二項式定理的推廣

唐翰文

學習過二項式定理之後，我們不難發現此定理運用的廣泛性與重要性，而唯一美中不足的，它只能被侷限於二項式的應用，而非能適用於多項式，例如：我們求$(1+x+x^2)^k$展開式中某一項的係數，我們便沒辦法用二項式定理求出答案來由於此種的不便，必須由此另闢一解決之徑，使其更廣泛的應用以補其不足。

定理：若$f(x)=(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^n)^k$

$=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3\cdots\cdots+a_rx^r\cdots+a_{nk}x^{nk}$

則$a_r=S(k,r)-C(k,1)S(k,r-n-1)+C(k,2)S(k,r-2n-2)\cdots\cdots\cdots+(-1)^kC(k,k)S(k,r-nk-k)=\sum_{t=0}^{k}(-1)^tC(k,t)S(k,r-tn-t)$

證明：1. $f(x)=(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^n)^k$

首先我們求當“$r\leq n$”時之a_r值

令$f(x)=(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^n)^k$

$$=g^k(x)=\overbrace{g(x)\cdot g(x)\cdots g(x)}^{k\text{項}}$$

在k項$g(x)=(1+x+x^2+\cdots+x^n)$中取每一個$g(x)$中的$x^b$項（$b$爲變數，等於0或1或2……或$n$）所有$k$項$g(x)$中之$x^b$之乘積，其指數之和卽等於$r$，而$a_r$可視爲在此條件下符合者的總個數和。

$\because x^r=x^{b_1}\cdot x^{b_2}\cdot\cdots\cdots x^{b_k}$（在此定義$b_1$，$b_2$……以便區分從不同$g(x)$中取出）

$\therefore\quad r=b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots\cdots b_k$

$b_1,b_2,b_3,\cdots\cdots b_k$都是0到$n$的整數，可以取重覆組合求得其總個數$S(k,r)$，故得知$a_r=S(k,r)$，此乃在“$r\leq n$”條件下才能成立，若$r>n$時則$b$可能也會大於$n$，與原來定義$b$在0到$n$的範圍不符，故此時$a_r\neq S(k,r)$。

2. $r\geq n$時

$$f(x)=(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^n)^k$$

$$=\frac{(1-x)^k(1+x+x^2+\cdots+x^n)}{(1-x)^k}$$

$$=\frac{(1-x^{n+1})^k}{(1-x)^k}$$

$$f(x)=\frac{(1-x^{m+1}+x^{m+1})^k}{(1-x)^k}(1-x^{n+1})^k$$

$$=(1-x^{n+1})^k\left[\frac{1-x^{m+1}+x^{m+1}}{1-x}\right]^k$$

$$=(1-x^{n+1})^k\left[(1+x+x^2+\cdots+x^m)+\left(\frac{x^{m+1}}{1-x}\right)\right]^k$$

$$=(1-x^{n+1})^k\left[(1+x+x^2+\cdots+x^m)^k+C(k,1)(1+x+x^2+\cdots+x^m)^{k-1}\cdot\frac{x^{m+1}}{1-x}+\cdots+C(k,k)\left(\frac{x^{m+1}}{1-x}\right)^k\right]$$

$$=(1-x^{n+1})^k(1+x+x^2+\cdots+x^m)^k+(1-x)^k(1+x+x^2+\cdots+x^n)^k\times x^{m+1}\left[C(k,1)(1+x+x^2\cdots+x^m)^{k-1}\frac{1}{1-x}+\cdots\cdots+C(k,k)\cdot\frac{(x^{m+1})^{k-1}}{(1-x)^k}\right]$$

$$=(1-x^{n+1})^k(1+x+x^2+\cdots+x^m)^k$$

$$+x^{m+1}(1+x+x^2+\cdots+x^n)^k[C(k,1)(1+x+\cdots\cdots+x^m)^{k-1}(1-x)^{k-1}\cdots+C(k,k)(x^{m+1})^{k-1}]$$

$$=(1-x^{n+1})^k(1+x+x^2+\cdots+x^m)^k+p(x)$$

對所有$m\in N$，若使得$m\geq nk$ 我們不難發現$f(x)$展開式中的某一項$x^r(0\leq r\leq nk)$必存在於$(1-x^{n+1})^k(1+x+x^2+\cdots+x^m)^k$展開式中，而另一部分$p(x)$由於最小次數的一項$x^{m+1}$，因$m+1>nk$故可不予考慮。

$$f(x)=(1-x^{n+1})^k(1+x+x^2+\cdots+x^m)^k+p(x)$$

由二項式定理可得：

$$f(x)=(1+x+x^2+\cdots+x^m)^k-C(k,1)(1+x+x^2+\cdots+x^m)^k x^{n+1}+\cdots+(-1)^k C(k,k)(1+x+x^2+\cdots+x^m)^k x^{(n+1)k}+p(x)$$

①第一項$(1+x+x^2+\cdots+x^m)^k$，

$a_{0r}=S(k,r)$，但$r\leq nk\leq m$.

②第二項$-C(k,1)(1+x+x^2+\cdots+x^m)^k x^{n+1}$，

$a_{1r}=-C(k,1)S(k,r-n-1)$，$r\leq nk<m$

③……………………………………

$a_{2r}=C(k,2)S(k,r-2n-2)$，$r\leq nk<m$

⋮

ⓚ……………………………………

$a_{kr}=(-1)^k S(k,r-kn-k)$，$r\leq nk<m$

$$a_r=a_{0r}+a_{1r}+a_{2r}+\cdots+a_{kr}$$
$$=S(k,r)-C(k,1)S(k,r-n-1)+C(k,2)S(k,r-2n-2)+\cdots+(-1)^kC(k,k)S(k,r-nk-k)\ \#$$

得證

註：此定理若要成一般通式，則需定義當$S(k,r')$中之r'小於零時，$S(k,r')=0$

理論推廣：

1. $f(x)=(1+x+x^2+\cdots+x^n)^k$，使$n=0$，則$f(x)=1^k=1$，因此常數項$a_0=1$，其餘$a_r$之值皆爲零。

$\because a_r=S(k,r)-C(k,1)S(k,r-n-1)+C(k,2)S(k,r-2n-2)+\cdots+(-1)^kC(k,k)S(k,r-nk-k)$

$n=0$ 則 $a_r=S(k,r)-C(k,1)S(k,r-1)+C(k,2)S(k,r-2)+\cdots+(-1)^kC(k,k)S(k,r-k)=0$ #

2. 使$n=1$，

則$f(x)=(1+k)^k=C(k,0)+C(k,1)x^1+\cdots+C(k,r)x^r+\cdots+C(k,k)x^k$

而當$n=1$，

$$a_r=S(k,r)-C(k,1)S(k,r-n-1)+C(k,2)S(k,r-2n-2)\cdots\cdots$$
$$=S(k,r)-C(k,1)S(k,r-2)+C(k,2)S(k,r-4)+\cdots+(-1)^kC(k,k)S(k,r-2k)$$

此值即等於$C(k,r)$ #

3. $f(1)=(n+1)^k=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{nk}$

$$=\sum_{r=0}^{nk}a_r$$
$$=\sum_{r=0}^{nk}[S(k,r)-C(k,1)S(k,r-n-1)+C(k,2)S(k,r-2n-2)+\cdots+(-1)^kC(k,k)S(k,r-nk-k)]$$
$$=\sum_{r=0}^{nk}S(k,r)-C(k,1)\sum_{r=0}^{nk}S(k,r$$

$-n-1)+C(k,2)\sum_{r=0}^{nk}S(k,r-$

$2n-2)+\cdots+(-1)^{k}C(k,k)\sum_{r=0}^{nk}$

$S(k,r-nk-k)$

先求 $\sum_{r=0}^{nk}S(k,r)$ 之值

$\sum_{r=0}^{nk}S(k,r)=S(k,0)+S(k,1)+S(k,2)+\cdots+S(k,nk)$

$=C(k,0)+C(k,1)+C(k+1,2)+C(k+2,3)+\cdots+C(k+nk-1,nk)$

$=C(k+1,1)+C(k+1,2)+C(k+2,3)+\cdots+C(k+nk-1,nk)$

$=C(k+2,2)+C(k+2,3)+\cdots+C(k+nk-1,nk)$

$=\cdots\cdots\cdots\cdots$

$=C(k+nk,nk)$

$=S(k+1,nk)$

同理

$\sum_{r=0}^{nk}S(k,r-n-1)$

$=\sum_{r=0}^{nk-n-1}S(k,r')$

（前幾項 r' 小於零可不予考慮）

$=S(k+1,nk-n-1)$

$\therefore\sum_{r=0}^{nk}S(k,r-2n-2)$

$=S(k+1,nk-2n-2)$

故原式

$(n+1)^{k}$

$=S(k+1,nk)-C(k,1)S(k+1,nk-n-1)+\cdots+(-1)^{k}C(k,k)S(k+1,nk-nk-k)$

$=C[k(n+1),nk]-C(k,1)C[(k-1)(n+1),nk-n-1]+\cdots+(-1)^{k}C(k,k)S\ (k-k)(n+1),nk-nk-k]$

$=C[k(n+1),k]-C(k,1)C[(k-1)(n+1),k]+\cdots+(-1)^{k}C(k,k)C[(k-k)(n+1),k]$ ＃

$\therefore(n+1)^{k}$

$=C[k(n+1),k]-C(k,1)C[(k-1)(n+1),k]+\cdots+(-1)^{k}C(k,k)C[(k-k)(n+1),k]$

$\Rightarrow n^{k}=C(kn,k)-C(k,1)C[(k-1)n,k]+\cdots+(-1)^{k}C(k,k)C[(k-k)n,k]$

應用：我們以兩個例子說明此基本定理的應用。

$Ex1.$ 同時投出四個公正骰子，求點數和為10之機率。

我們以次數來代替骰子之點數（從1到6），則此條件下的個數即為

$(x+x^{2}+x^{3}+x^{4}+x^{5}+x^{6})^{4}$

展開式中 x^{10} 之係數，將原式x^{4}提出得

$x^{4}(1+x+x^{2}+x^{3}+x^{4}+x^{5})^{4}$

顯然的，x^{10} 係數就是

$(1+x+x^{2}+x^{3}+x^{4}+x^{5})^{4}$

展開式x^{6}係數，代入前面之定理得

$a_{6}=S(4,6)-C(4,1)S(4,6-5-1)$

$=80$

故點數和為 10 之機率為 $80/6^{4}$

$Ex2.$ 從 0 到 100000 求各位數和為 20 的總個數。

做法與上略同，只要求出

$(1+x+x^{2}+\cdots+x^{9})^{5}$

展開式中 x^{20} 之係數，即是其總個數，得

$a_{20}=5631$

（本文作者現就讀於中興大學）