談談

求$\sum_{i=1}^{n} i^k$ (K=1,2,3) 的幾種方法

何景國

自然數乘冪之和 $\sum_{i=1}^{n} i^k$（其中 $k=1，2，3$）是高中數學課程裡常遇到的問題。因爲它的應用相當廣，所以一般高中教科書裏都强調它的重要性。由於教材裏所用的是數學歸納法，並沒有介紹它的直接證明方法。因此本文將從組合學觀點，以叁種不同角度來討論其求解的方法。現在分叁部份來說明。首先於第一部份，用組合構形的內在性質來說明。其次於第二部份用有限和分方法來計算，第三部份用組合公式來求解，可得其一般（對 k 而言）遞廻公式。

Ⅰ.組合構形法

假如我們將連續的自然數分別依照下面的規則填入一個 $n\times n$ 格的方格紙內，則我們就可以求得

$$\sum_{i=1}^{n} i^k=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k \quad (k=1,2,3)$$

之値了。

（ i ）K＝1 的情形

排列規則：

於方格紙內，各小格均填入數字「 1 」。

（見右上圖 1 ）

1	1	1	········	1
1	1	1	········	1
1	1	1		
⋮	⋮	⋮	········	⋮
1	1	1	········	1

（圖 1 ）

將方格紙內，從左上每一斜綫上各數目相加得下關係式：

每一斜綫上各數目相加之和

$=\frac{1}{2}〔$（方格紙內各小格的數目總和）$+n〕$

寫成數學式子爲：

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}〔(n\times n)+n〕$$

即得：

$$\sum i^1=\frac{1}{2}(n^2+n)=\frac{1}{2}n(n+1)$$

（ ii ）K＝2 的情形

排列規則：

(1)第一列各小方格是 1 到 n 的自然數排列。

(2)第二列各小方格是 2 到 $n+1$ 的自然數排列。

(3)第三列各小方格是 3 到 $n+2$ 的自然數排

列。

……………………………………………

(n)第 n 列各小方格是 n 到 $2n-1$ 的自然數排列。

（見下圖 2）

1	2	3	………	n
2	3	4	………	$n+1$
3	4	5	………	$n+2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	$n+1$	$n+2$	………	$2n-1$

（圖 2）

根據上述規則及圖 2，我們可以換一種如圖 3 的形式來觀察從而得到：

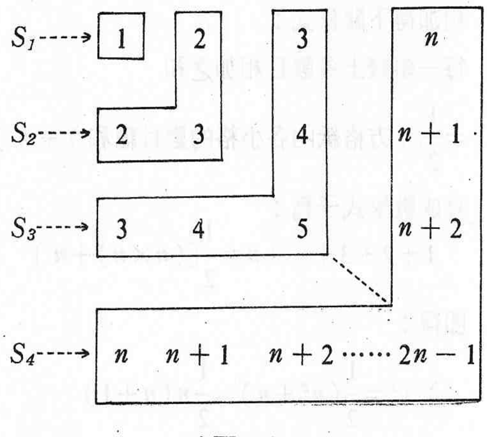
$$S=S_1+S_2+S_3+\cdots\cdots+S_n$$

其中：

S 表方格紙內各數字之總和

S_i 表圖 3 各分塊圖形內數字的和。

$(i=1,2,3,\cdots\cdots,n)$



（圖 3）

令 $\overline{S}_i$ 表圖 2 第 i 個橫列中各數字的總和。得下式子：

$$\left.\begin{aligned}
2\overline{S}_1&=n(n+1)\\
&=n^2+n\\
2\overline{S}_2&=n(n+1+2)\\
&=n^2+3n\\
2\overline{S}_3&=n(n+2+3)\\
&=n^2+5n\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
2\overline{S}_n&=n(n+n-1+n)\\
&=n^2+(2n-1)n
\end{aligned}\right\}\text{（等差級數和公式）}$$

上端各式相加得：

$$2(\overline{S}_1+\overline{S}_2+\cdots\cdots+\overline{S}_n)$$
$$=n^2(1+1+1+\cdots+1)+[1+3+5+\cdots+(2n-1)]^n$$

式中

$$\begin{cases}1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2\\ \overline{S}_1+\overline{S}_2+\overline{S}_3+\cdots+\overline{S}_n=S\end{cases}$$

故：

$$S=n^3$$

另一方面，觀察圖 3 第 n 個分塊圖形內數字的和 S_n，我們可得一關係式及一組等式

$$S_n=2\overline{S}_n-(2n-1)$$

即 $S_n=n^2+(2n-1)n-(2n-1)$

或 $S_n=3n^2-3n+1$

$$\Rightarrow\begin{cases}S_{n-1}=3(n-1)^2-3(n-1)+1\\ S_{n-2}=3(n-2)^2-3(n-2)+1\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ S_2=3(2)^2-3(2)+1\\ S_1=3(1)^2-3(1)+1\end{cases}$$

故：

$$\begin{aligned}S&=S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n\\
&=[3(1)^2-3(1)+1]\\
&\quad+[3(2)^2-3(2)+1]+\cdots\cdots\\
&\quad+[3(n)^2-3(n)+1]\\
&=3(1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2)\\
&\quad-3(1+2+\cdots\cdots+n)+n\end{aligned}$$

或：

$$n^3=3\sum_{i=1}^{n}i^2-3\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]+n$$

即：

$$3\sum_{i=1}^{n}i^2=n^3+\frac{3n^2+n}{2}-n$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$$

或：

$$\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

(iii) K＝3 的情形

排列規則：

⑴第一列各小方格是從 1 到 n 的自然數排列。

⑵第二列各小方格是 2，4，6，……，$2n$ 的自然數排列。

⑶第三列各小方格是 3，6，9，……，$3n$ 的自然數排列。

……………………………………………………

(n)第 n 列各小方格是 n，$2n$，$3n$，……，n^2 的自然數排列。

（見下圖 4）

1	2	3	………	n
2	4	6	………	$2n$
3	6	9	………	$3n$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	$2n$	$3n$	………	n^2

（圖 4）

根據上述規則及圖 4，我們得到下列之關係式：

方格紙內各數字總和

＝∑（各相對應的橫列內各數字的和）。

即：

$$S=S_1+S_2+\cdots\cdots+S_n$$

其中：

S 表方格紙內各數字之總和

S_j 表方格紙內各對應的第 j 列內各數字的和（$j=1,2,3,\cdots\cdots,n$）

則

對於每一 $j=1,2,3,\cdots,n$；$S_j=j\cdot S_1$

式中：$S_1=1+2+3+\cdots\cdots+n$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)$$

故　$S=1S_1+2S_2+3S_1+\cdots\cdots+nS_1$

即　$S=(1+2+3+\cdots\cdots+n)S_1$

$$=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]$$

故　$$\sum_{i=1}^{n} i^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

Ⅱ.和分方法

由於函數 u_m 所定義之級數 $\sum_{m=1}^{n} u_m$ 中任意數目之連續項和均可寫成某一數列 $<y_k>$ 之相對應兩項之差。即對於每一自然數 k 而言 $u_k=\triangle y_k=y_{k+1}-y_k$。因此欲一級數 $\sum_{m=1}^{n} u_m$ 之和可以反過來先來設定一個數列 $<y_k>$ 使合乎條件 $u_k=\triangle y_k$（$k\in N$），然後再將以二個固定界值代入即可求得。理由是這樣的：

$\because$　$u_k=\triangle y_k$

$\therefore$　$\triangle^{-1}u_k=\triangle^{-1}(\triangle y_k)=y_k+c$

其中 c 為一常數

$\triangle^{-1}$ 表差分算子△的逆運算子

這裡我們定義一個 m 之 k 次階乘多項式及下面二個定理。

定義： $m^{(k)}=m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)$

定理： ⑴ $\triangle m^{(k)}=km^{(k-1)}$

⑵ $\triangle^{-1}m^{(k-1)}=\frac{1}{k}\cdot m^{(k)}$

例說 1： 求 $\sum_{i=1}^{n} i$

解： 令 $u_m=m=m^{(1)}$

則 $$\sum_{i=1}^{n} i=\sum_{m=1}^{n} u_m=\triangle^{-1}(m^{(1)})\Big]_{m=1}^{n+1}$$

故 $$\sum_{i=1}^{n} i=\frac{m^{(2)}}{2}\Big]_{m=1}^{n+1}=\frac{(n+1)(n)}{2}-\frac{(1)(0)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)$$

例說 2： 求 $\sum_{i=1}^{n} i^2$

解： $\because$　$m^2=m(m-1)+m=m^{(2)}+m^{(1)}$

$\therefore$　設 $u_m=m^{(2)}+m^{(1)}$

故 $$\sum_{i=1}^{n} i^2=\sum_{m=1}^{n} u_m=\triangle^{-1}(m^{(2)}+m^{(1)})\Big]_{m=1}^{n+1}$$

即 $\sum_{i=1}^{n} i^2 = (\frac{1}{3}m^{(3)} + \frac{1}{2}m^{(2)})\Big]_{m=1}^{n+1}$

$= \frac{1}{6}[2(n+1)n(n-1)$

$+3(n+1)n - 2(1)(0)(-1)$

$-3(1)(0)]$

或 $= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

例說3：求 $\sum_{i=1}^{n} i^3$

解：$\because \quad m^3 = a_0 m^{(3)} + a_1 m^{(2)} + a_2 m^{(1)} + a_3$

$= a_0 m(m-1)(m-2) + a_1 m(m-1)$

$+ a_2 m + a_3$

$= a_0 m^3 - (3a_0 - a_1)m^2$

$+ (2a_0 - a_1 + a_2)m + a_3$

由比較兩端係數得：

$a_0 = 1,\ a_1 = 3,\ a_2 = 1,\ a_3 = 0$

$\therefore \quad m^3 = m^{(3)} + 3m^{(2)} + m^{(1)}$

故令 $u_m = m^{(3)} + 3m^{(2)} + m^{(1)}$

得 $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \sum_{m=1}^{n} u_m$

$= \Delta^{-1}(m^{(3)} + 3m^{(2)} + m^{(1)})\Big]_{m=1}^{n+1}$

$= \frac{1}{4}m^{(4)} + m^{(3)} + \frac{1}{2}m^{(2)}\Big]_{m=1}^{n+1}$

$= \frac{1}{4}n(n+1)[(n-1)(n-2)$

$+4(n-1)+2]$

或 $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

Ⅲ.組合方法

這裡我們先證明一個組合公式：

$$\sum_{k=m}^{n} C(k,m) = C(n+1, m+1)$$

證明：

設 $n = m + p$ 及 $S_n = \sum_{k=m}^{n} C(k,m)$

以 $f(x)$ 表 $(1+x)^m + (1+x)^{m+1} + (1+x)^{m+2} + \cdots + (1+x)^{m+p}$ 之和。

則可知多項式 $f(x)$ 中 x^n 項之係數為 S_n

又因

$f(x) = (1+x)^m\left[\frac{(1+x)^{p+1}-1}{(1+x)-1}\right]$

$= \frac{(1+x)^{m+p+1} - (1+x)^m}{x}$

其中 x^m 項係數為

$C(m+p-1, m+1) - C(m, m+1)$

這可化簡為：

$C(m+p-1, m+1) - C(m, m+1)$

$= C(m+p+1, m+1)$

$= C(n+1, m+1)$

故可知：

$\sum_{k=m}^{n} C(k,m) = C(n+1, m+1)$

故得證

應用例說：

(1)求證 $\sum_{i=1}^{n} i^1 = \frac{1}{2}n(n+1)$

解：

因 $\sum_{k=1}^{n} C(k,1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{1!(k-1)!}$

$= \sum_{k=1}^{n} k$

且 $\sum_{k=1}^{n} C(k,1) = C(n+1, 1+1)$

$= \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!}$

$= \frac{1}{2}n(n+1)$

故 $\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}n(n+1)$

(2)求證 $\sum_{i=1}^{n} i^{2}=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

解：

因 $\sum_{k=2}^{n} C(k,2)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k-1)}{2!}$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^{2}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k$$

或 $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^{2}=\sum_{k=2}^{n}C(k,2)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k$

$$=C(k+1,2+1)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\frac{1}{3!}(n+1)n(n-1)+\frac{1}{4}n(n+1)$$

即 $\sum_{k=1}^{n}k^{2}=\frac{1}{3}n(n+1)(n-1)+\frac{1}{2}n(n+1)$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

(3)求證 $\sum_{i=1}^{n} i^{3}=\frac{1}{4}n^{2}(n+1)^{2}$

解：

因 $\sum_{k=3}^{n} C(k,3)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3!}k(k-1)(k-2)$

或 $C(n+1,3+1)$

$$=\frac{1}{6}\left(\sum_{k=1}^{n}k^{3}-3\sum_{k=1}^{n}k^{2}+2\sum_{k=1}^{n}k\right)$$

⇨ $\frac{6}{4!}n(n+1)(n-1)(n-2)$

$$=\sum_{k=1}^{n}k^{3}-3\sum_{k=1}^{n}k^{2}+2\sum_{k=1}^{n}k$$

即 $\sum_{k=1}^{n}k^{3}=\frac{1}{4}n(n+1)(n-1)(n-2)$

$$+\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)-n(n+1)$$

$$=\frac{1}{4}n(n+1)(n^{2}-3n+2+4n+2-4)$$

$$=\frac{1}{4}n^{2}(n+1)^{2}$$

一般言之：

$$\sum_{k=2}^{n}C(k,m)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-m+1)}{m!}$$

$$=\frac{1}{m!}\sum_{k=1}^{n}k^{m}$$

$$+\sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{i}d(m-1;i)\frac{k^{m-i}}{m!}$$

其中 $d(m-1;i)$ 表1，2，……，$m-1$ 諸連續正整數中，所有任選 i 個不同數乘積的和。

故 $\frac{1}{m!}\sum_{k=1}^{n}k^{m}+\sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{i}\frac{d(m-1;i)}{m!}k^{m-i}$

$$=C(n+1,m+1)$$

$$=\frac{(n+1)!(n-m)!}{(m+1)!}$$

即 $\sum_{k=1}^{n}k^{m}=m!\left\{\frac{(n+1)!(n-m)!}{(m+1)!}\right.$

$$\left.-\sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{i}\frac{d(m-1;i)}{m!}k^{m-i}\right\}$$

或 $\sum_{k=1}^{n}k^{m}=\frac{(n+1)!(n-m)!}{m+1}$

$$-\sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{i}d(m-1;i)k^{m-i}$$

故得其一般之遞迴公式。

以 $m=1$，2，3分別代入卽得上例(1)，(2)，及(3)。

（本文作者現任教於延平高中）