(2.陳力華來函)

編輯先生：

您好，敝人在數季第六卷第一期中，看到陳子樫先生提到的兩個問題，相當有意思，然對於呂先生的回答，筆者認爲頗值得商榷。（數季，第六卷第一期，p 105）

陳先生的第一個問題是：

“若$A(r)$，$L(r)$分別表半徑r之圓的面積及周長，則$\frac{dA}{dr}=L$”要說明這一點，我們大可不必用到平面上求曲線面積及長度的公式。

$$A=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}[f(\theta)]^2\,d\theta$$

$$L=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{f(\theta)^2+f'(\theta)^2}\,d\theta$$

（如呂先生所覆，而且還有漏洞），我們只要看看圖一就可明白了。

正方形周長 $L=4a=8h$

正好 $\dfrac{dA}{dh}=L$

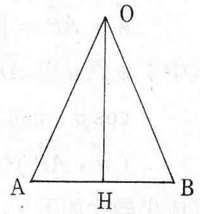
同理，任一“正”n 邊形，亦有同樣情形若 h 爲自中心到任一邊的垂直距離，則 $\dfrac{dA}{dh}=L$

證明如下：

自中心 O 畫兩條線至相鄰的兩頂點 A，B

$$\angle AOB=\frac{2\pi}{n}$$

自 O 作 $\overline{AB}$ 之垂線 $\overline{OH}$，$\overline{OH}=h$



則 $\overline{AB}=2h\ \tan\dfrac{\pi}{n}$

$$\Rightarrow L=2nh\ \tan\frac{\pi}{n}$$

$$a\triangle ABO=\frac{1}{2}(\overline{AB})(\overline{OH})=h^2\ \tan\frac{\pi}{n}$$

$$\Rightarrow A=nh^2\ \tan\frac{\pi}{n}$$

$$\frac{dA}{dh}=2nh\ \tan\frac{\pi}{n}=L$$

若 $n=4$，則 $\dfrac{dA}{dh}=8h=L$ 如前所述

若 $n\to\infty$ 則 $h\to r$ 上述等式恒成立

故 $\dfrac{dA}{dr}=L$

$$\frac{dA}{dr}=\lim_{\substack{n\to\infty\\ h\to r}}\left(\frac{dA}{dh}\right)$$

$$=2r\lim_{n\to\infty} n\tan\frac{\pi}{n}$$

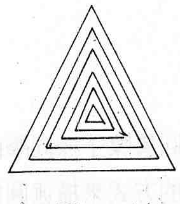
$$=2r\lim_{n\to\infty}\frac{\tan\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}}$$

$$=2r\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{\pi}{n^2}\sec^2\frac{\pi}{n}}{-\frac{1}{n^2}}$$

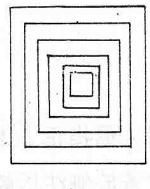
$$=2\pi r\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{n}}$$

$$=2\pi r=L$$

正 n 邊形滿足 $\dfrac{dA}{dh}=L$ 的理由和前所述之一樣，圖三及圖四爲 $n=3$ 及 $n=4$ 的例子。



圖三



圖四

在此筆者所强調爲“正”n 邊形才具此性質，非正 n 邊形卽沒有。

因爲圓，正 n 邊形均“可用單一的變數來確定其形狀及大小”，暫且稱此類圖形爲“單特徵形”(Single characteristic figure)此變數稱爲特徵長(characteristic length)，我們可以想像，單特徵形僅有矩形，菱形，橢圓，等腰三角等，其形狀及大小均必須賴兩個變數以定立，稱爲“雙特徵形”，若 a_1 及 a_2 爲某雙特徵形的兩個特徵長，我們如法決定 $\dfrac{dA}{da_1}=L$ 或 $\dfrac{dA}{da_2}=L$，所以我們不可期望 $\dfrac{dA}{da_i}=L$ 成立

陳先生的第二個問題是

“$\dfrac{dV}{dr}=A_s$，V：volumn，r：radius

A_s：surface area”

如果我們把球理解成一個洋葱（一層一層地），自然也不難得到下式

$$V=\int_0^r A_s\,dr\Rightarrow\frac{dV}{dr}=A_s$$

正 n 面積亦有 $\dfrac{dV}{dh}=A_s$ 的性質。

設正四面體菱長 a，而 h 爲中心到面的距離

$$a=4.899h$$

$$A_s=4\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right)=\sqrt{3}(4.899h)^2$$

$$=41.57h^2$$

$$V=0.1178a^3=13.856h^3$$

$$\therefore\ \frac{dV}{dh}=A_s$$

正六面體亦同。

以上是筆者之淺見，敬請賜教，謝謝。

讀者　**陳力華**

陳先生：

謝謝來信指正，本人在回答陳子樫同學的問題時，曾苦於無法用較直觀的方式來描述圓面積與周長，以及球體積與表面積之間的“微妙”關係。

事實上，如您所言，不僅圓、球如此，一切正多邊形、多面體，也具有如此性質。相信陳子樫同學以及其他關心這個問題的讀者會滿意您的回答。

呂素齡　敬覆　71，8，28