蓋理論(Theory of Majorization)及其在不等式上的應用

楊重駿
楊照崑 合撰

一、導　　　言

不等式的理論很早就被大數學家Gauss，Cauchy等人所著重研究。較近的有Hardy，Littlewood，及Polya等名數學家。我們可以說數學分析，不論是純理論或應用方面，都需要不等式的運算。如一般條件不等式、絕對不等式、三角不等式、幾何不等式、積分或微分不等式，等等種類五花八門。因而解決它們的技巧也就多彩多姿，不勝枚舉了。同時也就沒有一些什麼萬靈的理論來對付不等式。但在1923年蕭爾(Schur)把某類常見及有用的初等或高深的不等式歸類起來，演繹出一套較完備的理論來處理具某些特性的不等式。這也就是我們在此要介紹的"蓋理論"(Majorization Theory)。到目前爲止有關此方面最佳的研究著作爲，Hardy，Littlewood及Polya合著的書〔1〕及最近Marshall及Olkin合著的書〔2〕。這個理論涉及到凸函數(Convex function)的性質，所以我們將先介紹一下什麼樣的函數稱爲凸函數(或上凹函數，與此相對的是所謂的凹函數Concare function或下凹函數)。

二、凸函數的定義及其性質

爲方便計我們以R代表所有實數的集合，R^+表所有正實數及"0"的集合。以下所討論的函數，都是實函數，若不特別聲明其定義域(Domain of Definition)則自然指R。

定義：設$g(x)$爲一定義在區間(a, b)上的函數，若過於任何在(a, b)中的兩點x, y，下面不等式：

$$g(\lambda x+\mu y)\leq\lambda g(x)+\mu g(y)$$
$$\mu\geq 0,\ \lambda\geq 0,\ \mu+\lambda=1 \quad (1)$$

恒成立。如此的g稱爲在(a, b)上的一凸函數。

我們要特別對此種函數的圖形作一觀察，也好使讀者明瞭爲何稱滿足不等式(1)式者的函數爲凸函數或上凹函數。如圖1，我們將證明任何在

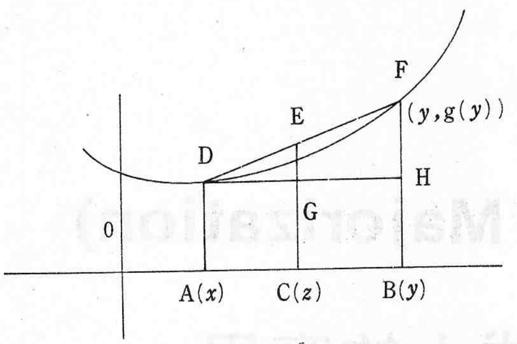

圖 1

(a, b)區間之三點$A(x)$,$B(y)$及$C(z)$，設 $x<z<y$，則$g(z)$之值必位於連結$D(x, g(x))$, $F(y, g(y))$ 兩點之直線下方。這個證明很簡單。由A, B, C 作垂線分別交 $\overline{DF}$ 於D, F, E，又由D作平行於x軸之直線交$\overline{EC}$, $\overline{EB}$於G及H。若令

$$\mu=\frac{z-x}{y-x}, \qquad \lambda=\frac{y-z}{y-x}$$

則$\mu\geq 0$，$\lambda\geq 0$且$\mu+\lambda=1$。又由此例知

$$\frac{\overline{EG}}{FH}=\mu$$

故

$$\begin{aligned} EC &= EG+GC=\mu FH+GC \\ &= \mu(FH+HB)+(1-\mu)DA \\ &= \mu g(y)+\lambda g(x) \end{aligned}$$

由(1)及 $z=\mu y+\lambda x$ 知

$$\begin{aligned} g(z)=g(\mu y+\lambda x) &\leq \mu g(y)+\lambda g(x) \\ &= EC \end{aligned}$$

故直線 $\overline{DF}$ 上的點高於點$(z, g(z))$；$x<z<y$。

這個限制，使得g的圖形，自然非得向內凹陷，也就是所謂的凸（或上凹）函數名稱的由來。

知道滿足條件(1)的函數為凸函數。但問題是有時我們無法利用它來判定某些函數是否為凸函數。因(1)本身涉及的是任何兩個介於(a, b)中的點，我們也不可能逐一地檢驗。好在由於上面凸函數的幾何性質，我們有時可以利用求一個函數的第二階導函數，來判定一個函數是否為凸函數？假定$g(x)$在(a, b)上有定義且其第二階導函數$g''(x)$在(a, b)上到處存在（注意：不見得每個函數的第二階導函數存在，但在一般所見到的函數，只要不是精工巧構的，總有第二階或更高階的導函數），若$g''(x)\geq 0, \forall x\in(a, b)$，則$g$為$(a, b)$上的一凸函數，例如$g(x)=-\log x$ $(0<x<\infty)$ 則$g'(x)=-\frac{1}{x}$, $g''(x)=\frac{1}{x^2}>0$, $\forall x\in(0, \infty)$。讀者不妨試描繪$g(x)$的圖形大要。

對於無微分觀念的讀者，我們提供下面一個凸函數的試驗法：設$g(x)$為定義在區間(a, b)上的一函數，且滿足$|g(x)|\leq M<\infty$, $\forall x\in(a, b)$，（即g為有界的）若g在(a, b)上滿足：$\forall x, y\in(a, b)$，

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{1}{2}g(x)+\frac{1}{2}g(y)$$

則g為(a, b)上的一凸函數。

這個證明涉及極限，連續等概念，讀者姑且信之，以後我們會用此條件，來檢驗某些函數是否為凸函數。

由於我們以後的討論，不僅限於一個變數，一般會在n $(n\geq 2)$度的實向量空間R^n或R^{n+}中。下面首先證明(1)式可以推廣到$n>2$的一般情形。

定理 1 設g為(a, b)上的一凸函數，則 $\forall x_i (i=1, 2, \cdots\cdots, n)\in(a, b)$, $\lambda_i\geq 0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$, $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$,

$$g(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots\cdots+\lambda_nx_n)\leq\lambda_1g(x_1)+\lambda_2g(x_2)+\cdots\cdots+\lambda_ng(x_n)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\lambda_ig(x_i) \tag{2}$$

證：用數學歸納法。很顯然(2)式對$n=1$，2時皆成立。假設(2)式對$n=k-1$時成立，我們將證對$n=k$時(2)式亦成立。

令 $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2=\lambda y$，$\lambda=\lambda_1+\lambda_2$

則由歸納法假設得知

$$g(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_kx_k)=g(\lambda y+\lambda_3x_3+\cdots\cdots+\lambda_kx_k)\leq\lambda g(y)+\sum_{i=1}^{k}\lambda_ig(x_i)$$

$(\because \lambda+\lambda_3+\lambda_4+\cdots+\lambda_k=1$ 共 $k-1$ 項)

又 $\lambda g(y)=\lambda g(\frac{\lambda_1}{\lambda}x_1+\frac{\lambda_2}{\lambda}x_2)$

$$\leq \lambda\{\frac{\lambda_1}{\lambda}g(x_1)+\frac{\lambda_2}{\lambda}g(x_2)\}$$

$$=\lambda_1 g(x_1)+\lambda_2 g(x_2)$$

此式及上式得知(2)式對 $n=k$ 亦成立。故由歸納法原理知(2)式恒成立。

我們現在舉些有關凸函數的應用。

定理2 (Arithemtic - Geometric Mean Inequality)設 $a_i \varepsilon R^+, i=1, 2, \cdots\cdots, n$ 則

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots\cdots a_n}$$

註:這就是所謂的算術平均大於幾何平均。

證:很明顯若 a_i 中有一爲 0 則不等式自然成立,故可設 $a_i>0$

令 $y=g(x)=-\log x$, $x>0$

則依據圖形或考慮 $g''(x)=\frac{1}{x^2}$ 得知 g 在 $(0, \infty)$ 上爲一凸函數。

於是

$$g(\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n}+\cdots+\frac{a_n}{n})\leq \sum\frac{1}{n}g(a_i) \quad (3)$$

而

$$g(\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n}+\cdots+\frac{a_n}{n})$$

$$=-\log(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n})$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{g(a_i)}{n}=\frac{-1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log a_i$$

於是

$$\log(\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n})$$

$$\geq \log\sqrt[n]{a_1a_2\cdots\cdots a_n}$$

現 log 爲正實數的遞增函數,所以由上式得

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots\cdots a_n}$$

定理3 (Cauchy 氏不等式)設 a_i $(i=1, 2, \cdots n)$ 及 b_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ 爲兩組正實數,則

$$(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)^2\leq(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)(\sum_{i=1}^{n}b_i^2)$$

證:設 $y=g(x)=x^2$,則易知 g 爲一凸函數。

令 $x_i=a_i/b_i$ 及 $t_i=b_i^2$,

$$t=\sum_{i=1}^{n}t_i, \ \lambda_i=\frac{t_i}{t}, \ i=1, 2, \cdots, n$$

則由定理 1 可得

$$(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i)^2\leq\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i^2$$

即

$$(\sum_{i=1}^{n}t_ix_i)^2\leq t^2\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i}{t}x_i^2=t\sum_{i=1}^{n}t_ix_i^2$$

$$=(\sum_{i=1}^{n}t_i)(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)$$

$$=(\sum_{i=1}^{n}b_i^2)(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)$$

原式得證。

註:原命題對所有的實數皆成立,在此爲簡明計,假設所有的 b_i 不爲零。不然可把爲 0 的 b_i 代以 ε_i (充分小的參數)將結果取極限,仍可得原式。

現在我們討論具有下列形式的不等式:

$$\phi(\overbrace{\bar{x}, \bar{x}, \cdots, \bar{x}}^{n\text{個}})\leq\phi(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad (4)$$

其中 $\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$, $x_1, x_2, \cdots x_n$ 爲實數。

如果我們令 $\phi(y_1, y_2, \cdots, y_n)=\sum_{i=1}^{n}g(y_i)$,則前面的(3)式就可表成(4)的形式。由於(4)的特殊形式,使得我們不妨考慮下面更廣泛的形式:

$$\phi(y_1, y_2, \cdots, y_n)\leq\phi(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad (5)$$

此時 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 不一定要相等,但它們在某些意義上(這是我們將要進一步討論的地方)比 $x_1, x_2, \cdots x_n$ 要來得緊湊些,即沒有 $x_1, x_2,$

$\cdots, x_n$ 來得分散。我們主要問的就是 $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ 及 $\{y_i\}_{i=1}^{n}$ 在何種條件下，對何種函數 ϕ，(5)式總成立？

三、蓋理論及其應用

我們首先討論在什麼情形下

$$g(y_1)+g(y_2)\leq g(x_1)+g(x_2) \tag{6}$$

爲了使不等式"公平"起見，我們希望

$$x_1+x_2=y_1+y_2 \tag{7}$$

否則 $g(1)+g(2)\leq g(100)+g(200)$ 就沒有太多的價值了。從凸函數的性質，若我們可以找到一個 $0<\lambda<1$，且

$$\begin{aligned} y_1 &= \lambda x_1+(1-\lambda)x_2 \\ y_2 &= (1-\lambda)x_1+\lambda x_2 \end{aligned} \tag{8}$$

則(6)與(7)都顯然成立，從圖 2 知，(8)式表示 y_1，

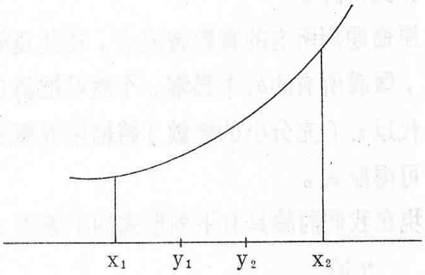

圖2

y_2 比 x_1 與 x_2 要緊湊些。

但要把圖形 2 的"緊湊"觀念推到 n 度空間即具 n 個分量的向量 $(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$ 及 $(y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n)$ 就不太容易了。但有的情形很顯然，譬如說

$$y_i=\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}, \ i=1, 2, \cdots, n$$

則由圖 3 看出 $(\bar{x}, \bar{x}, \cdots, \bar{x})$，顯然比 $(y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n)$ 要緊湊。

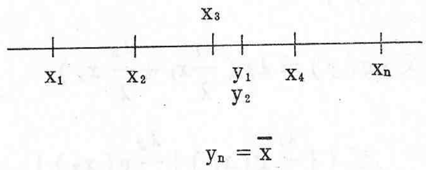

圖3

因而我們有第(4)式，即

$$n\phi(\bar{x})\leq\sum_{i=1}^{n}\phi(x_i)$$

蕭爾想到了這樣一個比較兩向量 $X=(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$，$Y=(y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n)$ 緊湊性的方法。

定義：令 $X=(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$，$Y=(y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n)$ 爲兩漸減序列，即

$x_1\geq x_2\geq x_3\geq\cdots\cdots\cdots\geq x_n$

$y_1\geq y_2\geq y_3\geq\cdots\cdots\cdots\geq y_n$ 且

$x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n=y_1+y_2+\cdots\cdots+y_n$

我們說 X 可以"蓋得住" Y，或 Y 比 X 更緊湊，如果

$$\begin{aligned} y_1 &\leq x_1 \\ y_1+y_2 &\leq x_1+x_2 \\ y_1+y_2+y_3 &\leq x_1+x_2+x_3 \\ &\vdots \\ y_1+y_2+\cdots+y_{n-1} &\leq x_1+x_2+\cdots+x_{n-1} \end{aligned}$$

一般我們用 $Y<X$ 表示之。

我們所採的定義雖只適用於兩個漸減的序列，但在一般情形下的不等式，幾乎都與序列 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n, y_1, y_2, y_3, \cdots\cdots, y_n$ 的排列無關，所以我們所採的定義並不失其一般性。舉個例子，$X=(3, 2, 1)$，$Y=(2.5, 2.3, 1.2)$，則

$$3+2+1=2.5+2.3+1.2$$

且

$$3\geq 2.5$$

$$3+2\geq 2.5+2.3$$

故 $Y<X$。又很顯然的 $Y=(\bar{x}, \bar{x}, \cdots\bar{x})$

$<X=(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$。讀者不妨試試證明此一事實。(以後許多地方要用到此一事實)

註：我們在文中有時把$(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$以序列看之。有時也視$(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n) \in R^n$當向量看之。在當序列看時，$x_1$，$x_2$，……等可稱為元素，在當向量看時，$x_1$，$x_2$……等以分量稱之。我們稱$X$及$Y$的兩個元素或分量相同時，是除了數值本身外，且具有相同的秩序或位置。例如(3,2,1,5,3)及(3,1,2,5,3)兩向量有3對元素相同。

下面的定理把蓋的觀念與凸函數的關係做了一個引線。

定理4 令$X=(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$，$Y=(y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n)$為兩實數列，且$X$與$Y$只有兩個元素不相同，設其位置在$i$及$j$上(即$x_k=y_k$除非$k=i$及$k=j$)，則下列條件(i)與(ii)互為充要條件。

(i) $Y<X$

(ii)有一個實數α；$0<\alpha<1$且

$$y_i=\alpha x_i+(1-\alpha)x_j$$

$$y_j=(1-\alpha)x_i+\alpha x_j$$

證：因i與j可為任何位置。因此我們不妨假設$x_1\geq x_2\geq\cdots\geq x_i\geq\cdots\geq x_j\geq\cdots\geq x_n$。

我們先由(i)推導出(ii)。

因除了在i，j位置上的元素皆相同，又$Y<X$，則必須有

$$x_i>y_i$$

$$x_i+x_j=y_i+y_j$$

亦即　$x_1>y_1\geq y_2>x_2$。　若令

$$\alpha=\frac{y_1-x_2}{x_1-x_2}$$

則　$0<\alpha<1$　並很容易由代入α之值而證得(ii)。

現若(ii)成立，則由於在i之前的x，y皆相等，故對$k<i$而言

$$x_1+x_2+\cdots+x_k=y_1+y_2+\cdots+y_k$$

又在$k=i$時

$$\begin{aligned}&y_1+y_2+\cdots\cdots+y_i\\&=x_1+x_2+\cdots+x_{i-1}+\alpha x_i+(1-\lambda)x_j\\&\leq x_1+x_2+\cdots+x_{i-1}+\alpha x_i+(1-\alpha)x_i\\&=x_1+x_2+\cdots+x_i\end{aligned}$$

這種不等的情形一直到$k\geq j$時又恢復了等式(因為$y_i+y_j=x_i+x_j$)，

故本定理得證。

定理5 設實數列$X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$Y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$中，$X$與$Y$不全相同並且$Y<X$，則我們可找到一個數列$Z=(z_1, z_2, \cdots, z_n)$俱備下列三個性質：

(1)$Y<Z<X$(即$Y<Z$，$Z<X$)

(2)Z與Y比X與Y至少多一個相同的元素

(3)Z與X至多只有兩個元素不同。

證：因本定理的證明與X，Y之元素的排列無關，不妨假定X，Y已成漸減排列，即

$$X: x_1\geq x_2\geq x_3\geq\cdots\cdots\geq x_n,$$

$$Y: y_1\geq y_2\geq y_3\geq\cdots\cdots\geq y_n,$$

因$Y<X$，故$\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}y_i$，又因$x_i$與$y_i$不全相同，必有一個$k$使得$x_k>y_k$及一個$\ell$使得$x_l<y_l$，取$i$為最大的$k$有$x_k>y_k$的性質者，$j$為最小的$\ell>i$並滿足$x_l<y_l$者，則$X$，$Y$，與$i$，$j$的關係如下：

$$X: x_1\geq x_2\geq\cdots\geq x_{i-1}\geq x_i\geq \underbrace{x_{i+1}\geq\cdots}_{\text{各個相等}}$$

$$\underbrace{\cdots\geq x_{j-1}}\geq x_j\geq x_{j+1}\geq\cdots\cdots\geq x_n$$

$$Y: y_1\geq y_2\geq\cdots\geq y_{i-1}\geq y_i\geq \underbrace{y_{i+1}\geq\cdots}_{\text{各個相等}}$$

$$\underbrace{\cdots\geq y_{j-1}}\geq y_j\geq y_{j+1}\geq\cdots\cdots\geq y_n$$

即當$k=i+1, i+2, \cdots\cdots, j-1$時$y_k=x_k$(否則$i$可向右移或$j$向左移與所取的$i$及$j$性質不符)，又$x_t>y_t\ \forall\ t\leq i$及$y_s>x_s\ \forall\ s\geq j$。令

$$\delta=min(x_i-y_i, y_j-x_j)$$

$$\alpha=\frac{\delta}{x_i-x_j}$$

由於$x_i>y_i\geq y_j>x_j$，可知$\alpha>0$，但$\alpha<1$。令z_k與x_k除$k=i$，j時皆相同；又$z_i=x_i-\delta$，$z_j=x_j+\delta$。

由α之定義，可得

$$\begin{aligned}z_i&=x_i-\delta=x_i-\alpha(x_i-x_j)\\&=(1-\alpha)x_i+\alpha x_j\end{aligned}$$

$$z_j=x_j+\delta=\alpha x_i+(1-\alpha)x_j$$

由定理3得知$Z<X$，因Z與X除了i，j

位置上的元素外，皆相同，故很容易求出

$$\sum_{t=1}^{k} z_t \geq \sum_{t=1}^{k} y_t \quad t=1,2,\cdots,n-1$$

及

$$\sum_{t=1}^{n} z_t = \sum_{t=1}^{n} y_t$$

故 $Y<Z$，即(1)得證。根據 δ 之定義，若 $\delta=x_i-y_i$ 則 $z_i=y_i$，若 $\delta=y_j-x_j$ 則 $z_j=y_j$，故(2)成立。因 X 與 Z 除 i，j 位置外均相同，(3)亦因此證得。

系理：依上面定理，我們可以找到 z_1，z_2，……，z_s ($s\leq n$) 個數列，使得

(1) $Y=z_0<z_1<z_2<\cdots<z_s<z_{s+1}=X$

(2)所有 z_i 與 z_{i+1} 之間 ($i=0,1,2,\cdots\cdots,s$) 至多有兩個不同的元素。

證：因 X 與 Y 至多有 n 個不同的元素，由上定理(2)中知 $s\leq n$。

現在我們可以敍述及證明本篇最主要的結果了。

定理6（蕭爾定理 Schur's Theorem）

設 $f(x)$ 爲區間〔a，b〕上的一凸函數，又 $X=(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)$，$Y=(y_1,y_2,\cdots\cdots,y_n)$ 爲兩數列，其元素皆在〔a，b〕中，若 $Y<X$ 則

$$\sum_{k=1}^{n} f(y_k) \leq \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \qquad (9)$$

證：由定理5的系理，我們只需證明 Y 與 X 只有兩個元素不相同的情形就行了。（否則我們可由 z_1，z_2，……，z_s 一直推下去）

令 x_i，x_j 與 y_i，y_j 各不相同而其餘的 x，y 皆相同，則(9)變成了

$$f(y_i)+f(y_j)\leq f(x_i)+f(x_j) \qquad (10)$$

因 $Y<X$，故由定理4知，我們總可找到一個 α，$0<\alpha<1$，且

$$y_i=\alpha x_i+(1-\alpha)x_j$$
$$y_j=(1-\alpha)x_i+\alpha x_j$$

由 f 的凸性質，我們有

$$\begin{aligned} f(y_i)+f(y_j) &= f(\alpha x_i+(1-\alpha)x_j)+f((1-\alpha)x_i+\alpha x_j) \\ &\leq \alpha f(x_i)+(1-\alpha)f(x_j)+(1-\alpha)f(x_i)+\alpha f(x_j) \\ &= f(x_i)+f(x_j) \end{aligned}$$

故(10)式成立。定理6因此得證。

現在我們看看定理6的一些用途。

例1 令 $g(x)=-\log x$，$0<x<\infty$ 爲一凸函數，又由事實

$$(\bar{x},\bar{x},\cdots,\bar{x})<(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

$$\left(\text{其中 } \bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n};\ x_i>0\right)$$

故由定理6可得

$$\sum_{i=1}^{n}(-\log\bar{x})\leq\sum_{i=1}^{n}(-\log x_i)$$

即

$$\bar{x}\geq\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

這就是算術平均大於幾何平均的證明。

例2 x_1，x_2，……，x_n 爲 n 個正數，

$\bar{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$，則因 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 爲 $(0,\infty)$ 上的一凸函數，故由 $(\bar{x},\bar{x},\cdots\cdots,\bar{x})<(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)$ 及定理6可得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\bar{x}}\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}$$

即

$$\sum\frac{1}{x_i}\geq\frac{n}{\bar{x}}=\frac{n^2}{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n}$$

例3 設 x_1，x_2，……，x_n 爲滿足 $0<x_i<1$；$i=1,2,\cdots\cdots,n$ 之 n 個數且

$$\sum_{i=1}^{n} x_i=1,\text{ 則 }\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1-x_i}\geq\frac{n}{n-1}$$

證：我們先證 $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$ 在 $(0,1)$ 間爲凸函數，我們只需驗證 $\forall\, x_1, x_2\in(0,1)$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leq\frac{1}{2}f(x_1)+\frac{1}{2}f(x_2)$$

此相等於

$$\frac{(x_1+x_2)/2}{1-(x_1+x_2)/2}\le\frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{1-x_1}+\frac{x_2}{1-x_2}\right)$$

化簡得

$(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\ge 0$，

此式恒成立，故 f 爲一凸函數。

又因 $\frac{1}{n}=\overline{x}$，及 $\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\cdots\frac{1}{n}\right)<(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)$

由定理6可得

$$n\frac{\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1-x_i}$$

即 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1-x_i}\ge\frac{n}{n-1}$

例4 設 x_i，$i=1,2,\cdots,n$ 爲 n 個實數，a 爲一定數。令 $\overline{x}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n}$

試證 $\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i-a|\ge n|\overline{x}-a|$

證：顯然由圖形可知 $f(x)=|x-a|$ 爲一凸函數及 $(\overline{x},\overline{x},\cdots\overline{x})<(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，依據定理6原式立即得證。

例5 因 $-\sin x$ 在區間 $(0,\pi)$ 之間爲凸函數，又在一三角形中，若以 A，B，C 表三頂角，則很容易得知

$$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)<(A,B,C)<(\pi,0,0)$$

故由定理6可得

$$-3\sin\frac{\pi}{3}\le-(\sin A+\sin B+\sin C)\le 0$$

即

$$0\le\sin A+\sin B+\sin C\le 3\frac{\sqrt{3}}{2}$$

同理可證得

$$1\le\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le 3\sin\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}$$

例6 令 $f(x)=-\log\sin x$，$0<x<\pi$，則 $f(x)$ 爲凸函數的結論可由

$$\sin x_1\sin x_2\le\sin^2\frac{x_1+x_2}{2}$$

x_1，$x_2\in(0,\pi)$

即事實

$\cos(x_1-x_2)\le 1$ 可得。

又由於 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)<(A,B,C)$

依定理6可得

$$-\log\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^3\le-(\log\sin A+\log\sin B+\log\sin C)$$

即

$$\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

蕭爾定理的應用可以推廣到很多超出本篇程度的不等式，有許多是在統計、矩陣等方面的應用。我們不在此多作介紹。希望讀者能從本篇得到開啟蓋理論寶庫的鑰匙，進而能對不等式理論作更深入的瀏覽及貢獻。

參考文獻

1. G.H. Hardy, J.E. Littlewood, and G. Polya, *Inequalities*, Cambridge University Press, 1934.
2. A. Marshall and I. Olkin, *Inequalities: Theory of Majorization and its Applications*, Academic Press, 1979.

本文作者：

楊重駿：現任職於美國海軍研究實驗所

楊照崑：現任教於美國佛羅里達大學統計系