

# 計算機對數學教育的影響

戴久永

計算機發明至今雖然不超過 50 年，但是由於電子工業的快速發展，如今的計算機不但體積小，功能多，性能更是優越，而且價格也並不貴，無形中使它逐漸地幾乎無孔不入，對人類的生活產生無與倫比的影響力。數學教育也無可避免地受到計算機的威脅。1979 年十二月份的 Nature 雜誌以「蘇俄教授說計算機可取代數學」為標題報導了發生於 1979 年和 1980 年間在一份俄文週刊上關於計算機與數學的論戰，1980 年四月在美國 SIAM NEWS 上，有一位 James C. Frauenthal 在編輯專論 (issue editorial) 以「應用數學上的改變具革命性」為題也談到相同的話題。接著美國名數學家 R. P. Boas 在 Mathematical Intelligencer 上以「數學家已不再有必要存在了嗎？」為題評論了這件事。另一方面，數學課程的內容也會有所變動，離散數學 discrete mathematics 將興起。

1982 年 5 月 25 日 Los Angeles Times 有一項消息，標題為「微積分面臨挑戰」，最近出版的一本新書 Mathematics Tomorrow 也有一篇文章題目是「離散數學將取代微積分」，由這一連串的發展看來，不久的將來數學教學將會面臨重大的改變。筆者在此願借「數學傳播」寶貴的篇幅，向讀者報導這項數學界的大事。

×        ×        ×        ×        ×

Nature 報導如下：

據 Aleksandr Kitaigorodskii 在一份頗具聲譽的俄文週刊 Literaturnaya Gazeta (1979 年第 43 期) 說：計算機必將改變由學童至科學家整個數學訓練的結構。他假想在未來每一間教室的課桌上都有一架小型計算機，純數學將變

成一種藝術或「文化」，而解題將逐漸由學術要項中消失。有了計算機做為第三者出現，Kitaigorodskii 說，數學和科學間長期「婚姻」的「離婚」時機已然成熟。

他的文章顯然不是有意成為枯燥的未來學一篇形諸文字的「文字運動」(press campaign) 是標準的俄國式非正式傳播提議重大政策改變的前奏。數個星期之後在該刊第 49 期上，蘇俄科學研究院數學研究所教授 M. Evgrafov 表面上提出相反的看法，然而在提出改革計劃必須小心的意見後，實際上却更強調數學的無關性 mathematical irrelavance。M. Evgrafov 尤其指出「沒有任何一個由純數學得出的結果」在至少的 50 年內有任何實際的應用。而到那時候 90% 的結果都早已被遺忘。同時在純數學結果被發現的時候，「最典雅的數學結果」最多不會超過 100 人瞭解它。既然只有如此少數的人具有從事「創造性數學工作」的能力，他認為目前堅持在高等教育和研究機構進行數學訓練是「浪費(時間)」、「僵化的」和「一無所用的」。

至於解題，他認為在未來，這些將成為程式設計人(中等水準資格人士)的領域，只有當牽涉到問題錯誤地陳述(wrongly formulated)時，才需要向具有高深資格的數學家諮詢。

到目前為止，較激烈的反駁意見被編排在一個專欄下的小方塊。他們主要是說計算機沒有能力「解決」任何問題。更明確一點地說，處理連續或無限小過程(infinitesimal processes)。

一個較具創意的說法是 Penza 的 Candidate of Technical Sciences (大約相當於 Ph. D) A. Badaev 所提的，他說沒有數學的共同語言

，科學很快就會陷入類似「聖經上著名的巴貝塔傳奇」(Biblical legend of the Tower of Babel)的境地。

×            ×            ×            ×            ×

SIAM NEWS 的文章說：「在本世紀初葉，Niels Bohr 和 Albert Einstein 提出理論性的結果使物理學發生了革命性的改變，這並不是新聞。我大略地翻閱一下我所任教的大學目錄，發現在物理學系的教師名單有 55 人，然而却沒有一個人把古典力學列為興趣項目 (area of interest)。我懷疑在 1980 年會有任何一個物理系的研究生能以解決牛頓力學的問題而獲頒博士學位。

當然 Bohr 和 Einstein 以及他們的朋友們並沒有把所有舊的物理問題全都解決了，相反地他們又引發了一套新問題。那些舊的未解決的問題當然並不會自動消失了。那麼它們到底如何了呢？它們轉移到其他學科，譬如應用力學和力學工程。

面對這種情況，本世紀初期的那些物理學教授們又怎麼辦呢？他們所受的訓練已經過時了。自然有些人重新學習一些量子力學和相對論。我猜想大多數人仍然留在原先工作的地方，並且繼續做著與以前所做大致相同的工作。由演變的觀點來說，物理系古典學派的人士在一個學術世代（由得到博士學位至退休）中絕跡。雖然這一現象現在回顧起來似乎非常簡單和顯然，我想在

1920 年代，這些人的未來看來似乎相當不確定。

物理學上的變革對我們又有什麼關係？很簡單，我深信現在我們正要經歷著在數學上一次大變動，其劇烈程度與無可挽回恰如本世紀初發生於物理學上同出一轍。這種改變的起源發生於數年之前，而其影響對我來說已一天天越來越顯然了。推動的力量就是計算機的發明。影響就是數學領域中無可避免的改變。我們這些自認為應用數學家絕對不可自鳴得意地認為自己對這種改變具有免疫力，或是它唯一邏輯上的受益人。

我個人認為，在下一學術世代中，數學的主流將不再是分析、數論和拓樸，而將是數值分析、作業研究和統計。目前我們已看到那些計算導

向的數學領域頗為成功地吸引了大批大學生、碩士和博士研究生；更重要的是得到學校行政當局的撥款聘請新的師資。我並沒有說純數學領域或應用數學的古典題目諸如變換方法、偏微分方程和近似理論將會消失。如同牛頓力學，它們却即將永遠地退出數學系的中心舞台。

當然另有一番替代景象出現。這對那些滿於現狀的人來說並不見得令人感到愉快。數學家們可以拒絕計算機侵入他們的領域。這些人可以辯稱用數值技巧解題不算是數學。事實上，在許多大學這種論調或是類似的說法已經出現。結果是學校為了滿足學生們的需求，成立了稱為計算機科學或數學科學之類的新學系。然後逐漸地，數學系的教師們除了教微積分之外，沒有什麼好幹。可笑的是如同物理系中，現代物理學者教著古典力學，計算機導向的數學家比許多受古典數學訓練的數學家更能提供切題的初等微積分。

其實不管是系名改變或系上教師研究焦點改變並不重要，重要的是至 2025 年（我個人的看法）在大學校園中，絕大多數的數學家必然是利用計算機從事他們的工作，或者著手進行研究用以改進計算機演算法必須解決的根本基礎問題。只有在極少數的地方殘留著幾個我們今天稱之為純數學的研究中心。

×            ×            ×            ×            ×

R. P. Boas 在「數學家不再有存在的必要了嗎？」一文中寫道：數學家是多餘的嗎？至少，數學不再對任何科學家有用處了嗎？計算機真能解決所有科學的問題嗎？現在叫數學系的學生們做習題是在浪費時間嗎？這些以及其他類似的問題是最近在蘇俄一份週刊 Literaturnaya Gazeta，一本不為西方數學家所熟知的雜誌（包括本人在內，我是由於讀了 Vera Rich 的文章才知道的）上四篇筆戰上提到。據我所知，做為作家聯盟的正式刊物，Literaturnaya Gazeta 確實是一份相當權威性的出版品。雜誌上所刊登相對的觀點，據對蘇俄有深刻研究的專家說，是一些位居要津人士對數學的角色和計算機在蘇俄教育體系中權力鬥爭的明證。最後的結論必將對未來蘇俄的科學發展有重大的影響。因此我在這裏將各篇重點摘述如下。

第一篇文章以 A divorce case 為題，作者 Aleksandr Kitaigorodskii 原來是位物理學者，現在是在歷史、哲學和科學教育界相當知名的角色。所謂「離婚」是數學和科技分家。而計算機是案中的第三者。Kitaigorodskii 所持的觀點在物理學家之間並非什麼創見。就是說對直覺上可信服的結果加以證明是一種時間上的浪費。例如他對研究捆裝球體 (packing of sphere) 的數學家加以取笑，因為我們只要動手捆裝一些，然而再看看那一個方式好就可以了。(他沒有提到在高於三維的空間中如何捆裝球體的問題。) 他聲稱所有在應用上有用的問題，現在都可以改用計算機解決。因此「應用數學」實在是多餘的。至於純數學，現在已降為一種藝術的形式。Kitaigorodskii 並不否定藝術。但是他認為只有最有能力的藝術家才值得鼓勵去從事藝術工作。(這個觀點所具有的危險性或許在西方比在蘇俄的環境下更為顯明) 由於計算機的發明，數學教學必須改變，由數學家的手中取走。另外，學生們不再必要解任何習題，因為計算器或計算機能給出所有的答案。有趣的是類似這種對數學未來的觀念在西方幾乎同時由 Frauenthal 提出。然而 Frauenthal 似乎認為計算機迫使數學循從不同的發展方向，而 Kitaigorodskii 則認為所有數學與科學的結合均毫無前途可言。

第二篇是由著名的分析學家 M. Evgrafov 寫的。這是篇迴響。雖然表面上看來是由另一角度攻擊數學。他提出三項「無可爭辯的」提綱：沒有任何數學在 50 年內找到任何應用；99% 的所有數學在 50 年內均被人們所遺忘，任何一篇數學論文至多有 100 人看得懂。(他顯然過於誇張這種結果。任何一位數學讀者都能提出反例。) 他並沒有提出任何證據支持自己的看法，但是却歸結出一些結論。一門具有如此沒有展望的特性的學科必然有其優點，否則不可能歷時數千年仍然存在。說實在的，最好的數學非常重要，然而對於使用數學的人來說，由於難與數學家們溝通，却不易利用到能對他們有用的數學結果。Evgrafov 建議成立一種中級人士來彌補這種缺憾，他擬出一項最為有效地利用數學家的計劃——困難的任務。他聯帶地攻擊「發表或死亡」(

publish or perish) 原則。這項原則在蘇俄也像西方一樣地流行。他認為這種政策阻礙了「中等水準」的數學家廣潤他們的教育而逼迫他們從事「創造性」的工作。

Evgrafov 然後指出，與 Kitaigorodskii 所宣稱的全然相反，計算機根本不會解題，它們只是能非常快速地計算，同時需要各種不同程度的數學家把問題改成計算機能處理的形式。而對於這類活動最困難的問題才需要受過高深訓練的數學家，這些數學家如同在其他社會，正是蘇俄社會所需要的。

第三篇文章是 M. Postnikov 一位著名的拓樸學家所執筆。他嘆惜一般民衆對於數學成就的一無所知。他把這種無知歸咎於目前所教導的數學都是十七世紀的數學。他說他贊同 Evgrafov 的看法(雖然他誇張了三項提綱)。但是他仍然要較完全地解說他認為數學是什麼。基本上，他說，數學包括具計劃性模式 (schematic models)，計劃性模式的計劃性模式 (schematic models of schematic models) 等等。他用了相當長的文句推廣這一概念。數學並不包括僅為了解決某一特定問題的解決，而是發展可以用以解題的模式。計算機的功用僅僅改變了數學發展的方向和進步的速率，這些都是無論如何都將發生而且已在發生的事情。

對於 Kitaigorodskii 的暗示談到這裏為止。至於他的特殊見解，絕大多數都是不正確的。球體捆裝問題相當不容易，而且其中大有講究的餘地，並且在應用上頗具重要性。正像 Evgrafov 所說，沒有任何計算機自身具有解決甚至是最簡單的問題的能力，而 Postnikov 認為計算機對於數學和科學之間的關係沒有任何真正的影響。當然他加速了舊數學的過時以及新數學的誕生，然而這種過程無論如何遲早必然會發生的。Postnikov 在本章的結尾中提及一些人文科學可能數學化的意見。

在最後一篇文章中，四位有名的應用數學家為 Kitaigorodskii 的看法表示感嘆，他們自己常藉助計算機幫助應用的人們解決問題，並不願見到數學與科學「分家」，反而抽象概念對於科技發展甚具重要性。例如，倘若沒有複變數、黎曼



幾何、群論、演算子理論 (operator theory) 等，就不可能有現代物理以及其技術性的結晶。他們指出事實上有許多新穎而且有效的數學方法可以用來解決實際問題，但是這些方法必須利用計算機輔助。然而把應用數學看成計算却如同把物理看做儀器一般的荒謬。

另一方面，Kitaigorodskii 是對的。計算機的確改變了我們對數學和其應用的相互關係的看法，而數學教學也應朝這種改變而改變。但是即使你有計算機在口袋，堅實的數學知識却仍然不可或缺。最進步的計算機對例行問題 (routine problems) 仍然只會給出例行的答案 (routine solutions)。至於 Evgrafov 的三大提綱，第一項完全錯誤。(我們可輕易地舉出很多應用來自 1930 年以後所發展的數學)。第二項是誇大的說法，即使並沒誇張也並無關緊要。至於第三項，每個人都可對其他所有學科提出類似的說法。最後，Postnikov 曾說計算機對數學和科學的結合一點影響都沒有，而事實上却正好相反。計算機增強了兩者之間的聯繫，這真正是個好現象。它們並且呼籲兩類數學之間的較緊密的結合。

所有發言者都同意的一點是，尤其由於計算機的存在 (掌上型或其他)，數學教學有必要改革，至於如何改變並沒有一致的看法。至少 Evgrafov 對一些改革的提議並沒有太大感受。他把目前的情況打了一個比喻。一個人吃了一頓大餐，仍然感到肚子餓，等到吃了飯後甜點才心滿意足，因而得出結論說，吃肉和蔬菜都是浪費時間，我們應該只吃甜點。雖然沒有一篇文章很明白地說出來，似乎我們需要對於各式各樣的教育有更多的經驗，才可能新的境況下找出那一種教育對我們最為適宜。

×      ×      ×      ×      ×

數學教學將會面臨什麼樣子的改變呢？1982 年 5 月 25 日的洛杉磯時報有一篇標題是「微積分面臨挑戰」的報導：被稱為人類心智最偉大成就之一的微積分可能步入拉丁文的後塵，面臨被人們敬而遠之的命運。

雖然微積分長久以來一直是大學課程中主要的科目之一，但它現在却受到計算機的挑戰，而

且有逐漸失勢的不利傾向。愈來愈多的數學家 and 科學家力主在學校教導他們稱為「離散數學」的科目；包括邏輯和機率以及物品如何組合和計數，這些都是應用計算機解題的重要基礎知識。

自從文藝復興以來，一直被稱為「科技之后」的微積分即將失色是計算機對於廿世紀的重大影響的又一實例。紐約州立大學巴伐羅分校的計算機科學教授 Anthony Raston 說：「計算機的興起，改變世界的面貌，不僅是在許多顯而易見的方面，而且也在一些重大智能的層面。」、「太多太多有待數學家們解決的問題，都是來自與計算機和計算機科學有關的方面。」他極力主張離散數學在大學的一二年級課程中至少應像微積分一樣受到重視。

離散數學和微積分之間的緊張情勢反應出很早以來就已為數學家們感受到的相對趨勢。離散的進行方式界定自然 (nature) 以個別元素的觀點。諸如沙灘上的沙粒或數字 1、2、3 等等。計算機就是離散機器，它處理個別可計數的事物，例如由複雜的樹形圖 (free diagram) 中找出某一路徑 (path)。

相反的，自從十七世紀微積分發明以來就一直佔了上風的連續數學却聲稱自然可以視同一平滑不斷的水流 (flow)，諸如落體運動或行星繞著太陽運轉。微積分是連續方式的工具，而計算機威脅著要將它從其優勢的地位拉下來。

經過好幾年的討論，紐約的 Alfred P. Sloan 基金會計劃安排以邀請方式聚集數學教育學者於 1982 年六月在麻塞諸賽州的 Williams College 舉辦研討會，希望能擬定一份包含離散數學在內的大學新課程。基金會的特別計劃組主任 Stephen White 說：「人們感到微積分在大學中幾乎佔了一個神聖不可侵犯的地位，而它事實上並不真有這種身價。」使微積分成為所有大學生必須通過的窄門實在是一件荒謬的規定。

即使是所有的人都同意，將一份經過長時間考驗的課程表改變並不是一件容易的事。而在本案例中，並不是每個人都主張改變。

位於 Monterey 的 Naval Post Graduate School 計算機科學系的兼任教授 Richard Hamming 說：「這真是一項愚蠢的舉動。主因是

進入計算機科學的人們大多數不懂數學。當他們提議把微積分踢出去，他們真不知道自己在講些什麼。」他辯稱，即使對離散數學本身來說，微積分也是不可或缺的，Hamming 說：「學生們不學微積分，就無法深入離散數學。無足輕重的一些問題當然用不著微積分，然而一旦深入困難的問題，你不得不採用在微積分課中所學到的技巧。」

加州大學柏克萊分校計算機科學系教授 Richard Karp 支持 Hamming 的看法，他認為微積分對於計算機科學上的問題也是重要的。他說：「即使你手頭上的問題是離散的，一個連續近似解通常可能對問題的解決仍然大有提示作用的，我對取消微積分的建議十分不服。」然而他也認為離散數學也有比微積分優越的地方。正如目前所教的，減少了許多問題成爲機械的運算。

在離散數學的課程中，足以用簡單基本的內涵注入較多證明的成分和介紹相當深入的推理思考。

曾經擔任 Dartmouth College 校長達 11 年之久的 John G. Kemeny，即將回到數學系教授的原崗位。早在 1955 年，Kemeny, J. Laurie Snell 和 Gerald L. Thompon 曾合作編著第一本入門性的離散數學教科書 *Introduction to Finite Mathematics*。Sloan 基金會已撥出一筆經費給 Kemeny，使他能改寫那本書，以強調離散數學與計算機的結合。

在 Dartmouth，現在所有的學生都是修一學期的微積分和一學期的離散數學，而不是如同一般大學修一整學年的微積分。Kemeny 說：「現在已有相當多的人支持我們早在 25 年前所做的建議，在數學基礎課程中列入一部份微積分和一部份離散數學（或稱有限數學）。離散數學討論一些在應用上像微積分一樣重要的課題。機率論就是其中最重要的一項課題。當然對社會科學家有其重要性，就是對生物與醫藥科學也不例外。醫生們隨時都在從事機遇性的預測。我認為讓一個醫學預科的學生沒有具備一點機率概念就可畢業，是件不可原諒的錯誤。」

強調以離散數學取代微積分，其中困難之一是在物理和工程上有相當多應用離不開微積分。

「我們如此做的最大困難在於仍然必須在其他學科提供數學課程。」Raston 同意地說。這將是在 Williams 會議中討論的一個重點。

另外一個問題在於與多如牛毛的微積分教本相比，可供離散數學教學用的教科書實在少得可憐。同時，數以千計習於教微積分的教師，必須重新學習如何教離散數學。「改變意謂著工作，新的教科書，學習去教新的科目，它意謂著精神上或物質上很大的震撼。」Raston 說。

推動離散數學的潛在因素是人們認爲對許多學生來說，離散數學比微積分容易。這是一大吸引力，因爲很多剛入大學的新鮮人必須補修一些數學。很多人認爲離散數學是一門滿足補修條件的「容易數學」。

就是這些贊同離散數學的人士，很多也認爲應該教授微積分。即使是僅只爲了它在思考武裝上的理由。Kemeny 堅稱「每個學生都應學習一些微積分。它實在是人類最了不起的發明之一。」Raston 也認爲「每個受過教育的人都應有些微積分的知識。」然而大力支持微積分的 Karp 却排斥以文化理由而學習微積分的說法。Karp 辯稱：「我們也可說熱力學第二定律如同『戰爭與和平』和聖經是受過教育的人都應具備的一些知識。我喜歡微積分是由於它很有用。」

Raston 說：「微積分並不如其他數學那麼重要。」Kemeny 並沒有忘記人們忽視他在 25 年主張離散數學，而直到現在才開始留意。他不願推測將來會發生些什麼。但是他說：「我猜想很多學校將會朝向這個方向推進。」

× × × × ×

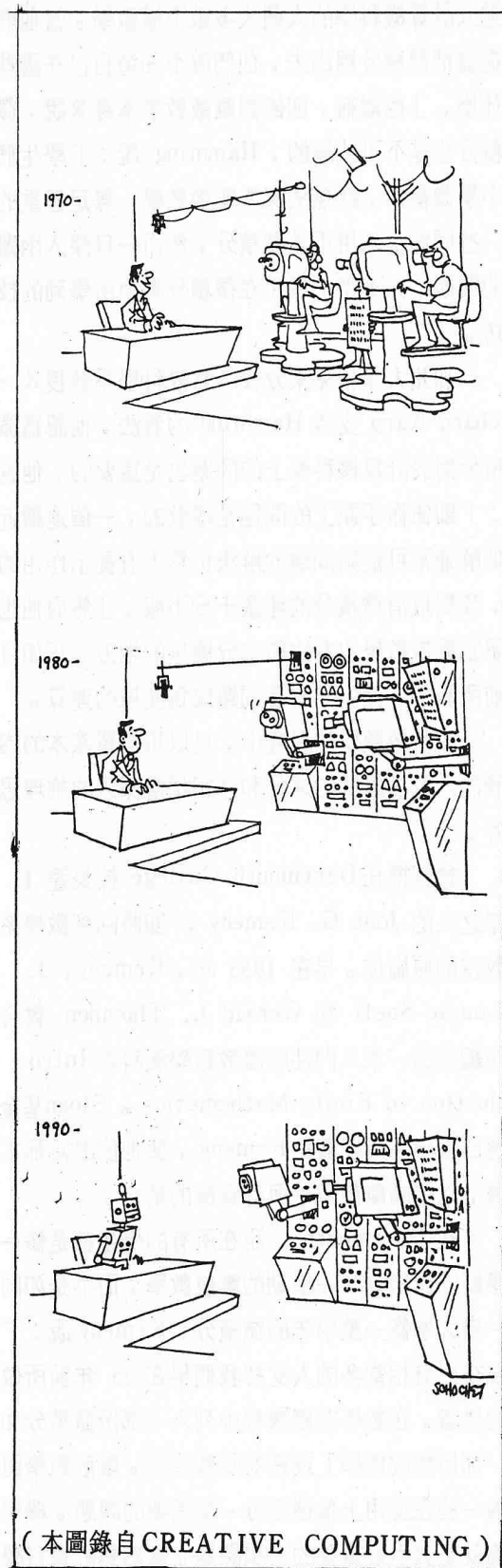
看完以上的報導，讀者必然對國外在數學教育上的一些新發展有所認識，面對這種形式，國內的數學教育應該如何變化呢？有心人似應及早「未雨綢繆」了。

## 參考資料

1. Vera Rich *Computers can replace maths for scientist, says Soviet Professor, Nature 282 (20-27 Dec. 1979)*

- , p. 770
2. J. C. Frauenthal *Change in applied mathematics is revolutionary*, Siam News, April, 1980, p. 8
  3. R. P. Boas *Are Mathematicians Unnecessary*, The Mathematical Intelligencer, Vol. 2 No. 4, 1980
  4. Aleksandr Kitaigorodskii *A divorce case*, 24 October 1979
  - M. Evgrafov *But was there a marriage*, 5 Dec. 1979
  - M. Postnikov *Imprisoned by fortuitous metaphors*, 30 Jan 1980
  - E. Ventcel, L Gurin, A Myskis, L Sandovskii *The Computer — It's still not everything*, 12 March 1980 p. 11  
(all in Literaturnaya Gazeta.)
  5. Anthony Raston *The decline of calculus — The rise of discrete math*. Mathematics Tomorrow edited by Lynn Arthur Steen, p. 213 Springer - Velag New York Inc. 1981
  6. Lee Dembart *Discrete mathematics gains favor — Computer era threatens pre-eminence of calculus*, Los Angeles Times May 25, 1982

(本文作者現任教於交大管科系)



(本圖錄自 CREATIVE COMPUTING)