談數學歸納法

高級中學數學課程試用教材試教心得報告

李勝利

數學歸納法是證明數學命題一種重要的方法，一般都在高一上學期教給學生，其介紹的方式不外乎兩種：

(1)利用皮亞諾第五公設（數學歸納法原理），若 $S\subset \boldsymbol{N}$，而且 S 具有下列兩個性質：

(i) $1\in S$

(ii) $n\in S \Rightarrow n$ 的後繼者 $n'\in S$，

則 $S=\boldsymbol{N}$ 成立

(2)利用良序原理（每一正整數之非空 z 集合均有一最小之元素）與數學歸納法原理之等值性質。即視良序原理爲公設，證明數學歸納法爲一定理。

對於一個高一的學生，抽象能力還沒有得到充分的發展前，要他們去理解皮亞諾公設的數學歸納法原理實在很困難，更談不上利用它來證明一些數學題目。上述的介紹方式，可以說是“強迫”學生去接受的一種教學過程，站在教師本位的立場，我們的理論洋洋大觀，可是以學生爲中心的教學活動，就需要在他們的心智成熟範圍之內，給予適當的教材。

歸納法是我們在日常生活中，分析現象時常用的推理方式，它的本意是說，從已有的，但不一定完全的資料整理出通用的規則，這種整理出來的通則，正確與否，全靠觀察和推測的功夫。基礎數學有關數學歸納法的教材內容，其精神之首在於培養學生觀察、推測、歸納的能力。下面舉些例子：

請觀察下列的各種數字型式，並推測其一般式。

1.
$$1=1=\frac{2\cdot 1}{2}$$
$$1+2=3=\frac{3\cdot 2}{2}$$
$$1+2+3=6=\frac{4\cdot 3}{2}$$
$$1+2+3+4=10=\frac{5\cdot 4}{2}$$

2.
$$1=1=1^2$$
$$1+2+1=4=2^2$$
$$1+2+3+2+1=9=3^2$$
$$1+2+3+4+3+2+1=16=4^2$$

3.
$$1=1$$
$$1-4=-(1+2)$$
$$1-4+9=1+2+3$$
$$1-4+9-16=-(1+2+3+4)$$

答案：1. $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{(n+1)n}{2}$

2. $1+2+\cdots+(n-1)+n+(n-1)+\cdots+2+1=n^2$

3. $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{n+1}n^2=(-1)^{n+1}(1+2+3+\cdots+n)$

然而，我們的推斷，有時候却是不正確的。貓、狗、牛都是哺乳動物，它們都有四隻脚。常見的哺乳動物都生活在陸地上，所以我們可以由此歸納出哺乳動物的一些特性；哺乳動物有四隻脚，而且生活在陸地上，這是錯誤的結論。其他數學上的例子：

1. $n\in N$，n^2-n+41 是否恒爲質數

2. $n \in N$， $n^2 - 79n + |60|$ 是否恒爲質數

3. $n \in N$， $2^{2^n} + 1$ 是否恒爲質數

上面的 1.，2.例，對初學者而言，如果不加以提醒，只要 $n = 1$，2，3，4，…時原式成立了，多數的學生便遽下結論，$\forall n \in N$，原式皆成立。當我們告訴了學生 $n = 41$ 時，$n^2 - n + 41$ 不是質數，可知整理出來的通則有時不適用。如果要通則能適用於任何時機，就需要加以論證。諸如此類的通則，我們用什麼方法來證明呢？下面舉出一個例題：

如果要求

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{99\cdot 100}+\frac{1}{100\cdot 101}$$

的和，直接計算很費時，我們先來觀察這個級數的前幾個部分和，由計算得

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3} = S_1 + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{2}{3}$$

$$S_3 = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4} = S_2 + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{2}{3}+\frac{1}{3\cdot 4} = \frac{3}{4}$$

$$S_4 = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5} = S_3 + \frac{1}{4\cdot 5} = \frac{3}{4}+\frac{1}{4\cdot 5} = \frac{4}{5}$$

$$S_5 = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6} = S_4 + \frac{1}{5\cdot 6} = \frac{4}{5}+\frac{1}{5\cdot 6} = \frac{5}{6}$$

$$S_6 = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7} = S_5 + \frac{1}{6\cdot 7} = \frac{5}{6}+\frac{1}{6\cdot 7} = \frac{6}{7}$$

……………………………………………

這些部分和所成的數列爲

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{6}{7},\cdots$$

每一項的分母比分子多 1，而且第 1 項的分子爲 1，第 2 項的分子爲 2，第 3 項的分子爲 3，…。依據這個觀察的結果可以推測第 1 項加到第 n 項的和。

$$S_n = \frac{n}{n+1}$$

如果我們能證明對於所有的自然數 n，

$S_n = \dfrac{n}{n+1}$ 都成立，那麼將 $n = 100$ 代入，得

$S_{100} = \dfrac{100}{101}$，即爲我們的答案。

$S_n = \dfrac{n}{n+1}$ 這個推測是根據前面幾項的觀察而來的，對於後面的每一項是不是也都正確呢？例如當 $n = 7$ 時，我們可由 S_6 推 S_7，得

$$S_7 = S_6 + \frac{1}{7\cdot 8} = \frac{6}{7}+\frac{1}{7\cdot 8} = \frac{7}{8}$$

而由 $S_n = \dfrac{n}{n+1}$，將 $n = 7$ 代入得 $S_7 = \dfrac{7}{7+1} = \dfrac{7}{8}$；所以 $n = 7$ 時 $S_n = \dfrac{n}{n+1}$ 也成立

再由 S_7 推 S_8，得

$$S_8 = S_7 + \frac{1}{8\cdot 9} = \frac{7}{8}+\frac{1}{8\cdot 9} = \frac{8}{9}$$

而由 $S_n = \dfrac{n}{n+1}$，將 $n = 8$ 代入得 $S_8 = \dfrac{8}{8+1} = \dfrac{8}{9}$；所以 $n = 8$ 時 $S_n = \dfrac{n}{n+1}$ 也成立，如此繼續檢驗下去。

在上列的計算中，我們由

$S_6 = \dfrac{6}{6+1}$ 推得後項 $S_{6+1} = \dfrac{6+1}{(6+1)+1}$

再由

$$S_7 = \frac{7}{7+1} \text{ 推得後項 } S_{7+1} = \frac{7+1}{(7+1)+1}$$

……………………………………………

一般而言，對於任一 $k \geqslant 1$，如果我們也同 $S_n = \dfrac{n}{n+1}$ 一樣猜測 $S_k = \dfrac{k}{k+1}$，那麼推得的後項 S_{k+1} 之值爲多少呢？

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k+1}{k+2} \\ &= \frac{k+1}{(k+1)+1} \end{aligned}$$

而由 $S_n = \dfrac{n}{n+1}$，將 $n = k+1$ 代入，得

$$S_{k+1} = \frac{k+1}{(k+1)+1};$$

此即說明，如果我們猜測任何前項 $S_k = \dfrac{k}{k+1}$，則經由實際推演所得的後項 $S_{k+1} = \dfrac{k+1}{(k+1)+1}$ 仍然具有猜測值 $S_n = \dfrac{n}{n+1}$ 的型式。換句話說，推測的 $S_n = \dfrac{n}{n+1}$，當 $n = k+1$ 時，

$$S_{k+1} = \frac{k+1}{(k+1)+1}$$

可利用假設的前項 $S_k = \dfrac{k}{k+1}$ 推得後項爲

$$S_{k+1} = \frac{k+1}{(k+1)+1},$$

由於 k 爲任意選定，因此我們可完成 $n-1$ 個前項推後項的步驟，使得前項與後項的外觀型式皆相同，當 $k=1$ 時，假設的首項

$S_1 = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$ 與計算值 $S_1 = \dfrac{1}{1 \cdot 2} = \dfrac{1}{2}$

相同，如果完成第一推演步驟，即可得正確的 $S_2 = S_{1+1} = \dfrac{1+1}{(1+1)+1} = \dfrac{2}{2+1}$，完成第二推演步驟（$k=2$），又可得正確的 $S_3 = S_{2+1} = \dfrac{2+1}{(2+1)+1} = \dfrac{3}{3+1}$ ……，最後完成第 $n-1$ 個推演步驟（$n = k-1$）時，便可得到正確的 $S_n = \dfrac{n}{n+1}$。

我們很期待這種論證的方法，學生自己閱讀之後，能品嚐出一些味道，現在再把這種論證的架構用流程圖說明於後。（參閱下頁）

上面證明的整個過程中，並沒有用到任何特殊的理論，只是遵循了兩個法則：

(1)第一個猜測值 $S_1 = \dfrac{1}{1+1}$（於 $S_n = \dfrac{n}{n+1}$ 中，令 $n=1$）是否與實際計算結果相等——即當 $n=1$ 時，檢驗原式成立。

(2)任何仿照猜測值 $S_n = \dfrac{n}{n+1}$ 而複製的 $S_k = \dfrac{k}{k+1}$，所推得的後項是否仍然爲 $S_{k'} = \dfrac{k'}{k'+1}$ 的"型式"，$k' = k+1$，$k \geqslant 1$——即假設 $n = k$ 時原式成立，由此推得 $n = k+1$ 時原式也成立。

當這兩個法則都成立時，由第一個正確值 $S_1 = \dfrac{1}{2}$ 經 $n-1$ 個步驟之同型式推導，所得的 $S_n = \dfrac{n}{n+1}$，對每一個自然數 n 而言都是正確的。如果第一猜測值對了，但無法一連串地複製出相同的型式，那麼猜測結論是錯誤的；即使能一連串地複製出相同的"某一"型式，如果起點的猜測值與實際計算不合，那麼終點的結論也是錯誤。

通常由考慮例子而嘗試猜測廣義定律的數學命題，都可以用上述的法則加以證明，這種證明

猜測 $S_n = \dfrac{n}{n+1}$

實 際 推 演

$S_1 = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$	第 1 步：左右兩式之結果相等	$S_1 = \dfrac{1}{2}$
$S_2 = \dfrac{2}{2+1} = \dfrac{2}{3}$	$\equiv$	$S_1 \xrightarrow{推} S_2 = S_1 + \dfrac{1}{2 \cdot 3} = \dfrac{2}{3}$
…………	………	………
$S_k = \dfrac{k}{k+1}$	第 k 步：任何固定之 k，$k \geqslant 1$	$S_k = \dfrac{k}{k+1}$ 假設知道（利用左式之猜測結果）
$S_{k+1} = \dfrac{k+1}{(k+1)+1}$	第 $k+1$ 步：左右兩式之結果相等	$S_k \xrightarrow{推} S_{k+1} = S_k + \dfrac{1}{(k+1)(k+2)} = \dfrac{k+1}{(k+1)+1}$

任何前項 $S_k = \dfrac{k}{k+1}$ 皆可推得“型式”相同的後項 $S_{k+1} = \dfrac{k+1}{(k+1)+1}$

依次令 $k = 1, 2, \cdots n-1$，可由 $S_1 = \dfrac{1}{2}$ 最後推得 $S_n = \dfrac{n}{n+1}$

只要 $S_1 = \dfrac{1}{2}$ 正確

$S_n = \dfrac{n}{n+1}$ 爲正確，$\forall n \in N$

的方法一般稱爲**數學歸納法**，它所證得的結論，保證對所考慮的正整數都成立，是一種全納法。

“骨牌連瑣反應”是解釋數學歸納法一個很好的“模型”，當我們推倒了第1張牌，會使第2張牌也倒下，因此造成第3張牌的倒下，…，由第 k 張牌的倒下，又造成第 $k+1$ 張牌的倒下也就是說任前一張的倒下，都會造成後一張牌的倒下,…結果所有的骨牌就嘩啦嘩啦,通通倒下了

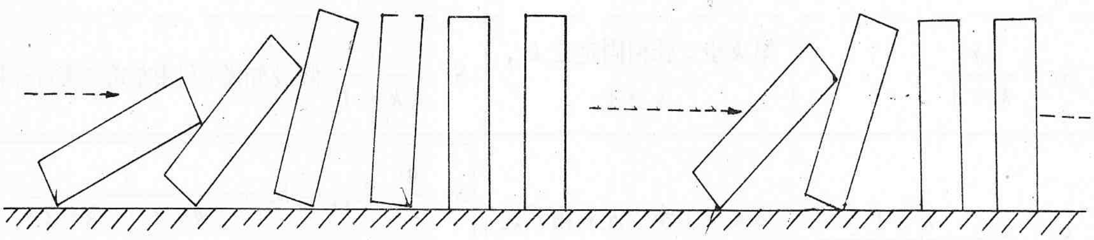
這一過程的癥結爲：

(1)第1張牌要能倒下……證明 $n=1$ 時命題成立

(2)假設第 k 張牌會倒下……假設 $n=k$ 時命題成立

由第 k 張牌的倒下造成……根據 $n=k$ 時命題成立的假設

第 $k+1$ 張牌的倒下……推證 $n=k+1$，命題亦成立。



皮亞諾的數學歸納法是由公設出發，對於命題的證明，需先設一使命題成立之一切自然數 n 所成的集合 S，次證 $S=N$，因而證得原命題成立，最後才在慣用的情形下，略去 $S=N$ 之證明，而直接利用“$n=1$，$n=k \Rightarrow n=k+1$”的形式證明命題，一般初學者總覺得皮亞諾的數學歸納法是在抽象的領域裏想不通，只好無可奈何的接受，多少年來，我們的教材一直使用一個不必去想（或者想不通）的公設，也未曾從公設的深處去發掘人類直觀的想法，並爲初學者理出一條康莊大道，逢此教材改革之際，喜見極富創意的數學歸納法教材，特整理一二，以饗讀者。

（本文作者現任教於中正預校）