac{\pi}{4}$ 是 $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+-\cdots\cdots$。Kronecker是當時柏林大學的教授，他的主要貢獻是，代數數論，橢圓函數，理想論，二次型理論。

點當做0，取一個單位向量，在0的右邊一個單位向量的地方標上1，在0的左邊一個單位向量的地方標上-1。我們由平面幾何的作圖方法，可以得到任意長度$\frac{q}{p}$的綫段，因此我們可以把任意有理數$\frac{q}{p}$標在這條直線上。我們恒把正有理數標在0的右邊，負有理數標在0的左邊。這樣得到的直線叫做數軸（the number axis）。

有理數在數軸上的分佈簡直是濃濃密密，擁擠得不得了。任何兩個相異的有理數a與b之間，一定還可找到一個有理數，理由很簡單：可以假設$a<b$，那麼$\frac{a+b}{2}$就是一個介於a與b之間的有理數。同理，如果你認爲只找出一個有理數未免太少了，你要找更多個，例如，找出99個介於a與b之間的有理數，那麼$a+\frac{b-a}{100}$，$a+\frac{2(b-a)}{100}$，$a+\frac{3(b-a)}{100}$，……，$a+\frac{99(b-a)}{100}$就是一組答案。

問題：有理數能不能把數軸填得滿滿的，毫不遺漏？

這個問題是我們在下一節所要討論的主題。這個問題相當於，是不是任意有限線段的長度都是有理數？

習題5

1. 證明兩個相異的有理數之間有無窮多個有理數。
2. 若a，b是任意兩個有理數，且$a>0$。證明：存在一個正整數n，滿足$na>b$。
3. 證明任意有理數都可表示成循環小數。

4. 實數系

是不是任意有限線段的長度都是有理數？邊長爲1的正方形的對角線的長度是$\sqrt{2}$。$\sqrt{2}$是不是有理數？

例題：試證$\sqrt{2}$不是有理數。

證明：用歸謬法證明。

假設$\sqrt{2}$是有理數。因此$\sqrt{2}=\frac{q}{p}$，其中p與q是正整數。我們可以把p與q的公因數約掉，所以不妨假設p與q的最大公因數是1。

因爲$\sqrt{2}=\frac{q}{p}$，故得$2=\frac{q^2}{p^2}$。因此q^2是偶數。如果q是奇數，則q^2也是奇數（理由：若$q=2n+1$，n是整數，則$q^2=(2n+1)^2=2(2n^2+2n)+1$是奇數）。因此$q$是偶數，$q=2n$，$n$是正整數。

$(2n)^2=q^2=2p^2$。因此，$p^2=2n^2$，得p^2是偶數，故p是偶數。

p與q都是偶數，則其最大公因數不可能是1。與最先的假設違反。得證$\sqrt{2}$不是有理數。

從以上的討論，可以發現：雖然有理數稠密的分佈在數軸上，但是並不是數軸上的每一點都可以用有理數表示。

顯然，在實際應用上有理數系是不夠用的。我們要加進一些新的數，如$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt[3]{2}$，$\sqrt[5]{\sqrt[7]{2}+\sqrt[4]{3}}$，把有理數擴充成實數（the real numbers）。不是有理數的實數就叫做無理數（the irrational numbers）。

同學可能會提出一些問題：

問題1. 實數系是怎樣建造出來的？

問題2. 無理數是不是都可以用開方得到的，像$\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{2}$，$\sqrt[5]{\sqrt[7]{2}+\sqrt[4]{3}}$？

問題3. 爲什麼要把實數區分成有理數和無理數？證明$\sqrt{2}$不是有理數究竟有什麼用處？

問題4. 是不是數軸上所有的點都可以用實

數表示？

以上四個問題其實都不是很容易回答的。我們解釋如下。

第一個問題。嚴格的建造實數系是十九世紀七十年代才完成的，這要歸功於C. Méary（1835～1911），G. Cantor（1845～1918），H.E. Heine，R.Dedekind（1831～1916），K.Weierstrass（1815～1897）。同學可能會說：「我們只要規定實數系是數軸上所有的點，這樣就造出實數系了。」用這方法定義出來的實數系理論至少有兩個缺點：一不嚴格，表面上我們似乎很熟悉數軸上的點，其實不然。例如，數軸上這個點和那個點究竟有什麼共同的地方和不同的地方，如1，$\sqrt{2}$，π，我們並不清楚。又如，數軸上某些點集合，如〔0，1〕、$(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$、$(\frac{1}{9},\frac{2}{9})\cup(\frac{7}{9},\frac{8}{9})$、………，有什麼幾何性質並不是一目瞭然的。二我們不容易由此得到實數系的基本的性質，如完備性（completeness）。因此十九世紀建造實數系的方法，是用整數和有理數做基礎，運用某些相當精妙的手法建立的。有興趣的同學可以參考本文的「附錄，如何建造實數系？」

第二個問題的答案是否定的。並不是所有的無理數都是用開方得到的。實數可以分成兩種，一種是代數數（the algebraic numbers），一種是超越數（the transcendental numbers）。

一個實數α是代數數，如果

$$a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0=0$$

其中 a_i 是整數且 $a_n\neq0$。

一個實數α是超越數，如果

$$a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0=0$$

其中 a_i 是整數，則必定是$a_0=a_1=\cdots\cdots=a_n=0$。

圓周率π是超越數；這是一個相當困難的定理，這個定理其實是古希臘幾何作圖的三大難題之一(**註**1)。$\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{2}$，或是任意有理數都是代數數。

但是並不是所有的代數數都可以用開方得到。例如，$x^5-4x+2=0$的根都是代數數，但是却不能用開方的方法得到。要證明這件事，必須借助Galois 理論。Galois 理論是一門高深的數學理論，是十九世紀法國的天才數學家 Évariste Galois（1811～1832）創造的(**註**2)。

用開方得到的無理數，在無理數裏面（甚至代數數裏面）所占的比例實在非常小。

第三個問題，爲什麼要把實數區分成有理數和無理數？這其實是西方數學發展的過程所產生的問題。希臘人非常强調整數的重要性。所以有理數也自然的變成最基本的數學概念。因此，當希臘人找到一個無理數時，他們的思想界產生了一次非常劇烈的混亂。反過來看中

註1:古希臘幾何作圖三大難題是，只運用（沒有刻劃的）直尺與圓規，

(1)三等分任何已知角（三等分角問題）；

(2)作一圓其面積等於任意給定的正方形面積（方圓問題）；

(3)作一正立方體其體積爲任意給定的正立方體體積的2倍（倍立方問題）。

這三個問題直到十九世紀才證明是無解的。由於方圓問題的解決，數學家更進一步研究超越數的各種性質，這就是 Hilbert第七問題的背景，其結果是今日理論完美，成果豐碩的超越數理論（the theory of transcendental numbers）。

註2:文藝復興時代的義大利數學家已經知道三次方程式與四次方程式的根的公式。如何求得五次方程式的根的公式，或者更一般的，何種方程式的根可以由其係數作加減乘除開方求得呢？這個問題是由Galois完全解決。Galois在二十一歲時死於決鬥。臨死前把他的結果寫成草稿。他死後將近三十多年，數學家才完全瞭解他的偉大貢獻。

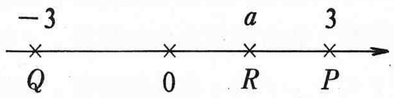
國數學的發展，對中國人而言，數就是整數再附上小數，小數點後面的數可以無窮無盡的點下去。所以對於古代的中國數學家，$\sqrt{2}$ 是不是有理數，並不是一個不得了的問題。他們想都沒想過這問題。

第四個問題的答案沒有人知道。因此 Georg Cantor（1845～1918）在 1872 年提出一個解決的方法，把它當做是對的，不必去證明，這就是以下的

Cantor 公設：所有的實數和數軸上的點成一對一的對應。

像有理數一樣，實數之間可以做加、減、乘、除（不過 0 不能做除數）。任意兩個實數可以比較大小。

我們介紹一個新的概念：絕對值。在以下實數軸中，P 點代表 3，Q 點代表 -3。



OP 與 OQ 有什麼不同呢？OP 的方向是向右，而 OQ 的方向是向左。

OP 與 OQ 有什麼共同點呢？他們的長度都是 3。我們規定 3 的絕對值是 3，-3 的絕對值也是 3，記做

$$|3|=3,\ |-3|=3$$

一般的說，如果 a 是任意實數，定義

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{若 } a\geq 0 \\ -a, & \text{若 } a<0 \end{cases}$$

$|a|$ 叫做 a 的絕對值。

$|a|$ 恒為正數或零。若 R 點是數軸上代表 a 的點，則 $|a|$ 是 OR 線段的長度。

絕對值有下列重要性質：

1. $|ab|=|a|\cdot|b|$；若 $a\neq 0$，$\left|\dfrac{b}{a}\right|=\dfrac{|b|}{|a|}$
2. $-|a|\leq a\leq|a|$。
3. 若 $a>0$，則 $|x|<a \Longleftrightarrow -a<x<a$，
   $|x|\geq a \Longleftrightarrow x\geq a$ 或 $x\leq -a$
4. （三角不等式）$|a+b|\leq|a|+|b|$，
   $|a-b|\leq|a|+|b|$，
   $||a|-|b||\leq|a-b|$。
5. 若 a 為任意實數，則 $\sqrt{a^2}=|a|$。

證明：1. 證明 $|ab|=|a|\cdot|b|$。

若 a，b 有一為 0，則左＝右＝0。其次依 $a>0$ 或 $a<0$，以及 $b>0$ 或 $b<0$，共四種情形，分別驗證。

同理可證 $\left|\dfrac{b}{a}\right|=\dfrac{|b|}{|a|}$，若 $a\neq 0$。

2. 證明亦分 $a>0$，$a=0$，$a<0$ 為之。

3. 設 $|x|<a$，則因

$-|x|\leq x\leq|x|$，以及 $|x|<a$，

$-a<-|x|$，得 $-a<x<a$。

反之，若 $-a<x<a$，則若 $x\geq 0$，

$a>x=|x|$，

若 $x<0$，由 $-a<x$ 得

$a>-x=|x|$，故得 $|x|<a$

4. 因 $-|a|\leq a\leq|a|$

$-|b|\leq b\leq|b|$

兩式相加，

$-(|a|+|b|)\leq a+b\leq(|a|+|b|)$

由性質 3，$|a+b|\leq|a|+|b|$ …(1)

把 b 用 $-b$ 代入(1)式得

$|a-b|\leq|a|+|b|$

在(1)式中，用（$a-b$）及 b 代替 a 及 b，得 $|a-b|+|b|\geq|a|$ 即

$|a-b|\geq|a|-|b|$

同理可得，$|b-a|\geq|b|-|a|$，

合併上兩式，由性質 3

$||a|-|b||\leq|a-b|$

5. 按規定，若 $x>0$，$\sqrt{x}$ 表正的平方根，故若 $a\neq 0$，$\sqrt{a^2}$ 的正平方根為 $|a|$。故若 a 為實數恒有

$$\sqrt{a^2}=|a|$$

習題6

1. 對於任意 n 個實數 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$，試證 $|a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n| \leq |a_1|+|a_2|+\cdots\cdots+|a_n|$。

2. 試求 $|x^2-2x+3|$，$|(x-1)(2-x)|$，$|-1-x^2|$。

3. 若 x 是任意實數，試證 $|x-1|+|x-2|+|x-\sqrt{5}| \geq \sqrt{5}-1$。

4. 試證 $\sqrt{3}$ 不是有理數。

5. 試證 $\frac{1}{10}+\frac{1}{10^{2!}}+\frac{1}{10^{3!}}+\frac{1}{10^{4!}}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{10^{n!}}+\cdots\cdots$，不是有理數，其中 $n!=1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\cdots n$。（這個數其實是超越數，其證明已經超出高中範圍。）

6. 試證 $\sqrt[7]{\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}}$ 是代數數。

7. 若 α 滿足 $a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0=0$，其中 a_i 是有理數，且 $a_n\neq0$。試證 α 是代數數。

8. 如果我們把正有理數排成以下次序

$$\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{1}{2},\frac{3}{1},\frac{2}{2},\frac{1}{3},\frac{4}{1},\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{5}{1},\frac{4}{2},\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots。$$

試證 $\frac{q}{p}$ 是在第 $\frac{1}{2}(p+q-1)(p+q-2)+q$ 項出現。

9. (1)若有理數 $\frac{q}{p}$（p，q 是互質整數，$p\neq0$）是方程式 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_0=0$ 的根，其中 a_i 是整數，$a_n\neq0$，試證 p 可整除 a_n，q 可整除 a_0。

(2)試證 $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$ 與 $\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}$ 都不是有理數。

10. (1)試證任何兩個相異的有理數之間至少有一個無理數。（提示：若 r 是正有理數，則 $0<\frac{r}{2}\sqrt{2}<r$，且 $\frac{r}{2}\sqrt{2}$ 是無理數。）

(2)試證任何兩個相異的有理數之間有無窮多個無理數。

11. (1)試證任意的有理數與無理數之間有無窮多個有理數，也有無窮多個無理數。（提示：設 $r<s$，r 是有理數，s 是無理數，我們只要在 r 與 s 之間找個有理數就夠了。由 Cantor 公設，$\frac{1}{s-r}$ 是某個有限綫段的長度，故 $\frac{1}{s-r}<n$，其中 n 是某個正整數。因此 $\frac{1}{n}<s-r$。$r<r+\frac{1}{n}<s$。）

(2)試證任意兩個相異的無理數之間有無窮多個有理數，也有無窮多個無理數。（提示：設 $r<s$，r 與 s 都是無理數。先找一個正整數 n 使得 $\frac{1}{n}<s-r$。因此 $ns-nr>1$，所以 ns 與 nr 之間必有一個整數 m。故 $nr<m<ns$，得 $r<\frac{m}{n}<s$。）

12. （Archimedes 性質）若 x，y 是任意兩個實數，且 $x>0$，試證：必可找到一個正整數 n，使得 $nx>y$。

5. 什麼是數系？

數最先只是人類計數（counting）的工具。因此人類最先所能想到的數只是正整數而已。

把數的概念應用到日常生活碰到的長度、面積、重量的問題，我們可以用數來表示線段的長度或鉛球的重量。因此數變成了量度（measure）的工具。

把數變成量度的工具，我們立刻發現正整數不夠用。我們既然能夠把三尺長的布裁成兩半，我們就應該能夠把3分成兩半。因此有理數的出現並不令人感到突然。

把數當做量度的工具，令人驚奇的是，有些線段的長度並不是有理數。因此人類不得不造出實數。

有理數和實數是兩種基本的數系，他們的共同特性如下。

對於任意數 r，s，t，恒有

$(r+s)+t=r+(s+t)$
$(r\cdot s)\cdot t=r\cdot(s\cdot t)$ 〔結合律〕

$r+s=s+r$
$r\cdot s=s\cdot r$ 〔交換律〕

$r+0=0+r=r$
$r\cdot 0=0\cdot r=0$ 〔零的特性〕

$r\cdot 1=1\cdot r=r$ 〔1的特性〕

對於任何 r 存在一個唯一的 $-r$ 使得 $r+(-r)=0$ 〔加法可逆性〕

對於任何 $r\neq 0$，存在一個唯一的 $\frac{1}{r}$（稱爲 r 的倒數），使得 $r\cdot(\frac{1}{r})=1$ 〔乘法可逆性〕

$r\cdot(s+t)=r\cdot s+r\cdot t$ 〔分配律〕

對於任意兩個數 r，s，下列三種情形只有一種成立：$r<s$，$r=s$，$r>s$。

若 $r>s$，$s>t$，則 $r>t$。

若 $r>0$，則 $-r<0$。

若 $r>s$，則 $r+t>s+t$。

若 $r>s$，$t>0$，則 $r\cdot t>s\cdot t$。

以上的各種性質是最理想的數系所能夠具備的性質。同學不妨自己檢查，自然數系或整數系具備那些性質，不具備那些性質。

但是並不是具備以上性質的才能叫做數系。像複數系具備以上大部分性質，但是我們不能在複數系裏面定義具備以上所有性質的大小次序關係。（理由：假設可以。⑴先證明 $-1<0$：若 $-1>0$，則 $1=-(-1)<0$；另一方面 $1=(-1)(-1)$ 是兩個正數乘積，故 $1>0$，矛盾。⑵導出一個矛盾現象：若 $i>0$，則 $-1=(i)(i)>0$，矛盾；若 $i<0$，$-1=(-i)(-i)>0$，矛盾。）

去追究「什麼叫做數系」實在不是一件要緊的事，要緊的是：只有在實際上有需要時，我們才會從一個數系推廣到另一個數系。從一個數系推廣到另一個數系，我們可能得到一些新的性質，同時也可能失去一些舊數系所具有的性質。

數學的目的是幫助人類解決各種問題，而不是設下幾條金科玉律要學生去遵守奉行，永不逾越。能夠協助解決人類文明發展過程所遭遇的問題的數學，才是我們所需要的數學。數學的精神是自由（註）。

*附錄：如何建造實數系

本節的目的是要滿足某些好奇心特別强烈的同學。我們將在本節描述建造實數系的手法。同學要注意的是建造實數系的精神，而不是枝枝節節的證明。

事實上我們早就瞭解什麼是實數！遠在十七世紀René Descartes（笛卡爾，1596～1650）早就大膽的把實數和數軸上的點作一對

註：這句話引自德國數學家 Georg Cantor（1845～1918）Cantor 是集合論（Set theory）的創始者。集合論剛出現時，引起數學界極大的騷動。許多有名的數學家，如L.Kronecker，F.Klein，H.Poincaré 都反對它，H.Weyl 甚至說，那是一團濃霧中的一團濃霧。不過也有許多人，如A.Hurwitz，J.Hadamard，D.Hilbert，B.Russel，極力推崇集合論。Cantor 面對Kronecker這麼強硬的反對者，終於精神崩潰，最後在療養院渡其餘生。

一的對應。2這個數，把數軸上的點分成兩類，一種是$\{x : x<2, x$是實數$\}$，另一種是$\{x : x>2, x$是實數$\}$。假使有一個人的右眼瞎了，他永遠只向左邊看（南北朝時代的確有這麼一個皇帝，所以他有一個妃子只化粧半邊臉），那麼2這個數就決定了一個實數的子集合$\{x : x<2, x$是實數$\}$。反過來說，子集合$\{x : x<2, x$是實數$\}$也決定一個實數，那就是2，因爲2剛好是「第一個」比這個子集合裏面任何數都大的數。

所以，我們不妨把2看成$\{x : x<2, x$是實數$\}$，把$\sqrt{2}$看成$\{x : x<\sqrt{2}, x$是實數$\}$。令人驚奇的不是這件事，而是：我們還可以把2看成$\{x : x<2, x$是有理數$\}$，把$\sqrt{2}$看成$\{x : x<\sqrt{2}, x$是有理數$\}$！

當然2這個數決定了有理數（！）的一個子集合$\{x : x<2, x$是有理數$\}$。反過來說，令「第一個」比$\{x : x<2, x$是有理數裏面任意數都大的實數（可能是也可能不是有理數）爲α，我們要證明$\alpha=2$。顯然$\alpha\leq 2$；如果$\alpha<2$，由習題6第11題，必可找到一個有理數a，使得$\alpha<a<2$，因此$a\in\{x : x<2, x$是有理數$\}$，因此α不可能比$\{x : x<2, x$是有理數$\}$裏面的任意數都大。矛盾。

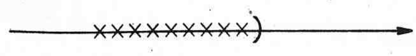
同學自己試試證明：「第一個」比$\{x : x<\sqrt{2}, x$是有理數$\}$裏面的任意數都大的實數就是$\sqrt{2}$。

這個事實說明：我們可以用有理數去捕捉每一個實數，也就是把實數α看做$\{x : x<\alpha, x$是有理數$\}$。

現在我們假裝我們只認得有理數，不認得無理數，因此集合$\{x : x<\alpha, x$是有理數$\}$對我們不一定有意義，因爲如果α不是有理數，以上的集合實在令人難以瞭解。所以，我們要重新來瞭解這個集合。這個集合有什麼性質呢？

1. 這個集合不是空集合，也不是全部有理數。
2. 如果a在這個集合，$b<a$，b是有理數，則b也在這個集合。
3. 這個集合沒有最大的元素。

如果把以上三種性質在數軸上表現出來，我們得到類似以下的圖形：



其中每一個點都是有理數。

幸運的是，以上三種性質剛好決定出一個有理數的子集合$\{x : x<\alpha, x$是有理數$\}$，其中α是某個實數。（證明？）因此我們可以做以下的定義。

定義：一個 Dedekind 切割A（Dedekind cut）（註），或簡稱切割，是一個有理數的子集合，具備以下性質，

1. $A\neq\phi$，$A\neq$有理數全部。
2. 若$a\in A$，$b<a$，b是有理數，則$b\in A$。
3. 若$a\in A$，則必存在一個數α，$\alpha\in A$，$a<\alpha$。

定義：所謂的實數就是某一個切割。

爲什麼要把實數講得這麼古古怪怪的？因爲我們假裝我們不認得無理數，只認得有理數，我們只好驅使有理數利用我們暗地裏早已熟

註：Richard Dedekind（1831～1916）在德國 Brunswick 的專科學校教了三十一年的書。切割是 Dedekind 定義實數的方法。Dedekind 在數學上的貢獻主要在實數系的建造和代數數論。許多抽象代數的基本概念在 Dedekind 的論文中都可找到其原始形式（prototype）。二十世紀二十年代抽象代數的大師 Emmy Noether（1882～1935）有一句口頭禪：「Dedekind 如是說，………」。

知的實數的性質去捕捉實數。

有了切割的定義，我們就可以定義加法和乘法，並規定其中的大小關係。分述如下：

(1)若A與B都是切割，則$A\subsetneq B$，$A=B$，或$A\supsetneq B$。

(2)定義$A<B$，如果$A\subsetneq B$。

(3)若A與B是兩個切割，定義$A+B=\{a+b : a\in A, b\in B\}$。很容易檢查$A+B$是一個切割。

(4)定義 $0^*=\{x : x<0$，x是有理數$\}$。可以證明：

$A+0^*=0^*+A=A$〔加法單位元素〕

對於切割A，必存在一個切割$-A$，使得

$A+(-A)=(-A)+A=0^*$ 〔加法反元素〕

$A+B=B+A$ 〔加法交換律〕

$(A+B)+C=A+(B+C)$ 〔加法結合律〕

$A>B\Rightarrow A+C>B+C$ 〔加法與大小次序的關係〕

$A>0^*\Longleftrightarrow -A<0^*$。

(5)若$A>0^*$，$B>0^*$，定義$A\cdot B=\{x : x$是有理數，且$x<rs$ 對於某個$r\in A$，$s\in B\}$。

定義

$$A\cdot 0^*=0^*\cdot A=0^*$$

$$A\cdot B=\begin{cases}(-A)\cdot(-B)\text{，} & \text{若}A<0^*\text{，}B<0^*\text{。}\\ -\{(-A)\cdot B\}\text{，} & \text{若}A<0^*\text{，}B>0^*\text{。}\\ -\{A\cdot(-B)\}\text{，} & \text{若}A>0^*\text{，}B<0^*\text{。}\end{cases}$$

(6)定義了兩個切割的乘法之後，又定義 $1^*=\{x : x<1$，x是有理數$\}$。可以驗證：

$A\cdot 1^*=1^*\cdot A=A$〔乘法單位元素〕

對於任意切割A，$A\neq 0^*$，必存在一個切割$\frac{1}{A}$，使得$A\cdot\frac{1}{A}=\frac{1}{A}\cdot A=1^*$。〔乘法反元素〕

$A\cdot B=B\cdot A$ 〔乘法交換律〕

$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$ 〔乘法結合律〕

$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$ 〔分配律〕

$A>B$，$C>0\Rightarrow AC>BC$

(7)對於任意有理數r，定義$r^*=\{x : x<r$，x是有理數$\}$。可以驗證：不同的有理數r與s，對應到不同的切割r^*與s^*。

$$r^*+s^*=(r+s)^*\text{，}$$
$$r^*s^*=(rs)^*\text{，}$$
$$r^*<s^*\Longleftrightarrow r<s\text{。}$$

因此我們可以把所有的切割（也就是所有的實數）看成有理數的擴張。這就是我們的實數系。這樣得到的實數系的確比有理數多，例如同學可以證明以下兩個切割都不能寫成 r^* 的型式，r是有理數：

$\{x : x\leq 0$，x是有理數$\}\cup\{x : x^2<2$，x是有理數$\}$，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x : x\text{是有理數，}x<\frac{1}{10}+\frac{1}{10^{2!}}+\frac{1}{10^{3!}}+\cdots\cdots+\frac{1}{10^{n!}}\}\text{。}$$

實數系比起有理數究竟有什麼優點？我們要慢慢說起。

若S是一個實數的子集合，α是一個實數，α叫做S的最大元素（the maximal element），如果$\alpha\in S$，並且$\alpha\geq x$，對於任意

$x \in S$ 。

若S是一個實數的子集合，α是一個實數，α叫做S的上界（an upper bound），如果$\alpha \geq x$，對於任意$x \in S$ 。

若S是一個實數的子集合，β是一個實數，β叫做S的最小上界（the least upper bound，或 the superemum ），如果β是S的上界，並且$\beta \leq \alpha$，對於S的任意上界α。

舉個例子$S=\{x \leq 2 : x$是實數$\}$的最大元素是2，2，3，$\frac{5}{2}$，40，100，……都是S的上界，2是S的最小上界。$T=\{x<2 : x$是實數$\}$沒有最大元素，2，3，$\frac{5}{2}$，40，100，……仍然是T的上界，2是T的最小上界。結論是，要特別小心去區分最大元素與最小上界。

同學可能想起來了，在本節的第一段，我們使用一個非常笨拙同時也不精確的名稱：「第一個」比$\{x : x<2，x$是有理數$\}$裏面任意數都大的實數，其實那就是這個集合的最小上界。

實數和有理數的區別是：在有理數裏面，一個集合可能有上界，而沒有最小上界；在實數裏面，一個集合如果有上界，一定有最小上界。請看下面例子。

例題：令$S=\{x : x>0，x^2<2，x$是有理數$\}$。試證

(1) $\text{Sup } S=\sqrt{2}$ 。

(2)如果有理數r是S的上界，則必可找到一個有理數s，使得$s<r$ 。

(3)如果$t \in S$，則必可找到$u \in S$，使得$t<u$ 。

證明：(1)從略。

(2)令$s=\dfrac{2r+2}{r+2}$ 。或是利用(1)得$\sqrt{2}<r$，然後在$\sqrt{2}$與r之間取一個有理數s 。

(3)令$u=\dfrac{2t+2}{t+2}$ 。或是利用(1)得$t<\sqrt{2}$，然後在t與$\sqrt{2}$之間取一個有理數u 。

討論：可知在有理數裏面，我們不可能找到S的最小上界，因為它是躲在無理數裏邊。

我們把實數系的這個性質寫在下面，這個性質和實數系的完備性（the completeness）完全是同一回事：

最小上界定理：實數的任何一個不是空集合的子集合，如果有一個上界，則必有最小上界。（證明從略）

以上的討論應該足夠幫助同學瞭解建造實數系的大致過程。要知道更詳細的情形，同學可以參考以下兩本書：

楊維哲，何謂實數？「商務印書館」出版

E. Landau, Foundation of Analysis

後記：本文初稿承蒙張國男先生指正，特此誌謝。

（本文作者現任教於台大數學系）