與西瓦定理類似的定理之擴張

許振榮

在「關於西瓦定理及關聯的定理」一文中我們證明了下列與西瓦定理類似的定理：

類似定理　設 A_1, A_2, A_3, A_4 爲在空間中（即不在同一平面上的）四點（故爲一四面體之頂點）又設 B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 分別爲這個四面體 $A_1A_2A_3A_4$ 的稜 A_1A_2, A_3A_4, A_1A_3, A_2A_4, A_2A_3, A_1A_4 上的點。則直線 B_1B_2, B_3B_4, B_5B_6 交於一點之充要條件爲下列三式之成立：

$$(1)\begin{cases} \dfrac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\dfrac{A_2B_5}{B_5A_3}\cdot\dfrac{A_3B_2}{B_2A_4}\cdot\dfrac{A_4B_6}{B_6A_1}=1\ , \\[2ex] \dfrac{A_1B_3}{B_3A_1}\cdot\dfrac{A_3B_5}{B_5A_2}\cdot\dfrac{A_2B_4}{B_4A_4}\cdot\dfrac{A_4B_6}{B_6A_1}=1\ , \\[2ex] \dfrac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\dfrac{A_2B_4}{B_4A_4}\cdot\dfrac{A_4B_2}{B_2A_3}\cdot\dfrac{A_3B_3}{B_3A_1}=1\ . \end{cases}$$

又在同文中我們也把西瓦定理擴張爲下列形狀：

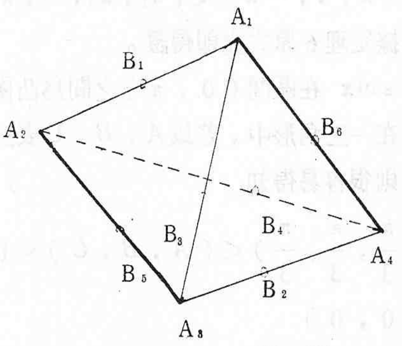
西瓦定理的擴張　設點 B_1, B_2, B_3 分別在 $\Delta A_1A_2A_3$ 之邊 A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 上，或其延長上，則 A_1B_2, A_2B_3, A_3B_1 爲共點或爲平行之充要條件爲下式之成立：

$$(2)\quad \frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\frac{A_3B_3}{B_3A_1}=1\ .$$

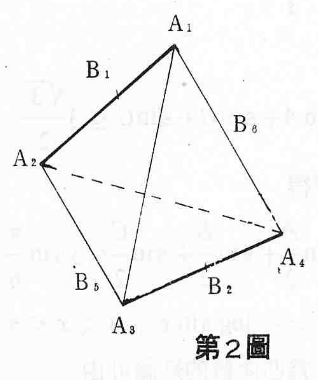
在上述的類似定理中所考慮的四面體 $A_1A_2A_3A_4$ 之稜上的 B 點均爲內分點。如果我們和上述的擴張的西瓦定理一樣地，也容許外分點的 B 點之存在，則關於四面體的 B_1B_2, B_3B_4, B_5B_6 爲共點的上述類似定理需要如何修改？又其證明如何？對於這樣問題我們可證明下列命題：

與西瓦定理類似的定理的擴張　設 $A_1A_2A_3A_4$ 爲空間中一四面體。又設 B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 分別在 A_1A_2, A_3A_4, A_1A_3, A_2A_4, A_2A_3, A_1A_4 上或其延長上，則直線 B_1B_2, B_3B_4, B_5B_6 爲共點之充要條件爲下列二條件之成立:

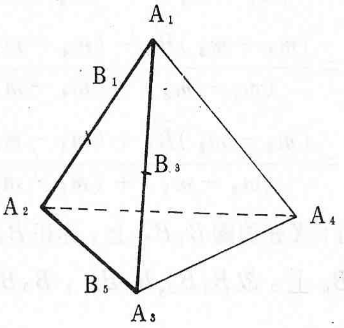
I．(A)所有 B 點均爲內分點，或(B)一對對稜上的 B 點爲內分點，其餘的稜上的 B 點均爲外分點，或(C)在一平面上的三稜上的 B 點爲內分點，其餘的 B 點均爲外分點。



第1圖



第2圖



第3圖

II. 下列三式成立：

$$(1)\begin{cases} \dfrac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\dfrac{A_2B_5}{B_5A_3}\cdot\dfrac{A_3B_2}{B_2A_4}\cdot\dfrac{A_4B_6}{B_6A_1}=1\,, \\[2ex] \dfrac{A_1B_3}{B_3A_3}\cdot\dfrac{A_3B_5}{B_5A_2}\cdot\dfrac{A_2B_4}{B_4A_4}\cdot\dfrac{A_4B_6}{B_6A_1}=1\,, \\[2ex] \dfrac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\dfrac{A_2B_4}{B_4A_4}\cdot\dfrac{A_4B_2}{B_2A_3}\cdot\dfrac{A_3B_3}{B_3A_1}=1\,。 \end{cases}$$

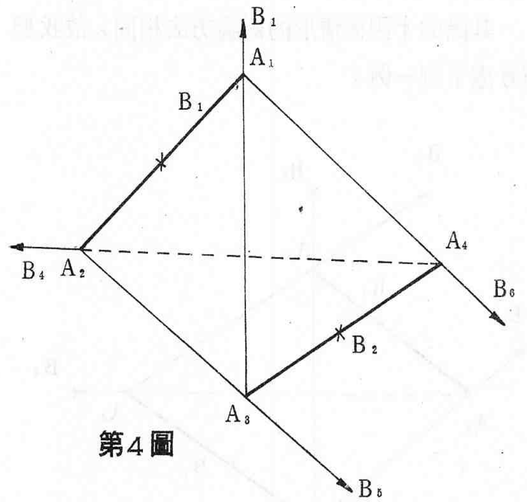
為證明此定理，我們先證明下列補助定理：

補助定理　設如上述，B點在一四面體之稜上，或其延長上。又假設下列二條件成立：

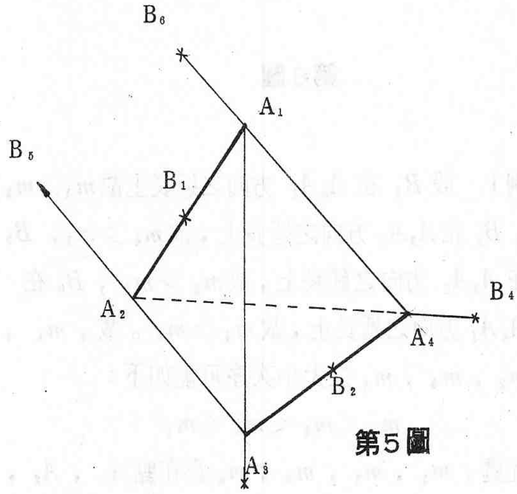
(1)上述定理之條件 I 的(B)，(C)二項成立。

(2)在四面體 $A_1A_2A_3A_4$ 的各頂點和各 B點均有適當質量的質點存在，使 B點為其稜上內分點時其為在兩端頂點處的二質點之質量中心。又在 B點為外分點的各稜上，落在另外一頂點和 B點中間的頂點為在另一頂點處和在 B點處的二質點之質量中心。如果這二個條件成立，則 B_1B_2 ，B_3B_4 ，B_5B_6 為共點，且上述定理的條件 II 之三式成立。

證明　在一稜上，B點在其延長上的情形有二種，在上述定理的條件 I 的(B)項下，B點為外分點的一共有四稜，故共有十六種情形。在這些十六種情形中，有二種情形（稱為除外情形）沒有滿足補助定理的條件(2)之質點存在。其他的十四種均有滿足補助定理的條件(2)的質點存在。要討論這些事情，我們不妨假設 B_1，B_2 為內分點，其外的 B點拘為外分點。先討論除外情形如下：



第4圖



第5圖

除外情形1　此為 B_3 在 A_3A_1方向之延長上，B_4 在 A_4A_2 方向之延長上，B_5 在 A_2A_3 方向之延長上，B_6 在 A_1A_4 方向之延長上的情形。此時，為適合補助定理的條件(2)，在頂點 A_1，A_2，A_3，A_4 處的質點的質量 m_1，m_2，m_3，m_4 要滿足下列條件：

$$m_1>m_3\,,\quad m_3>m_2\,,\quad m_2>m_4\,,$$

故

$$m_1>m_4\,。$$

但是，因為 B_6 在 A_1A_4 方向之延長上，$m_4>m_1$ 要成立，與 $m_1>m_4$ 矛盾。

除外情形2　此為 B_3 在 A_1A_3 方向之延長上，B_4 在 A_2A_4 方向之延長上，B_5 在 A_3A_2 方向之延長上，B_6 在 A_4A_1 方向之延長上的情形。此時下列條件成立：

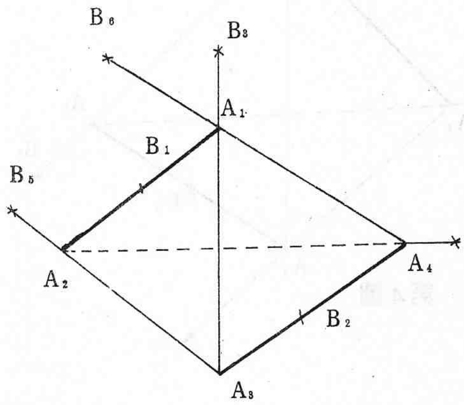
$$m_1<m_3\,,\quad m_3<m_2\,,\quad m_2<m_4\,,$$

故

$$m_1<m_4\,。$$

但是，因為 B_6 在 A_4A_1 方向之延長上，$m_4 < m_1$ 。此與上述 $m_4 > m_1$ 矛盾。

其餘的十四種情形的討論方法相同。故我們僅考慮下列一例：



第6圖

例1 設 B_3 在 A_3A_1 方向之延長上故 $m_1 > m_3$，B_4 在 A_2A_4 方向之延長上，故 $m_4 > m_2$，B_5 在 A_3A_2 方向之延長上，故 $m_2 > m_3$，B_6 在 A_4A_1 方向之延長上，故 $m_1 > m_4$ 。故，m_1，m_2，m_3，m_4 之大小次序可能如下：

$$m_3 < m_2 < m_4 < m_1$$

此處，m_1，m_2，m_3，m_4 為在點 A_1，A_2，A_3，A_4 處的質點之質點。此時，依補助定理的條件(2)，我們可得下列諸式：

$$(3)\begin{cases} \vec{B}_1 = \dfrac{m_1\vec{A}_1 + m_2\vec{A}_2}{m_1 + m_2}, \\[2ex] \vec{B}_2 = \dfrac{m_3\vec{A}_3 + m_4\vec{A}_4}{m_3 + m_4}, \\[2ex] \vec{B}_3 = \dfrac{m_1\vec{A}_1 - m_3\vec{A}_3}{m_1 - m_3}, \\[2ex] \vec{B}_4 = \dfrac{m_4\vec{A}_4 - m_2\vec{A}_2}{m_4 - m_2}, \\[2ex] \vec{B}_5 = \dfrac{m_2\vec{A}_2 - m_3\vec{A}_3}{m_2 - m_3}, \\[2ex] \vec{B}_6 = \dfrac{m_1\vec{A}_1 - m_4\vec{A}_4}{m_1 - m_4}. \end{cases}$$

現在考慮下列位置向量所表的點 X：

$$(4)\quad \vec{X} = \frac{m_1\vec{A}_1 + m_2\vec{A}_2 - m_3\vec{A}_3 - m_4\vec{A}_4}{m_1 + m_2 - m_3 - m_4}$$

$$= \frac{(m_1+m_2)\vec{B}_1 - (m_3+m_4)\vec{B}_2}{(m_1+m_2) - (m_3+m_4)}$$

$$= \frac{(m_1-m_3)\vec{B}_3 - (m_4-m_2)\vec{B}_4}{(m_1-m_3) - (m_4-m_2)}$$

$$= \frac{(m_2-m_3)\vec{B}_5 + (m_1-m_4)\vec{B}_6}{(m_2-m_3) + (m_1-m_4)}$$

由(4)式得知：X 在直線 B_1B_2 上，亦在 B_3B_4 上，亦在 B_5B_6 上。故 B_1B_2, B_3B_4，B_5B_6 為共點。

又從(3)式可得：

$$(5)\begin{cases} \dfrac{A_1B_1}{B_1A_2} = \dfrac{m_2}{m_1}, & \dfrac{A_3B_2}{B_2A_4} = \dfrac{m_4}{m_3}, \\[2ex] \dfrac{A_3B_3}{B_3A_1} = -\dfrac{m_1}{m_3}, & \dfrac{A_2B_4}{B_4A_4} = -\dfrac{m_4}{m_2}, \\[2ex] \dfrac{A_3B_5}{B_5A_2} = -\dfrac{m_2}{m_3}, & \dfrac{A_4B_6}{B_6A_1} = -\dfrac{m_1}{m_4}. \end{cases}$$

代入(5)式於(1)式的三式之左邊，則得

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_5}{B_5A_3}\cdot\frac{A_3B_2}{B_2A_4}\cdot\frac{A_4B_6}{B_6A_1}$$

$$= \left(\frac{m_2}{m_1}\right)\left(-\frac{m_3}{m_2}\right)\left(\frac{m_4}{m_3}\right)\left(-\frac{m_1}{m_4}\right)$$

$$= 1,$$

$$\frac{A_1B_3}{B_3A_3}\cdot\frac{A_3B_5}{B_5A_2}\cdot\frac{A_2B_4}{B_4A_4}\cdot\frac{A_4B_6}{B_6A_1}$$

$$= \left(-\frac{m_3}{m_1}\right)\left(-\frac{m_2}{m_3}\right)\left(-\frac{m_4}{m_2}\right)\left(-\frac{m_1}{m_4}\right)$$

$$= 1,$$

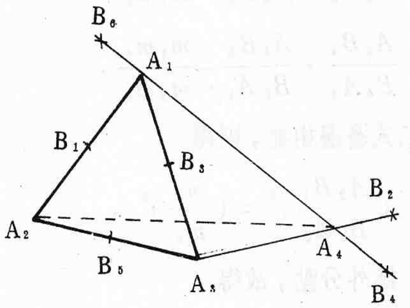
$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_4}{B_4A_4}\cdot\frac{A_4B_2}{B_2A_3}\cdot\frac{A_3B_3}{B_3A_1}$$

$$= \left(\frac{m_2}{m_1}\right)\left(-\frac{m_4}{m_2}\right)\left(\frac{m_3}{m_4}\right)\left(-\frac{m_1}{m_3}\right)$$

$$= 1.$$

故條件(2)之三式成立。

其次來討論定理的條件Ⅰ的(C)項的情形。此時一共有三稜 B 點在其延長上。B 點在一稜的延長上之情形有二，故共有八種情形。這些八種均有滿足補助定理的條件(2)的質點存在。要考慮這些情形，我們不妨假設 B_1，B_3，B_5 為內分點，B_2, B_4，B_6 為外分點。因為，各種情形討論方法相同，我們只考慮下列一例：



第7圖

例2 B_2 在 A_3A_4 方向之延長上，故 $m_4>m_2$，B_4 在 A_2A_4 方向之延長上，故 $m_4>m_2$，B_6 在 A_4A_1 方向之延長上，故 $m_1>m_4$。故在 A_1，A_2，A_3，A_4 處的質點之質量 m_1，m_2，m_3，m_4 之大小關係可能有下列情形：

$$m_3<m_2<m_4<m_1$$

此時，依補助定理的條件(2)，我們可得

$$(6)\begin{cases}\vec{B}_1=\dfrac{m_1\vec{A}_1+m_2\vec{A}_2}{m_1+m_2},\\ \vec{B}_2=\dfrac{m_4\vec{A}_4-m_3\vec{A}_3}{m_4-m_3},\\ \vec{B}_3=\dfrac{m_1\vec{A}_1+m_3\vec{A}_3}{m_1+m_3},\\ \vec{B}_4=\dfrac{m_4\vec{A}_4-m_2\vec{A}_2}{m_4-m_2},\\ \vec{B}_5=\dfrac{m_2\vec{A}_2+m_3\vec{A}_3}{m_2+m_3},\\ \vec{B}_6=\dfrac{m_1\vec{A}_1-m_4\vec{A}_4}{m_1-m_4}.\end{cases}$$

現在考慮有下列位置向量的點 X：

$$(7)\quad \vec{X}=\frac{m_1\vec{A}_1+m_2\vec{A}_2+m_3\vec{A}_3-m_4\vec{A}_4}{m_1+m_2+m_3-m_4}$$
$$=\frac{(m_1+m_2)\vec{B}_1-(m_4-m_3)\vec{B}_2}{(m_1+m_2)-(m_4-m_3)}$$
$$=\frac{(m_1+m_3)\vec{B}_3-(m_4-m_2)\vec{B}_4}{(m_1+m_3)-(m_4-m_2)}$$
$$=\frac{(m_2+m_3)\vec{B}_5+(m_1-m_4)\vec{B}_6}{(m_2+m_3)+(m_1-m_4)}$$

由(7)式得知：X 在直線 B_1B_2 上，亦在 B_3B_4 上，又在 B_5B_6 上。故 B_1B_2，B_3B_4，B_5B_6 相交於一點 X。

其次，從(6)式可得

$$(8)\begin{cases}\dfrac{A_1B_1}{B_1A_2}=\dfrac{m_2}{m_1}, & \dfrac{A_3B_3}{B_3A_1}=\dfrac{m_1}{m_3},\\ \dfrac{A_3B_5}{B_5A_2}=\dfrac{m_2}{m_3}, & \dfrac{A_3B_2}{B_2A_4}=-\dfrac{m_4}{m_3},\\ \dfrac{A_2B_4}{B_4A_4}=-\dfrac{m_4}{m_2}, & \dfrac{A_4B_6}{B_6A_1}=-\dfrac{m_1}{m_4}.\end{cases}$$

代入(8)的諸式於(1)的三式的左邊，則得

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_5}{B_5A_3}\cdot\frac{A_3B_2}{B_2A_4}\cdot\frac{A_4B_6}{B_6A_1}$$
$$=\left(\frac{m_2}{m_1}\right)\left(\frac{m_3}{m_2}\right)\left(-\frac{m_4}{m_3}\right)\left(-\frac{m_1}{m_4}\right)$$
$$=1,$$

$$\frac{A_1B_3}{B_3A_3}\cdot\frac{A_3B_5}{B_5A_2}\cdot\frac{A_2B_4}{B_4A_4}\cdot\frac{A_4B_6}{B_6A_1}$$
$$=\left(\frac{m_4}{m_1}\right)\left(\frac{m_2}{m_3}\right)\left(-\frac{m_4}{m_2}\right)\left(-\frac{m_1}{m_4}\right)$$
$$=1,$$

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_4}{B_4A_5}\cdot\frac{A_4B_2}{B_2A_3}\cdot\frac{A_3B_3}{B_3A_1}$$
$$=\left(\frac{m_2}{m_1}\right)\left(-\frac{m_4}{m_2}\right)\left(-\frac{m_3}{m_4}\right)\left(\frac{m_1}{m_3}\right)$$
$$=1.$$

因之補助定理已證完了。

擴張的與西瓦定理類似的定理之證明 現在我們來證明在開頭所講的擴張定理。我們先假定定理中所講的二條件Ⅰ，Ⅱ成立想來證明 B_1B_2，B_3B_4，B_5B_6 爲共點。先注意：在條件Ⅱ之下，上面所講的二個除外情形不會發生。現在假設除外情形1發生，則

$$(9)\begin{cases}\left|\dfrac{A_1B_3}{B_2A_3}\right|>1, & \left|\dfrac{A_3B_5}{B_5A_2}\right|>1,\\ \left|\dfrac{A_2B_4}{B_4A_4}\right|>1, & \left|\dfrac{A_4B_6}{B_6A_1}\right|>1.\end{cases}$$

故得

$$(10)\quad \left|\frac{A_1A_3}{B_3A_3}\cdot\frac{A_3B_5}{B_5A_2}\cdot\frac{A_2B_4}{B_4A_4}\cdot\frac{A_4B_6}{B_6A_1}\right|>1$$

(10)式與條件Ⅱ之第二式不合。如果除外情形2發

生，則可得

$$⑾\begin{cases}\left|\dfrac{A_1B_3}{B_3A_3}\right|<1\ , & \left|\dfrac{A_3B_5}{B_5A_2}\right|<1\ ,\\ \left|\dfrac{A_2B_4}{B_4A_4}\right|<1\ , & \left|\dfrac{A_4B_6}{B_6A_1}\right|<1\ .\end{cases}$$

故得

$$⑿\quad \left|\frac{A_1B_3}{B_3A_3}\cdot\frac{A_3B_5}{B_5A_2}\cdot\frac{A_2B_4}{B_4A_4}\cdot\frac{A_4B_6}{B_6A_1}\right|<1$$

⑿式亦與條件 II 之第二式不合。

在擴張定理的條件 I 之(B)項之下，我們不妨假設 B_1，B_2 爲二個內分點。因爲除外情形不能發生，其他 B 點之分布必爲在補助定理之證明中所講的十四種情形中之一種。B_5 點爲外分點之情形有二種。現在假設 B_5 在 A_2A_3 方向之延長上。選在 A_1，A_2，A_3，A_4 處的質點之質量 m_1，m_2，m_3，m_4 使 B_1 爲 A_1，A_2 處的二質點之質量中心，A_3 爲在 A_2，B_5 處的二質點之質量中心（在 B_5 處的質點之質量爲 m_3-m_1，$m_3>m_1$），又 B_2 爲在 A_3，A_4 處的二質點之質量中心。依條件 II，可得

$$1=\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_5}{B_5A_3}\cdot\frac{A_3B_2}{B_2A_4}\cdot\frac{A_4B_6}{B_6A_1}$$

$$=\left(\frac{m_2}{m_1}\right)\left(-\frac{m_3}{m_2}\right)\left(\frac{m_4}{m_3}\right)\frac{A_4B_6}{B_6A_1}\ .$$

因之，

$$⒀\quad \frac{A_4B_6}{B_6A_1}=-\frac{m_1}{m_4}\text{。}$$

所以，

$$⒁\quad \overrightarrow{B_6}=\begin{cases}\dfrac{m_4\overrightarrow{A_4}-m_1\overrightarrow{A_1}}{m_4-m_1}\text{，當 } m_4>m_1,\\[2ex] \dfrac{m_1\overrightarrow{A_1}-m_4\overrightarrow{A_4}}{m_1-m_4}\text{，當 } m_4<m_1.\end{cases}$$

又從條件 II 之第二，第三兩式可得：

$$\left(\frac{A_1B_3}{B_2A_3}\right)\left(-\frac{m_2}{m_3}\right)\left(\frac{A_2B_4}{B_4A_4}\right)\left(-\frac{m_1}{m_4}\right)=1\ ,$$

$$\left(\frac{m_2}{m_1}\right)\left(\frac{A_2B_4}{B_4A_4}\right)\left(\frac{m_3}{m_4}\right)\left(\frac{A_3B_3}{B_3A_1}\right)=1\ .$$

從這兩式，再得

$$⒂\begin{cases}\dfrac{A_1B_3}{B_3A_3}\cdot\dfrac{A_2B_4}{B_4A_4}=\dfrac{m_3m_4}{m_1m_2}\ ,\\[2ex] \dfrac{A_2B_4}{B_4A_4}\cdot\dfrac{A_3B_3}{B_3A_1}=\dfrac{m_1m_4}{m_2m_3}\ .\end{cases}$$

把⒂的二式邊邊相乘，則得

$$\left(\frac{A_2B_4}{B_4A_4}\right)^2=\left(\frac{m_4}{m_2}\right)^2\text{。}$$

因爲 B_4 爲外分點，故得

$$⒃\quad \frac{A_2B_4}{B_4A_4}=-\frac{m_4}{m_2}$$

代入⒃式於⒂中的第一式，則得

$$⒄\quad \frac{A_1B_3}{B_3A_3}=-\frac{m_3}{m_1}$$

因之，可得

$$⒅\quad \overrightarrow{B_4}=\begin{cases}\dfrac{m_4\overrightarrow{A_4}-m_2\overrightarrow{A_2}}{m_4-m_2}\text{，當 } m_4>m_2,\\[2ex] \dfrac{m_2\overrightarrow{A_2}-m_4\overrightarrow{A_4}}{m_2-m_4}\text{，當 } m_4<m_2,\end{cases}$$

和下列：

$$⒆\quad \overrightarrow{B_3}=\begin{cases}\dfrac{m_3\overrightarrow{A_3}-m_1\overrightarrow{A_1}}{m_3-m_1}\text{，當 } m_3>m_1,\\[2ex] \dfrac{m_1\overrightarrow{A_1}-m_3\overrightarrow{A_3}}{m_1-m_3}\text{，當 } m_3<m_1\text{。}\end{cases}$$

這樣，可能有八種情形發生。但是

$$\begin{cases}\overrightarrow{B_5}=\dfrac{m_3\overrightarrow{A_3}-m_2\overrightarrow{A_2}}{m_3-m_2},\\[2ex] \overrightarrow{B_6}=\dfrac{m_4\overrightarrow{A_4}-m_1\overrightarrow{A_1}}{m_4-m_1},\end{cases}$$

其中 $\quad m_3>m_2\ ,\quad m_4>m_1\ ,$

$$\begin{cases}\overrightarrow{B_3}=\dfrac{m_1\overrightarrow{A_1}-m_3\overrightarrow{A_3}}{m_1-m_3},\\[2ex] \overrightarrow{B_4}=\dfrac{m_2\overrightarrow{A_2}-m_4\overrightarrow{A_4}}{m_2-m_4},\end{cases}$$

其中 $\quad m_1>m_3\ ,\quad m_2>m_4\ .$

對應於除外情形 1，而如上述此情形不能發生。故僅有七種情形。這些七種情形均已在補助定理的證明中考慮過。他們均滿足補助定理的條件(2)。B_5 在 A_3A_2 方向之延長上時，討論完全相同，又可得七種情形。這些十四種情形均滿足補助定理所要求的條件 2，故依補助定理 B_1B_2，B_3B_4，B_5B_6 爲共點。

其次討論擴張定理條件Ⅰ的(C)項的情形。此時我們不妨假定B_1，B_3，B_5爲內分點，B_2，B_4，B_6爲外分點。B_2在線段A_3A_4之延長上的情形有二種。現在，先假定B_2在A_4A_3方向之延長上。適當地選在點A_1，A_2，A_3，A_4處的質點的質量m_1，m_2，m_3，m_4使B_1爲在A_1，A_2處的二質點之質量中心，B_5爲在A_2，A_3處的二質點之質量中心，又決定在點B_2處的質點的質量爲m_3-m_4（$m_3>m_4$）使A_3爲在B_2，A_4處的二質點之質量中心，則得

$$(20)\begin{cases}\vec{B}_1=\dfrac{m_1\vec{A}_1+m_2\vec{A}_2}{m_1+m_2},\\[2mm] \vec{B}_5=\dfrac{m_2\vec{A}_2+m_3\vec{A}_3}{m_2+m_3},\\[2mm] \vec{B}_2=\dfrac{m_3\vec{A}_3-m_4\vec{A}_4}{m_3-m_4}.\end{cases}$$

此時，從定理之條件Ⅱ之第一式可得

$$1=\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_5}{B_5A_3}\cdot\frac{A_3B_2}{B_2A_4}\cdot\frac{A_4B_6}{B_6A_1}$$

$$=\left(\frac{m_2}{m_1}\right)\left(\frac{m_3}{m_2}\right)\left(-\frac{m_4}{m_3}\right)\frac{A_4B_6}{B_6A_1}$$

故得

$$(21)\qquad \frac{A_4B_6}{B_6A_1}=-\frac{m_1}{m_4}。$$

因之

$$(22)\quad \vec{B}_6=\begin{cases}\dfrac{m_1\vec{A}_1-m_4\vec{A}_4}{m_1-m_4}，當m_4<m_1,\\[2mm] \dfrac{m_4\vec{A}_4-m_1\vec{A}_1}{m_4-m_1}，當m_4>m_1.\end{cases}$$

再由條件Ⅱ之第二，第三兩式可得

$$\frac{A_1B_3}{B_3A_3}\left(\frac{m_2}{m_3}\right)\frac{A_2B_4}{B_4A_4}\left(-\frac{m_1}{m_4}\right)=1,$$

$$\left(\frac{m_2}{m_1}\right)\frac{A_2B_4}{B_4A_4}\left(-\frac{m_3}{m_4}\right)\frac{A_3B_3}{B_3A_1}=1.$$

故得

$$(23)\begin{cases}\dfrac{A_1B_3}{B_3A_3}\cdot\dfrac{A_2B_4}{B_4A_4}=-\dfrac{m_3m_4}{m_1m_2},\\[2mm] \dfrac{A_2B_4}{B_4A_4}\cdot\dfrac{A_3B_3}{B_3A_1}=-\dfrac{m_1m_4}{m_2m_3}。\end{cases}$$

把(23)之兩式邊相乘可得

$$\left(\frac{A_2B_4}{B_4A_4}\right)^2=\left(\frac{m_4}{m_2}\right)^2。$$

因爲B_4爲外分點，從上式可得

$$(24)\qquad \frac{A_2B_4}{B_4A_4}=-\frac{m_4}{m_2}。$$

代入(24)於(23)的第二式，可得

$$(25)\qquad \frac{A_3B_3}{B_3A_1}=\frac{m_1}{m_3}。$$

因之，

$$(26)\quad \vec{B}_3=\frac{m_1\vec{A}_1+m_3\vec{A}_3}{m_1+m_3}。$$

$$(27)\quad \vec{B}_4=\begin{cases}\dfrac{m_2\vec{A}_2-m_4\vec{A}_4}{m_2-m_4}，當m_4<m_2,\\[2mm] \dfrac{m_4\vec{A}_4-m_2\vec{A}_2}{m_4-m_2}，當m_4>m_2。\end{cases}$$

組合(22)和(27)可得四種情形。如果點B_2在A_3A_4方向之延長上，則同樣地可得四種情形。這些一共八種情形均如上滿足補助定理的條件(2)。故依補助定理，B_1B_2，B_3B_4，B_5B_6三直線爲共點。

現在我們假定B_1B_2，B_3B_4，B_5B_6交於一點，想證明定理的條件Ⅰ，Ⅱ成立。我們先考慮每對對稜上的B點爲同種的情形，即對稜之二稜上的B點同爲內分點，或同爲外分點的情形。先假有二對對稜其上的B點均爲內分點。此時不妨假設它們爲B_1，B_2，B_3和B_4。我們可決定A_2，A_1，A_3，A_4處的質點之質量m_2，m_1，m_3，m_4使下列三式成立：

$$(28)\begin{cases}\vec{B}_1=\dfrac{m_1\vec{A}_1+m_2\vec{A}_2}{m_1+m_2},\\[2mm] \vec{B}_3=\dfrac{m_1\vec{A}_1+m_3\vec{A}_3}{m_1+m_3},\\[2mm] \vec{B}_2=\dfrac{m_2\vec{A}_2+m_3\vec{A}_3}{m_2+m_3}.\end{cases}$$

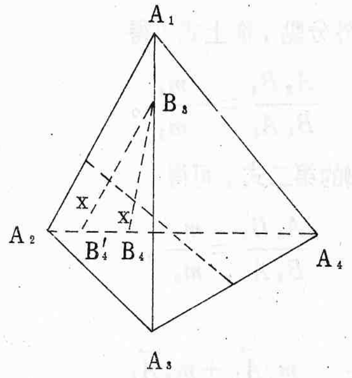
此時考慮下列位置向量所表的點X'：

$$(29)\quad \frac{m_1\vec{A}_1+m_2\vec{A}_2+m_3\vec{A}_3+m_4\vec{A}_4}{m_1+m_2+m_3+m_4}。$$

設B_4'可表成：

$$(30)\quad \vec{B}_4'=\frac{m_2\vec{A}_2+m_4\vec{A}_4}{m_2+m_4}$$

則 X' 可表成



第8圖

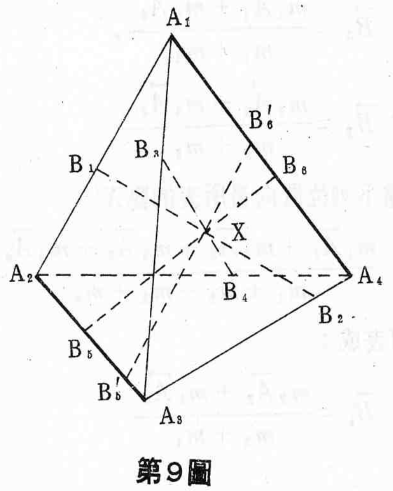
$$(31)\quad \vec{X'}=\frac{(m_1+m_2)\vec{B_1}+(m_3+m_4)\vec{B_2}}{(m_1+m_2)+(m_3+m_4)}$$
$$=\frac{(m_1+m_3)\vec{B_3}+(m_2+m_4)\vec{B_4'}}{(m_1+m_3)+(m_2+m_4)}$$

(31)式表示：B_1B_2 和 B_3B_4' 相交於點 X'。X，X' 均在 B_1B_2 上。故，如果 $B_4'\neq B_4$，則二直線 B_1B_2 和 A_2A_4 均在由 B_3B_4'，B_3B_4 所決定的平面上。因之，A_2A_4 亦在此平面上，A_1A_2 亦在此平面上。此與假定不合。故，$B_4'=B_4$ 且 $X'=X$。此時

$$(30')\quad \vec{B_4}=\frac{m_2\vec{A_2}+m_4\vec{A_4}}{m_2+m_4},$$

而

$$(32)\quad \vec{X}=\frac{(m_1+m_2)\vec{B_1}+(m_3+m_4)\vec{B_2}}{(m_1+m_2)+(m_3+m_4)}$$
$$=\frac{(m_1+m_3)\vec{B_3}+(m_2+m_4)\vec{B_4}}{(m_1+m_3)+(m_2+m_4)}$$



第9圖

$$=\frac{(m_2+m_3)\vec{B_5'}+(m_1+m_4)\vec{B_6'}}{(m_2+m_3)+(m_1+m_4)},$$

此處

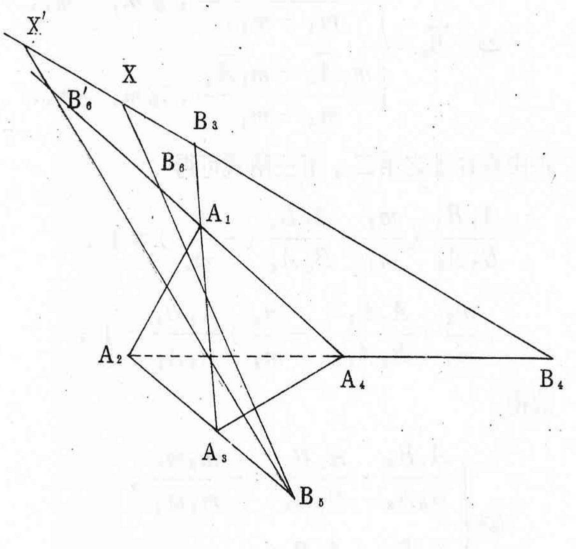
$$(33)\begin{cases}\vec{B_5'}=\dfrac{m_2\vec{A_2}+m_3\vec{A_3}}{m_2+m_3},\\[2ex] \vec{B_6'}=\dfrac{m_1\vec{A_1}+m_4\vec{A_4}}{m_1+m_4}。\end{cases}$$

(32)表示：B_5'，B_6'，X 三點爲共線。由假定 B_5，B_6，X 亦爲共線。現在，如果 $B_5B_6\neq B_5'B_6'$，則 A_1A_4，A_2A_3 均在 XB_6 和 XB_6' 所決定的平面上。此與 $A_1A_2A_3A_4$ 爲一四面體的假定不合。

由上面的討論知：如有二對對稜，在他們上面的B點均為內分點，則第三對對稜上的B點亦均為內分點。故，在二對對稜上的B點為內分點，在第三對對稜上的B點為外分點的情形不可能發生。

其次，假設兩對對稜上的 B 點爲外分點。此時，不妨假設他們爲 B_3，B_4，B_5，B_6。先決定在點 A_1，A_3 處的質點之質量 m_1，m_3 使下式成立：

$$(34_1)\quad \vec{B_3}=\frac{m_1\vec{A_1}-m_3\vec{A_3}}{m_1-m_3},\ m_1>m_3$$



第10圖

其次決定 A_2 處的質點之質量 m_2，使

$$(34_2)\quad \vec{B}_5=\frac{m_3\vec{A}_3-m_2\vec{A}_2}{m_3-m_2},\ m_3>m_2$$

成立。又決定在 A_4 處的質點之質量 m_4，使下式成立：

$$(34_3)\quad \vec{B}_4=\frac{m_4\vec{A}_4-m_2\vec{A}_2}{m_4-m_2},\ (m_4>m_2)$$

現在考慮下列位置向量所表的點 X'：

$$(35)\quad \vec{X}'=\frac{m_1\vec{A}_1+m_2\vec{A}_2-m_3\vec{A}_3-m_4\vec{A}_4}{m_1+m_2-m_3-m_4}$$
$$=\frac{(m_1-m_3)\vec{B}_3-(m_4-m_2)\vec{B}_4}{(m_1-m_3)-(m_4-m_2)}$$
$$=\frac{(m_1-m_4)\vec{B}'_6-(m_3-m_2)\vec{B}_5}{(m_1-m_4)-(m_3-m_2)}$$

此處

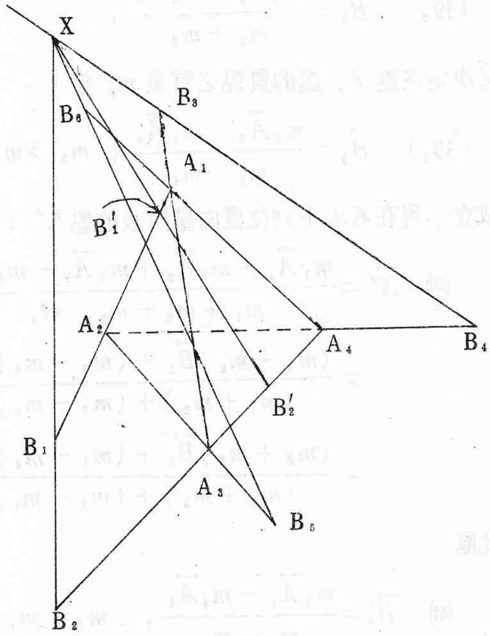
$$(36)\quad \vec{B}'_6=\frac{m_1\vec{A}_1-m_4\vec{A}_4}{m_1-m_4}\text{。}$$

(35)式表示：B_5，B'_6，X' 為共線。由假定 B_5，B_6，X 亦為共線。現在假設 $B_6\neq B'_6$。則 A_1A_4 和 B_3B_4 均在 B_5，B_6，B'_6 所決定的平面上。故，A_1A_3 和 A_2A_4 亦在此平面上。此與假定不合。故，$B_6=B'_6$ 而 $X=X'$。此時

$$(37)\quad \vec{X}=\frac{m_1\vec{A}_1+m_2\vec{A}_2-m_3\vec{A}_3-m_4\vec{A}_4}{m_1+m_2-m_3-m_4}$$
$$=\frac{(m_1-m_3)\vec{B}_3-(m_4-m_2)\vec{B}_4}{(m_1-m_3)-(m_4-m_2)}$$
$$=\frac{(m_1-m_4)\vec{B}_6-(m_3-m_2)\vec{B}_5}{(m_1-m_4)-(m_3-m_2)}$$
$$=\frac{(m_1+m_2)\vec{B}'_1-(m_3+m_4)\vec{B}'_2}{(m_1+m_2)-(m_3+m_4)}$$

而 (38)
$$\left\{\begin{aligned}\vec{B}'_1&=\frac{m_1\vec{A}_1+m_2\vec{A}_2}{m_1+m_2},\\ \vec{B}'_2&=\frac{m_3\vec{A}_3+m_4\vec{A}_4}{m_3+m_4}\end{aligned}\right.$$

(37)式表示：$B'_1B'_2$，B_3B_4，B_5B_6 為共點，且其交點為 X。由假定 B_1B_2，B_3B_4，B_5B_6 亦為共點，且其交點為 X。假設 $B'_1B'_2\neq B_1B_2$，則 A_1A_2 及 A_3A_4 均在 B_1B_2 和 $B'_1B'_2$ 所決定的平面上（B_1B_2 與 $B'_1B'_2$ 交於點 X）。此與假定不合。故，$B_1B_2=B'_1B'_2$。即第三對對稜上的 B 點必為內分點。故三對的對稜上的 B 點均為外

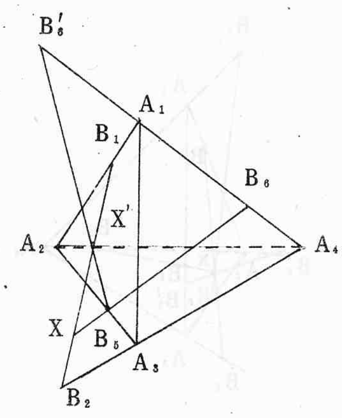


第11圖

分點是不可能的。因之，得知：對稜上的 B 點為同種時，僅有定理中之條件 I 之 A 項和 B 項發生。

其次考慮有一對對稜，在其稜上的 B 點為異種（即，在一稜上的 B 點為內分點，在另一稜上的 B 點為外分點）之情形。此時不妨假設 B_1 為內分點，B_2 為外分點。又不妨假設 B_5 亦為內分點。決定在點 A_1，A_2 處的質點之質量 m_1，m_2 使

$$(39_1)\quad \vec{B}_1=\frac{m_1\vec{A}_1+m_2\vec{A}_2}{m_1+m_2}$$



第12圖

其次決定在點 A_3 處的質點的質量 m_3 使

$$(39_2)\quad \overrightarrow{B}_5=\frac{m_2\overrightarrow{A}_2+m_3\overrightarrow{A}_3}{m_2+m_3},$$

又決定在點 A_4 處的質點之質量 m_4 使

$$(39_3)\quad \overrightarrow{B}_2=\frac{m_3\overrightarrow{A}_3-m_4\overrightarrow{A}_4}{m_3-m_4},\quad m_3>m_4$$

成立。現在考慮下列位置向量所表的點 X'：

$$(40)\quad \overrightarrow{X}'=\frac{m_1\overrightarrow{A}_1+m_2\overrightarrow{A}_2+m_3\overrightarrow{A}_3-m_4\overrightarrow{A}_4}{m_1+m_2+m_3-m_4}=\frac{(m_1+m_2)\overrightarrow{B}_1+(m_3-m_4)\overrightarrow{B}_2}{(m_1+m_2)+(m_3-m_4)}=\frac{(m_2+m_3)\overrightarrow{B}_5+(m_1-m_4)\overrightarrow{B}_6'}{(m_2+m_3)+(m_1-m_4)}$$

此處

$$(41)\quad \overrightarrow{B}_6'=\frac{m_1\overrightarrow{A}_1-m_4\overrightarrow{A}_4}{m_1-m_4},\quad m_4<m_1\ 。$$

(40)式表示：B_5，X'，B_6' 為共線。由假定 B_5，X，B_6 亦為共線。如果 $B_6\neq B_6'$，則 B_5，B_6，B_6' 所決定的平面會包含 A_1A_4，亦包含 B_1B_2。因之，也包含 A_1A_2 和 A_3A_4。此與 $A_1A_2A_3A_4$ 為一四面體的假定不合。故，$B_6=B_6'$，而 $X=X'$。故 B_6 為外分點。此時

$$(42)\quad \overrightarrow{X}=\frac{(m_1+m_2)\overrightarrow{B}_2+(m_3-m_4)\overrightarrow{B}_2}{(m_1+m_2)+(m_3-m_4)}=\frac{(m_2+m_3)\overrightarrow{B}_5+(m_1-m_4)\overrightarrow{B}_6}{(m_2+m_3)+(m_1-m_4)}=\frac{(m_1+m_3)\overrightarrow{B}_3'+(m_2-m_4)\overrightarrow{B}_4'}{(m_1+m_3)+(m_2-m_4)}$$

此處

$$(43)\quad \begin{cases}\overrightarrow{B}_3'=\dfrac{m_1\overrightarrow{A}_1+m_3\overrightarrow{A}_3}{m_1+m_3},\\[2ex] \overrightarrow{B}_4'=\dfrac{m_2\overrightarrow{A}_2-m_4\overrightarrow{A}_4}{m_2-m_4}\ 。\end{cases}$$

因此 B_1B_2，$B_3'B_4'$，B_5B_6 為共點，而其交點為 X。由假定 B_1B_2，B_3B_4，B_5B_6 亦為共點其交點亦為 X。如果 $B_3B_4\neq B_3'B_4'$，則此二直線 B_3B_4，$B_3'B_4'$ 所決定的平面（此二直線交於 X）包含直線 A_2A_3 和直線 A_1A_4。此與假定不合。故，$B_3B_4=B_3'B_4'$。因之得知：三對之每一對的對稜上的 B 點必均為異種。並且，包含內分點的三稜在一平面上。此為定理中的條件 I 之(C)項。綜合上面所論，我們知道，B_1B_2，B_3B_4，B_5B_6 交於一點時，定理中的條件 I 成立。

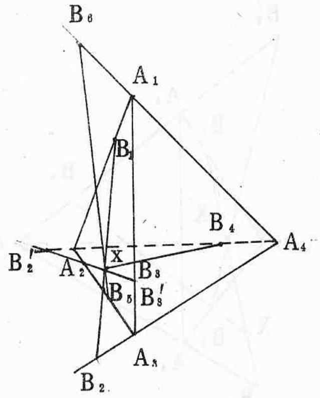
要證明定理之條件 II 之前，我們要先注意：B_1B_2，B_3B_4，B_5B_6 為共點時，在上面所提的二個除外情形不可能發生。

現在，來討論除外情形 1。設 B_1B_2（此二點為內分點）B_3B_4，B_5B_6（此四點為外分點）交於同一點 X。又設 B_3 在 A_3A_1 方向之延長上，B_4 在 A_4A_2 方向之延長上。B_5 在 A_2A_3 方向之延長上，B_6 在 A_1A_4 方面之延長上。現在決定在點 A_1，A_2 處的質點之質量 m_1，m_2 使

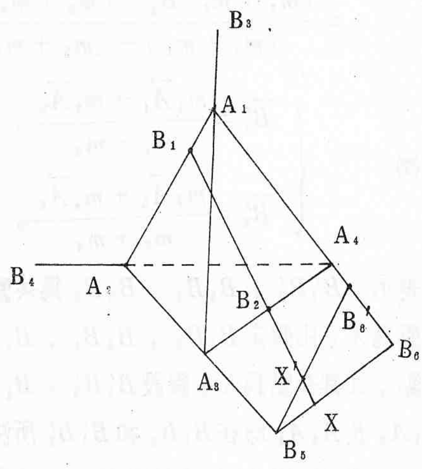
$$(44_1)\quad \overrightarrow{B}_1=\frac{m_1\overrightarrow{A}_1+m_2\overrightarrow{A}_2}{m_1+m_2},$$

並決定在點 A_3 處的質點之質量 m_3 使

$$(44_2)\quad \overrightarrow{B}_5=\frac{m_3\overrightarrow{A}_3-m_2\overrightarrow{A}_2}{m_3-m_2},\quad m_2<m_3$$



第13圖



第14圖

其次，決定在點 A_4 處的質點之質量 m_4 使

$$(44_3)\quad \vec{B}_2=\frac{m_3\vec{A}_3+m_4\vec{A}_4}{m_3+m_4}$$

成立。此時，考慮下列位置向量所表的點 X'：

$$(45)\quad \vec{X}'=\frac{m_3\vec{A}_3+m_4\vec{A}_4-m_1\vec{A}_1-m_2\vec{A}_2}{m_3+m_4-m_1-m_2}$$

$$=\frac{(m_3+m_4)\vec{B}_2-(m_1+m_2)\vec{B}_1}{(m_3+m_4)-(m_1+m_2)}$$

$$=\frac{(m_3-m_2)\vec{B}_5+(m_4-m_1)\vec{B}'_6}{(m_3-m_2)+(m_4-m_1)}$$

此處

$$(46)\quad \vec{B}'_6=\frac{m_4\vec{A}_4-m_1\vec{A}_1}{m_4-m_1}\text{。}$$

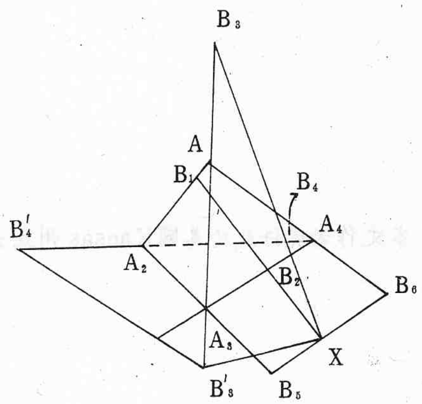
(45)式表示：B_5，X'，B'_6 爲共線。由假定 B_5，X，B_6 亦爲共線，X，X' 同在直線 B_1B_2 上。如果，$B'_6\neq B_6$，則 B_5B_6 與 $B_5B'_6$ 所決定的平面包含直線 A_1A_4 和直線 B_1B_2，故亦包含直線 A_2A_3。此與 $A_1A_2A_3A_4$ 爲一四面體的假定不合。故 $B_6=B'_6$，且 $X=X'$。

現在：

$$(47)\quad \vec{X}=\frac{(m_3+m_4)\vec{B}_2-(m_1+m_2)\vec{B}_1}{(m_3+m_4)-(m_1+m_2)}$$

$$=\frac{(m_3-m_2)\vec{B}_5+(m_4-m_1)\vec{B}_6}{(m_3-m_2)+(m_4-m_1)}$$

$$=\frac{(m_3-m_1)\vec{B}'_3-(m_2-m_4)\vec{B}'_4}{(m_3-m_1)-(m_2-m_4)}$$



第15圖

此處

$$(48)\quad \begin{cases}\vec{B}'_3=\dfrac{m_3\vec{A}_3-m_1\vec{A}_1}{m_3-m_1}\text{，}\\[2ex] \vec{B}'_4=\dfrac{m_2\vec{A}_2-m_4\vec{A}_4}{m_2-m_4}\text{。}\end{cases}$$

因之，B'_4 在 A_4A_2 方向之延長上，B'_3 在 A_1A_3 方向之延長上。故，如果 $B_3B_4\neq B'_3B'_4$，則 B'_3 與 B_3 不在同一方向之延長上。此時 B_3B_4，$B'_3B'_4$ 交於點 X。故決定一平面。此平面而包含 $B_3B'_3$ 故包含直線 A_1A_3。此平面亦包含 $B_4B'_4$，故包含直線 A_2A_4。此與假定不合。故 $B_3B_4=B'_3B'_4$。因之，B_3 不能在 A_3A_1 方向之延長上。即除外情形1不能發生。同理可證除外情形2亦不能發生。

如此，如果 B_1B_2，B_3B_4，B_5B_6 交於一點，則僅有定理條件Ⅰ中(A)項一種，(B)項的十四種，和(C)項的八種，一共僅有二十三種可能發生。

對於這些二十三種之情形我們可以適當地選在各點的質點之質量使補助定理之條件(2)成立。故，依補助定理，定理之條件Ⅱ之三式成立。

例如：假設 B_1B_2，B_3B_4，B_5B_6 交於一點。考慮 B_1，B_2 在線段 A_1A_2，A_3A_4 上，B_3 在 A_1A_3 方向之延長上，B_4 在 A_4A_2 方向之延長上，B_5 在 A_3A_2 方向之延長上，且 B_6 在 A_1A_4 方向之延長上的情形。與上面的討論相同，先選在 A_1，A_2 處的質點之質量 m_1，m_2 使 B_1 可表成：

$$(49_1)\quad \vec{B}_1=\frac{m_1\vec{A}_1+m_2\vec{A}_2}{m_1+m_2}\text{。}$$

其次，再選在 A_3 處的質點的質量 m_3 使 B_5 可表成：

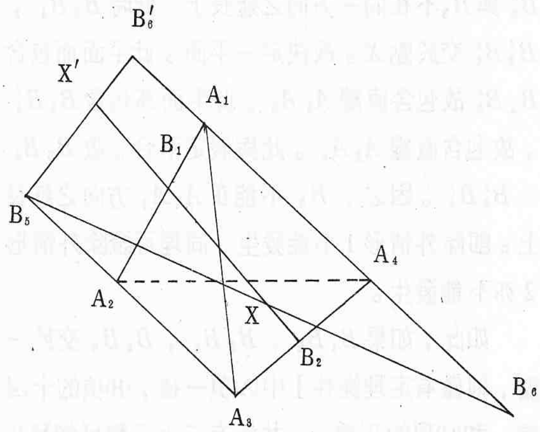
$$(49_2)\quad \vec{B}_5=\frac{m_2\vec{A}_2-m_3\vec{A}_3}{m_2-m_3}\text{，}\quad m_3<m_2$$

最後，選在點 A_4 處的質點之質量 m_4 使 B_2 可表成：

$$(49_3)\quad \vec{B}_2=\frac{m_3\vec{A}_3+m_4\vec{A}_4}{m_3+m_4}\text{。}$$

此時 $m_4<m_1$ 或 $m_4>m_1$ 可能發生。如果 $m_4<m_1$ 發生，則考慮下列位置向量所表示的點 X'：

$$(50)\quad \vec{X}' = \frac{m_1\vec{A}_1 + m_2\vec{A}_2 - m_3\vec{A}_3 - m_4\vec{A}_4}{m_1 + m_2 - m_3 - m_4} = \frac{(m_1 + m_2)\vec{B}_1 - (m_3 + m_4)\vec{B}_2}{(m_1 + m_2) - (m_3 + m_4)} = \frac{(m_2 - m_3)\vec{B}_5 + (m_1 - m_4\vec{B}'_6}{(m_2 - m_3) + (m_1 - m_4)}$$



第16圖

此處

$$(51)\quad \vec{B}'_6 = \frac{m_1\vec{A}_1 - m_4\vec{A}_4}{m_1 - m_4}。$$

(51)表示 B'_6 在 A_4A_1 方向之延長上。又(50)表示：B_1，B_2，X' 爲共線，B_5，B'_6，X' 亦爲共線。現在考慮 B_5B_6 和 $B_5B'_6$ 所決定的平面。此平面包含直線 A_1A_4 亦包含直線 B_1B_2。故亦包含 A_2A_3。此與假定不合。故，如果 B_6 在 A_1A_4 方向之延長上，則 $m_1 < m_4$。此時考慮下列位置向量所表的點 X'：

$$(52)\quad \vec{X}' = \frac{(m_1 + m_2)\vec{B}_1 - (m_3 + m_4)\vec{B}_2}{(m_1 + m_2) - (m_3 + m_4)} = \frac{(m_2 - m_3)\vec{B}_5 - (m_4 - m_1)\vec{B}'_6}{(m_2 - m_3) - (m_4 - m_1)}$$

此處

$$(53)\quad \vec{B}'_6 = \frac{m_4\vec{A}_4 - m_1\vec{A}_1}{m_4 - m_1}。$$

(52)式得知：B_1，B_2，X' 爲共線，B_5，B_6，X' 亦爲共線。如果 $B_6 \neq B'_6$，則 B_5，B_6，B'_6 所決定的平面會包含 A_1A_4 和 A_2A_3。此與假定不合。故，$B_6 = B'_6$ 而 B_6 可表成下列形狀：

$$(53')\quad \vec{B}_6 = \frac{m_4\vec{A}_4 - m_1\vec{A}_1}{m_4 - m_1}。$$

此時，因爲 B_3 在 A_1A_3 方向之延長上，又 B_4 在 A_4A_2 方向之延長上，故與上面一樣地可證明 $m_4 < m_2$，$m_1 < m_3$。又

$$(54)\quad \vec{X} = \vec{X}' = \frac{(m_2 - m_3)\vec{B}_5 - (m_4 - m_1)\vec{B}_6}{(m_2 - m_3) - (m_4 - m_1)} = \frac{(m_1 + m_2)\vec{B}_1 - (m_3 + m_4)\vec{B}_2}{(m_1 + m_2) - (m_3 + m_4)} = \frac{(m_2 - m_4)\vec{B}'_4 - (m_3 - m_1)\vec{B}_3}{(m_2 - m_4) - (m_3 - m_1)}$$

此處

$$(55)\quad \begin{cases} \vec{B}'_4 = \dfrac{m_2\vec{A}_2 - m_4\vec{A}_4}{m_2 - m_4}, \\ \vec{B}'_3 = \dfrac{m_3\vec{A}_3 - m_1\vec{A}_1}{m_3 - m_1}。 \end{cases}$$

故直線 B_1B_2，B_5B_6，B_3B_4 及 $B'_3B'_4$ 相交於同一點 X。如果 $B'_3B'_4 \neq B_3B_4$，則 B_3B_4 和 $B'_3B'_4$ 所決定的平面包含直線 A_1A_3 和直線 A_2A_4。此與假定不合。故，$B_3B_4 = B'_3B'_4$。即在各點可選質點之質量使補助定理的條件(2)成立。

（本文作者現任教於美國Kansas州立大學）