## (4.張鎮華來函)

**編輯先生：**

敝人對於數學傳播第 22 期數播信箱中有關薛泰輝同學來函，有一點小小意見。薛同學的題目如下：$f(x+2)-f(x-1)=6x+3$，

且 $f(0)=3$，求 $f(6)$，$f(7)$。

$f(6)=f(3)+27=f(0)+12+27$ $=3+12+27=39$，完全同意。但是 $f(7)$ 的求法則有點小問題。問題是，薛同學假定 $f$ 是多項式，求得結果，但是題目中並沒有這個條件，事實上 $f(x+2)-f(x-2)$ 爲多項式，並沒有保證 $f$ 爲多項式。

一般而言，如果 $g(x)$ 是已知的函數，$k$ 爲定數（假設爲正數），則解 $f(x+k)-f(x)=g(x)$ 的方法如下：將實數 $R$ 分解爲 $R=\bigcup_{0\le a<k} R_a$，其中 $R_a=\{a+ik : i\in Z\}$ 則 $R_a$ 中的任一數的 $f$ 值可以完全決定 $R_a$ 中其他數的 $f$ 值，或者說，當 $b\in R_a$ 時，$R_a$ 中任一數均爲 $b+ik\,(i\in Z)$ 的形式，對任意 $n\in N$ 時

$$\begin{cases} f(b+nk)=f(b)+\sum\limits_{j=0}^{n-1} g(b+jk), \\ f(b-nk)=f(b)-\sum\limits_{j=1}^{n} g(b-jk)。\end{cases}$$

不同的 $R_a$ 之間，其 $f$ 值並沒有關係。所以 $f$ 必須由 $\{f(a) : 0\le a<k\}$ 來決定，不能用 $f(0)$ 來決定。

將以上的說法應用到薛同學的問題，則 $f(6)$ 可求只是因爲 $6\in R_0$，但 $f(7)$ 不可求，因爲 $7\notin R_0$。當然啦，如果假定 $f$ 是多項式，則又另當別論。不過，我們並沒有假定 $f$ 是多項式。

有一個類似的問題是解 $f(x+y)=f(x)+f(y), \forall\, x, y$ 這樣的實函數。一個並不是很難的結論是 $f(qx)=qf(x)\quad \forall\, x\in R, \forall\, q\in Q$，（試證之）。所以當 $x=1$ 時，$f(q)=f(1)g\quad \forall\, g\in Q$。一個很自然的想法是：可否證明 $f(x)=f(1)x\quad \forall\, x\in R$？答案是不可以。

利用分析的知識，有辦法證明：當 $f$ 在某一點 $x_0$ 是連續的，而且 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ $\forall\, x, y$ 則 $f(x)=f(1)x, \forall\, x\in R$。

如果將 $R$ 看成是佈於 $Q$ 的向量空間，這時 $R$ 是一個無限維的向量空間，取一基底 $B$，則 $f$ 由 $\{f(b) : b\in B\}$ 完全決定，但是 $b_1\neq b_2$ 時，

$f(b_1)$ 和 $f(b_2)$ 互不影響。一般而言，任一實數 $x$ 可以唯一表示成 $x=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i b_i$，其中 $b_i \in B$，$\lambda_i \in R$，$\lambda_i \neq 0$，而且 $f(x)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i \cdot f(b_i)$。

謹此 祝

好

張鎮華 於康大

11 / 15 / 1982