課 堂 上

葉東進

問題引發問題

生物學上有此一說：生命源自生命。生命因而綿延不息。

數學上來看則是：問題引發問題。

因爲是問題引發問題，這便給了教與學兩方面起着深刻的啟示：一方面，它提供了教者課堂上的動機；另方面它激勵了學者不斷地超越自己。

我常跟學生提到：看來便懂的一本書，對我們智慧的提昇少有幫助；很快便能解決的一道問題，對我們思考的鍛鍊起不了多大作用。智慧的成長如同生命的突破，總要來自憂患。因而，我鼓勵學生，要他們不斷地拿問題來困阨自己，使自己不斷地從困阨的突破中，增進功力，超越現實。

底下是課堂上一個教與學的例子。

找出複數方程式 $32Z^5=(Z+1)^5$ 的五個根，並證明它們均落在

圓：$(x-\frac{1}{3})^2+y^2=(\frac{2}{3})^2$ 上。

以簡御繁是數學的精神，也是數學的方法。數學裏，爲什麼要建立一些基本模型？因爲它們是簡，要用它們來御繁。

1 的 n 次方根就是基本模型之一：

$Z^n=1$ 的 n 個根是 1，ω，ω^2，ω^3，……，ω^{n-1}，其中

$$\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$$

現在把 $32Z^5=(Z+1)^5$ 朝向基本模型簡化：

$$\left(\frac{2Z}{Z+1}\right)^5=1$$

取 $Z=\frac{2Z}{Z+1}$（另一個角度就是 $Z=\frac{Z}{2-Z}$）

原式變爲 $Z^5=1$（基本模型）

它的五個根是 1，ω，ω^2，ω^3，ω^4，其中

$$\omega=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$$

將它們分別代入變換式 $Z=\frac{Z}{2-Z}$，便得原方程式的五個根是：

$$1,\ \frac{\omega}{2-\omega},\ \frac{\omega^2}{2-\omega^2},\ \frac{\omega^3}{2-\omega^3},$$

$$\frac{\omega^4}{2-\omega^4}\text{，其中 }\omega=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$$

問題的第一部份解決。

$Z^n=1$ 的 n 個根 1，ω，ω^2，…，ω^{n-1} 均匀地落在單位圓 $x^2+y^2=1$ 上是學過複數的人都熟知的一件基本事實，如何用它來御繁呢？

$32Z^5=(Z+1)^5$ 的五個根是經由變換式 $Z=\frac{Z}{2-Z}$ 而與 $Z^5=1$ 而五個根連繫著；問題在：變換 $Z=\frac{Z}{2-Z}$ 把均匀地落在圓 $x^2+y^2=1$ 上的五個複數 1，ω，ω^2，ω^3，ω^4（其中 $\omega=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$）分別帶到另外的五個複數（也就是 $32Z^5=(Z+1)^5$ 的五個根），它們將會落在圓 $(x-\frac{1}{3})^2+y^2=(\frac{2}{3})^2$ 上嗎？

回答這個問題的關鍵顯然是在：

$Z=\dfrac{Z}{2-Z}$ 到底是怎樣的一個變換？

這便提供了在課堂上想要介紹複數的分式型變換 $f(Z)=\dfrac{aZ+b}{cZ+d}$，$(ad\neq bc)$的動機。

關於分式型變換的兩個性質是：

它把一個圓對應到一個圓。

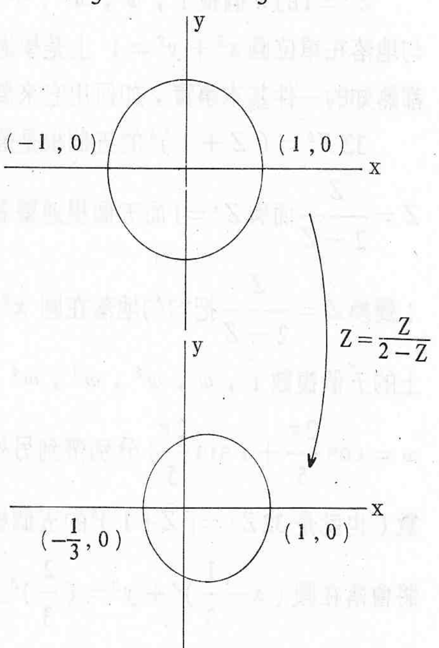
它保持兩個圓的夾角不變（就是說，如果C_1與 C_2 經分式型變換分別對應到C_1' 與 C_2'，那麼 C_1 與 C_2 的夾角等於C_1' 與 C_2' 的夾角）。（註）

利用上面兩個性質，現在回到原來的問題上。因爲Z落在圓 $x^2+y^2=1$，所以Z也落在另一個圓上，把它記爲C；因爲圓 $x^2+y^2=1$ 與 x 軸正交，且 x 軸（可看作是一個圓）經變換 $Z=\dfrac{Z}{2-Z}$ 對應到 x 軸本身（實數對應到實數），所以C與 x 軸也要正交，這等於說 x 軸通過C的圓心。

另外，圓 $x^2+y^2=1$ 在 x 軸上的直徑的兩端點$(-1，0)$，$(1，0)$經變換後分別對應到$(-\dfrac{1}{3}，0)$，$(1，0)$，而它們就是C的一個直徑的兩端點。（見圖）

因此，C的方程式就是

$$(x-\frac{1}{3})^2+y^2=(\frac{2}{3})^2$$



註：本文旨在說明問題引發問題，因此關於分式型變換不擬在此詳敍，讀者可參閱任何一本複數分析的教本。

問題引發問題，使得教材的來龍去脈才呈現出連貫的氣勢。

今以指數函數 a^x 的介紹爲例說明如下：

爲要介紹函數 a^x，便要先介紹 x 爲一般實數時 a^x 的意義；便因此又須先介紹 x 爲無理數時 a^x 的意義；往前推，更須先介紹 x 爲有理數時 a^x 的意義；再往前推，又得先介紹 x 爲整數時 a^x 的意義；若再往前呢，那又要介紹 x 爲0及 x 爲正整數時 a^x 的意義。

從順序上來看，愈是較前介紹的愈是簡，較後介紹的愈是繁，以簡御繁。

其間，爲了達成「御」的目的，而引進了許多新的觀念及方法，正所謂「問題引發問題」。

把它的流程寫在下面：

數的連乘積

↓（定義）

a^x，$x\in N$

↓（倒數的意義）

a^x，$x\in Z$

↓（方根的意義）

a^x，$x\in Q$

↓（實數的完備性；逼近的意義）

a^x，$x\in R$

↓

指數函數 a^x

可以看出，實數的完備性在整個流程中是居於「御繁」或是「逼近」的工具。爲了介紹它，前前後後又產生了另一部分的教材的順序來：

多項式的因式分解

↓

可分解的多項方程式

↓（方程式的解是不等方程式的解的臨界情況）

不等方程式

↓

數列的極限

↓

實數的完備性

再以圓錐曲綫的介紹爲例。

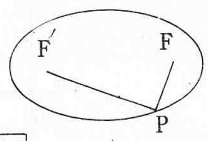
錐綫的產生

↓（平面截錐面產生的曲綫）

抽取錐綫的幾何特徵

以橢圓爲例是：

$PE+PE'$ =定長



↓

建立代數的基本模型

將抽取的幾何特徵予以代數化。

爲了能夠達到「簡」的要求，利用曲綫本身的對稱，找出一個適當的座標系統，使曲綫在這個系統下的代數表示能有最簡單的型式，便因此建立了一般所說的標準式。

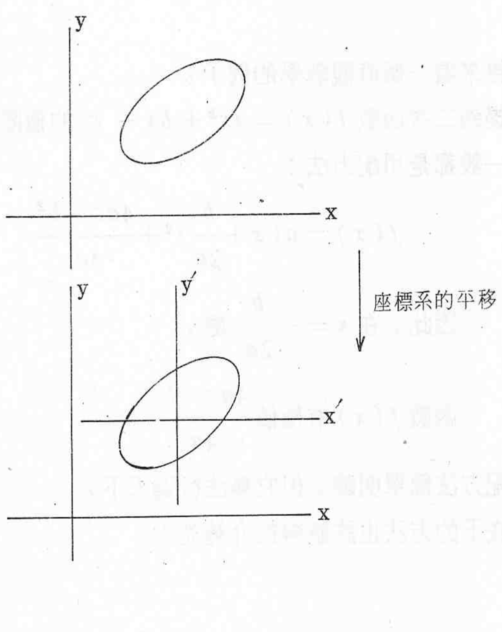
以橢圓爲例是：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

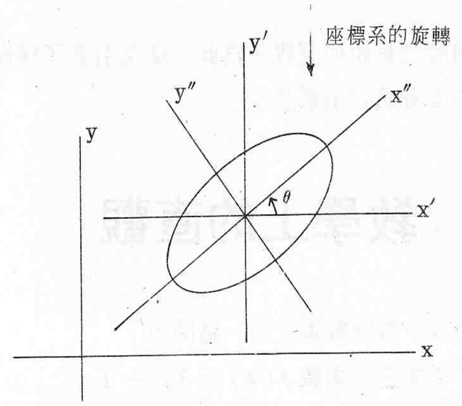
↓

標準化

同一個點，從不同的座標系統來觀測會有不同的位置座標；同一條曲綫，也因爲不同座標系的選取而有不同的方程式。

我們的主要目的既然是要以代數的方法來研究曲綫的幾何性質，因此，對一條給予的曲綫，如可找出它的最簡的代數表示便是一件亟須解決的工作，換句話說，就是我們須要找出一個座標系統，使得這條曲綫在這個系統下，它的方程式是標準式。爲此，我們引進了（正是問題引發問題）座標的平移與座標的旋轉等觀念。



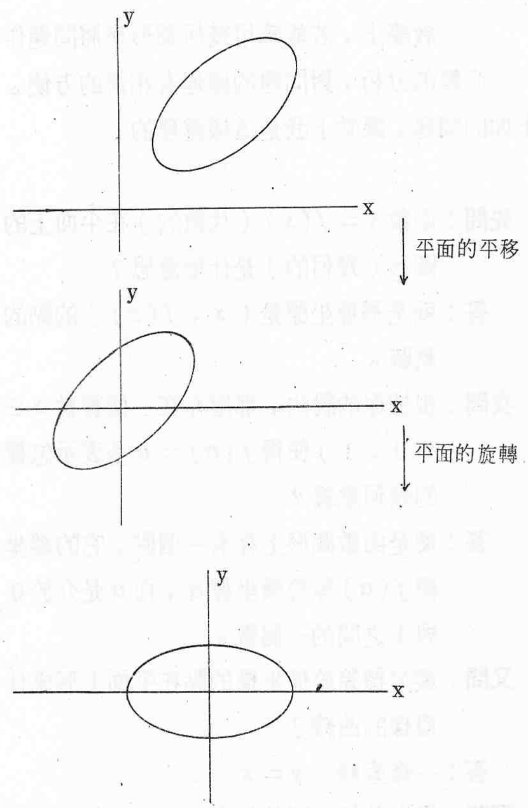


引發的問題是：(1) $x'y'$ 座標系的原點是如何選定的？（事先我們並不知道曲綫的對稱中心何在。）

(2) $x''y''$ 座標系的轉角 θ 又是如何知道它的大小的？

要注意的是在上述座標系的變換中，曲綫是固定不動的。

因此，我們聯想到：是否可以不改變座標系統，而利用剛性運動把曲綫移到可以使它的方程式看來是標準式的位置？



爲此，我們引進了平面上的綫性映射與剛性運動等觀念。

當然，問題又引發了問題：

我們怎樣知道平面要作如何的平移？而旋轉

的角度又是如何選取？爲此，便又引進了綫性映射的固有值這個觀念。

教學上的直觀

這是高一數學教本上的一道問題：

考慮三次函數 $f(x)=3x^3-1$。

證明：存在一個實數 $\alpha\in(0,1)$ 使得 $f(\alpha)=\alpha$。

不少學生提出疑惑說：爲什麼課本上寫的以及上課時老師說的都知道要先取另一個輔助函數 $g(x)=f(x)-x$，再利用中間值定理：

$g(0)=-1<0$

$g(1)=1>0$

得出：存在一數 $\alpha\in(0,1)$ 使得 $g(\alpha)=0$，也就是 $f(\alpha)=\alpha$ ？

我認爲：

教學上，若能善用幾何圖形來將問題作直觀的分析，對問題的處理有相當的方便。

上面的問題，課堂上我是這樣處理的：

先問：函數 $y=f(x)$（代數的）在平面上的圖形（幾何的）是什麼意思？

答：就是那種坐標是 $(x, f(x))$ 的點的軌跡。

次問：根據你的說法，那麼存在一個實數 $\alpha\in(0,1)$ 使得 $f(\alpha)=\alpha$ 是表示怎樣的幾何意義？

答：便是函數圖形上存有一個點，它的縱坐標 $f(\alpha)$ 等於橫坐標 α，而 α 是介於 0 與 1 之間的一個數。

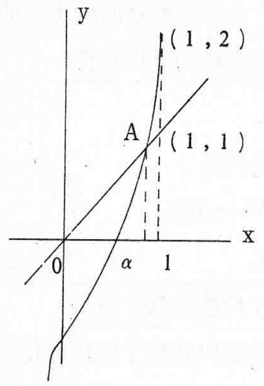
又問：縱坐標等於橫坐標的點在平面上形成什麼樣的曲綫？

答：一條直綫 $y=x$

再問：把你前後的回答綜合來看又是什麼意思？

答：就是要看看在區間 $(0,1)$ 內，曲綫 $y=3x^3-1$ 與直綫 $y=x$ 是否有一個交點。

最後問：能不能繪圖來看看結果？



果然是有一個交點 $A(\alpha,\alpha)=(\alpha,f(\alpha))$

提醒：從上面的圖形來看，點 $A(\alpha,\alpha)$ 是一個分界點，在 α 的右邊，也就是在 $x>\alpha$ 時，$y=3x^3-1$ 的圖形位在直綫 $y=x$ 的上方，便是說 $f(x)>x$；另外，在 α 的左邊，也就是在 $x<\alpha$ 時，$y=3x^3-1$ 的圖形位在直綫 $y=x$ 的下方，便是說 $f(x)<x$。這樣的分析便能明白爲什麼會取輔助函數 $g(x)=f(x)-x$ 了。

直觀來看，要討論方程式 $a\cos x+b\sin x+c=0$ 的解（其中 a,b,c 爲實數），便等於要討論

直綫 $ax+by+c=0$

與 圓 $x^2+y^2=1$ 的交點。

要問什麼樣的函數滿足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 便等於問過原點 $(0,0)$ 的什麼樣的曲綫是不凸也不凹？

再來看一個直觀教學的例子。

提到二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的極限，一般都是用配方法：

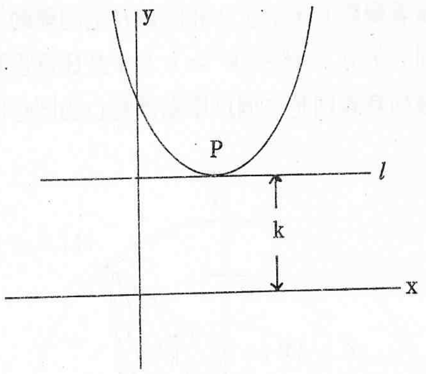
$$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

因此，在 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 處，

函數 $f(x)$ 有極值 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$。

配方法簡單明瞭，但它無法行遍天下。

底下的方法也許值得推介補充：



二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 產生極值的點 P 位置，也就是它的圖形跟一條水平直線 ℓ 相切的切點處（相當直觀）。

取水平切線 ℓ ：$y=k$（k 待定）

因此，曲線 $y=ax^2+bx+c$ 與直線 $y=k$ 有唯一交點，即聯立式

$$\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ y=k \end{cases}$$

有唯一的實數解，也就是說

$ax^2+bx+(c-k)=0$　有重根

$\therefore$ 判別式 $b^2-4a(c-k)=0$

$$\Rightarrow \quad k=\frac{4ac-b^2}{4a}$$

此時，

$x=-\dfrac{b}{2a}$，而得點

$$P=\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$$

上面的方法，顯然是基於下列的直觀：

產生極值的地方也就是有一條切線切過的地方。

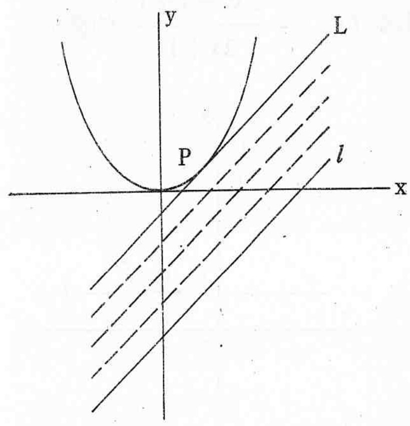
如此的直觀有著缺點：粗陋而不嚴謹。

粗陋是：如果變數的範圍縮小爲一個有限區間（或是有限閉區域）時，它沒有指出極值可能出現在區間（或是區域）的端點處。

不嚴謹是：它沒有邏輯上的證明。

粗陋可以補足說明，而要求嚴謹對初高中生來說不是絕對重要，重要的是提供給他們的方法要能提昇他們分析的能力，並擴大他們思考的領域。

譬如說，有了上面的直觀認識，那麼拿底下這道問題來測試一個國三的學生絕不是一件苛事：



在 $y=x^2$ 的圖形上找出一點 P，使得 P 與直線 ℓ：$x-y-2=0$ 之間有最短的距離。

分析：

如果把 ℓ 平行移動，使之漸漸接近 $y=x^2$，將發現在所欲尋找之點 P 處有一條與 ℓ 平行的切線 L。

取 L 爲：$x-y+k=0$（k 待定）

因此 $\begin{cases} y=x^2 \\ x-y+k=0 \end{cases}$　　有唯一實驗解

即　$x^2-x-k=0$　　有重根

$\therefore$ 判別式　$1+4k=0$

$$\Rightarrow \quad k=-\frac{1}{4}$$

此時　$x=\dfrac{1}{2}$，而得點 $P=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$．

有不少學生對坊間書籍上有關底下問題的解決相當疑惑：

求函數 $f(x)=\dfrac{2x^2-x+1}{2x+1}$ 的極值。

解：令 $\dfrac{2x^2-x+1}{2x+1}=k$

$\therefore \quad 2x^2-(2k+1)x+(1-k)=0$

利用判別式 ≥ 0　　得出

$$(2k+1)^2-8(1-k)\geq 0$$

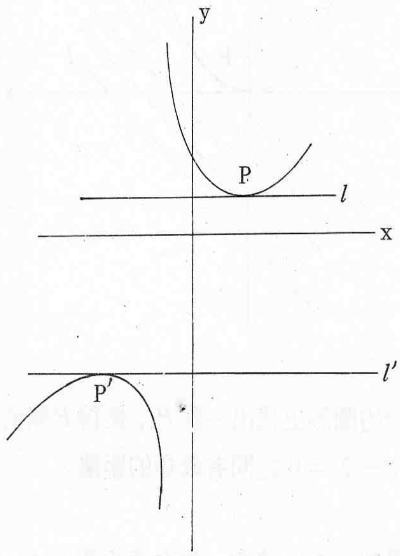
$$\Rightarrow \quad k\geq\frac{1}{2} \quad 或 \quad k\leq-\frac{7}{2}$$

故 $f(x)$ 有極小值 $\dfrac{1}{2}$，極大值 $-\dfrac{7}{2}$

疑惑的是：爲什麼經由判別式演算出來的那兩個

使等號成立的值就是函數的極值？

首先觀察 $f(x)=\dfrac{2x^2-x+1}{2x+1}$ 的圖形：



顯然，產生極小值的點 P 處，與產生極大值的點 P' 處各有一條水平切綫 ℓ，ℓ'，取它們的方程式分別爲 $y=k$ 與 $y=k'$（$k>k'$）因此，聯立式

$$\begin{cases} y=\dfrac{2x^2-x+1}{2x+1} \\ y=k\ (\text{或}\ k') \end{cases} \quad \text{有唯一的實數解}$$

即 $2x^2-(2k+1)x+(1-k)=0$ 有重根

由判別式 $=0$

$\Rightarrow\ k=\dfrac{1}{2},\quad k'=-\dfrac{7}{2}$

得點 $P=(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$，$P'=(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{7}{2})$

（順便一提，P 與 P' 並非就是雙曲綫

$y=\dfrac{2x^2-x+1}{2x+1}$ 的頂點）

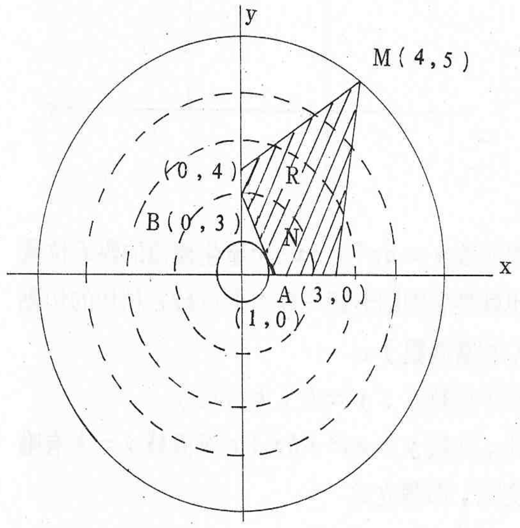
底下是變數爲閉區域時，求極值的一個例子：

如果實數 x，y 滿足：

$$\begin{cases} x,\ y\geq 0 \\ 3x+y\geq 3 \\ 5x-y\leq 15 \\ x-4y\geq -16 \end{cases}$$

求 x^2+y^2 的極大值與極小值。

x^2+y^2 是（x，y）的一個函數，它的函數值 k 隨著變數（x，y）在區域 R 上的變動而有所不同。另外，$x^2+y^2=k$（k 是任意正實數）的幾何意義則是一個以原點爲圓心的同心圓系。



因此，整個問題的幾何意義便是要在圓系 $x^2+y^2=k$ 中找兩個圓，它們都通過區域 R，而它們的半徑 $\sqrt{k}$ 則分別是一個爲最大，一個爲最小，直觀來看，通過 M 點的圓產生了半徑的極大；而以綫段 AB 爲切綫切於 N 點的圓產生了半徑的極小。 $M=(4,5)$， 另外，

圓 $x^2+y^2=k$ 與直綫 AB：$3x+y-3=0$ 有唯一的交點，即

聯立式 $\begin{cases} x^2+y^2=k \\ 3x+y-3=0 \end{cases}$ 有唯一的實數解

也就是 $10x^2-18x+(9-k)=0$ 有重根

得出 $k=\dfrac{9}{10}$，而 $N=(\dfrac{9}{10},\dfrac{3}{10})$

數學裏的許多觀念大都源自直觀，抽象原是爲了操作運用的方便。

教學上，有必要時常常帶領學生回到問題的直觀層面上。

（本文作者現任教於台中私立曉明女中