數的概念 (上)

康明昌

1. 前言
2. 數學歸納法
2.1 什麼是數學歸納法？(一)
*2.2 更多的例子
2.3 什麼是數學歸納法？(二)
2.4 數學歸納法的誤用
2.5 如何尋找答案？
2.6 不必用數學歸納法的例子
3. 有理數系
4. 實數系
5. 什麼是數系？
*附錄：如何建造實數系？

1.前言

本文的目的是針對高中數學實驗教材第一冊修訂本的第三章數的概念作個補充。希望能夠幫助讀者更容易的掌握這一章的主要內容。

本文寫作的對象是一般高中學生與高中數學教師。附有「*」符號者表示內容稍微艱深的部分，一般學生可以省略不看，不過作者非常鼓勵對數學有興趣的學生不要省略這些部分。

本文內容分成兩個主要成分：第二節的數學歸納法，與第三、四、五、六節的數系介紹。數學歸納法其實只是自然數系的一個性質，不過由於它的應用範圍相當廣泛，因此我們花費了很多篇幅來介紹這個概念。實數與複數是人類處理量的問題的基本工具，是數學的基礎與根源所在。實數系的某些較艱深的性質，如「完備性」，將留待日後討論，本文暫不涉及。

請容許作者再强調一次：本文的目的不在取代實驗本第一冊第三章。作者的目的只在提供一種補充教材，因此如果本文與該書第三章有許多雷同之處，讀者也不必過分感到意外。

2.數學歸納法

2.1 什麼是數學歸納法？(一)

考慮以下的例題與「證明」。

例題 1 求證 $1^3+2^3+\cdots\cdots\cdots+n^3$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

，其中 n 是任意正

整數。

「證明」若 $n=1$，左式 $=1^3=\dfrac{1^2(1+1)^2}{4}$

$=$右式

若 $n=2$，左式 $=1^3+2^3=9$

$=\dfrac{2^2(2+1)^2}{4}=$右式

若 $n=3$，左式 $=1^3+2^3+3^3=36$

$=\dfrac{3^2(3+1)^2}{4}=$右式

若 $n=4$，左式 $=1^3+2^3+3^3+4^3$

$=100=\dfrac{4^2(4+1)^2}{4}$

$=$右式

若 $n=5$，左式 $=1^3+2^3+3^3+4^3+5^3$

$=225=\dfrac{5^2(5+1)^2}{4}$

$=$右式

以此類推，可知對於任意正整數 n，原式都成立。

以上的「證明」有什麼錯誤呢？

我們想一想，以上的「證明」其實只證明 $n=1,2,3,4,5$ 時，原式成立。那麼 $n\geq 6$ 時，有沒有證明呢？

在 $n\geq 6$，以上的「證明」只用「以此類推」就一筆帶過。

什麼是以此類推呢？以此類推是表示 $n\geq 6$ 的證明幾乎和 $n=1,2,3,4,5$ 的證明完全一樣。可是我們想一想，即使我們知道 $1^3+2^3+\cdots+5^3$ 的數值，我們是否能夠很容易的推出 $1^3+2^3+\cdots+100^3$ 的數值呢？如果不能，$n=100$ 的證明顯然就不能夠用以此類推蒙混過去。

有些同學可能會說：你既然不相信我能夠證明 $n=100$，我就證明給你看。你只要給我一小時的時間，我就可以求出 $1^3, 2^3, 3^3\cdots, 100^3$，再求其和，然後證明這個式子。

問題就在這裏：你要用一小時的時間證明 $n=100$ 的情形，你究竟要用多少時間才能證明 $n=10^3$ 的情形？此外，在 10^3 之後，還有無窮無盡的正整數等著你一個一個去驗證呢！

愚公想用幾代子孫的力量把一座山搬走，因爲一座山的範圍是有限的。我們現在問題的核心，正整數，是無限的。愚公移山式的方法，顯然不能解決我們的問題。

想個新的方法吧。

假設我們能夠證明「若 k 是任意正整數，並且 $n=k$ 時原式成立，則 $n=k+1$ 時原式亦成立」，那麼我們就可以輕而易舉的證明這個恒等式了。爲什麼呢？

例如，你想證明 $n=100$ 時原式成立，依照上面的假設，你只要證明 $n=99$ 時原式成立就夠了。

那麼 $n=99$ 時原式會不會成立呢？再用一次我們的假設，我們只要證明 $n=98$ 時原式成立就夠了。

那麼 $n=98$ 時原式會不會成立呢？再用一次我們的假設，我們只要證明 $n=97$ 時原式成立就夠了。

以此類推，我們只要 $n=1$ 時原式成立就夠了。

更一般的說，我們不要把 n 限制爲 100，現在讓 n 是任意正整數。假定我們能夠證明我們最先的假設是成立的，那麼只要我們能夠證明 $n=1$ 時原式成立，我們就可以推出 n 是任意正整數時原式亦成立。

這就是數學歸納法。

數學歸納法的要點是：

一、證明 $n=1$ 時原式成立。

二、若 k 是任意正整數，證明「若 $n=k$ 時原式成立，則 $n=k+1$ 時原式亦成立」。

現在我們把例題 1. 的正確的證明寫在下面。

證明：

(1)若 $n=1$ 時，左式 $=1^3=1$

$=\dfrac{1^2(1+1)^2}{4}=$右式

(2)設 k 是任意正整數。證明：若 $n=k$ 時原式成立，則 $n=k+1$ 時原式亦成立。

假設 $n=k$ 時，原式成立，即 $1^3+2^3+\cdots+k^3=\dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$。

考慮 $n=k+1$ 的情形。

$$\begin{aligned}\text{左式}&=1^3+2^3+\cdots\cdots+k^3+(k+1)^3\\&=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3\\&=(k+1)^2\left\{\frac{k^2+4(k+1)}{4}\right\}\\&=(k+1)^2\frac{(k+2)^2}{4}\\&=\frac{(k+1)^2\{(k+1)+1\}^2}{4}\end{aligned}$$

=右式，故 $n=k+1$ 時原式成立。

(3)綜合(1)與(2)，可知：對於任意正整數 n，原式皆成立。

注意：一般學生在運用數學歸納法時，常會犯下如下的錯誤，如

一、在第(1)步驟時，許多學生可能以爲 $n=1$ 時太簡單了，不好意思寫這麼簡單的證明，因此他在這個步驟寫 $n=4$ 或 $n=5$ 時的證明。

請注意，你如果這樣寫的話，你只證明原式在 $n\geq 4$ 或 $n\geq 5$ 時成立，你並沒有證明原式對於任意正整數 n 都成立。（爲什麼？）

還有些同學比較客氣，他們也不好意思只寫 $n=1$ 時的證明，他們大概覺得寫得太少不太好，所以他們在這個步驟寫上 $n=1,2,3$ 時的證明。這是過分小心的。大膽一點，只要寫上 $n=1$ 的證明就夠了。

二、最常見的，也是最嚴重的錯誤是以下的類型：

(1) $n=1$ 時原式成立。

(2) $n=k$ 時原式成立，

即 $1^3+2^3+\cdots+k^3=\dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$

$n=k+1$ 時，左式=………………

(3)……………………………………

以上的錯誤的寫法是在第(2)步驟。

錯誤的地方是，沒有明白的指出「$n=k$ 時原式成立」這件事究竟是你已經證明出來的，還是你的假設。

例題2 若 $p>-1$，且 $p\neq 0$，

證明 $(1+p)^{100}>1+100p$。

想法：如果 $p>0$，由二項式定理

$$(1+p)^{100}=1+100p+\frac{100\cdot 99}{1\cdot 2}p^2+\frac{100\cdot 99\cdot 98}{1\cdot 2\cdot 3}p^3+\cdots+\frac{100\cdot 99\cdots 2}{1\cdot 2\cdots 99}p^{99}+p^{100}$$

，可得 $(1+p)^{100}>1+100p$。問題在，如果 $-1<p<0$ 時，怎麼辦？

我們不妨作個大膽的猜測：「$(1+p)^n>1+np$」是否恒成立？

要想用「數學歸納法」證明「$(1+p)^n>1+np$」，我們想證明「若 $n=k$ 時原式成立，則 $n=k+1$ 時原式亦成立。」很幸運的，這個步驟並不困難。

但是 $n=1$ 時，「$1+p>1+p$」並不成立！

幸好 $n=2$ 時，$(1+p)^2=1+2p+p^2>1+2p$。

所以我們的猜測應該修正爲：「若 $n\geq 2$，且 n 是正整數，則 $(1+p)^n>1+np$，其中 $p>-1$，$p\neq 0$。」

證明：我們要證明，$(1+p)^n>1+np$，其中 $n\geq 2$，n 是正整數。

用「數學歸納法」證明。

(1) $n=2$ 時，左式 $=(1+p)^2$

$$\begin{aligned}&=1+2p+p^2\\&>1+2p\\&=\text{右式}\end{aligned}$$

(2)證明：若 $n=k$ 時，原式成立，則 $n=k+1$ 時原式亦成立。

由 $n=k$ 時原式成立，得 $(1+p)^k>1+kp$。

考慮 $n=k+1$ 的情形，左式 $=(1+p)^{k+1}=(1+p)^k(1+p)>(1+kp)(1+p)$

$$=1+(k+1)p+kp^2>1+(k+1)p$$

=右式

(3)綜合(1)與(2)，可知原式對於 $n\geq 2$ 的整數都成立。

因此 $(1+p)^{100}>1+100p$，得證。

例題3：若 n 是任意正整數，試證

$$(\sqrt{3}+1)^{2n+1}-(\sqrt{3}-1)^{2n+1}$$

是正整數，並且可被 2^{n+1} 整除。

想法：檢查「若$n=k$時成立，則$n=k+1$時成立」是否辦得到。

由$n=k$成立得$(\sqrt{3}+1)^{2k+1}-(\sqrt{3}-1)^{2k+1}=2^{k+1}a$，其中$a$是某個正整數。考慮$n=k+1$的情形。

$$(\sqrt{3}+1)^{2(k+1)+1}-(\sqrt{3}-1)^{2(k+1)+1}$$
$$=(\sqrt{3}+1)^{2k+3}-(\sqrt{3}-1)^{2k+3}$$
$$=\{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2\}\{(\sqrt{3}+1)^{2k+1}-(\sqrt{3}-1)^{2k+1}\}+(\sqrt{3}+1)^2(\sqrt{3}-1)^{2k+1}-(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)^{2k+1}$$
$$=\{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2\}\{(\sqrt{3}+1)^{2k+1}-(\sqrt{3}-1)^{2k+1}\}-(\sqrt{3}+1)^2(\sqrt{3}-1)^2\{(\sqrt{3}+1)^{2k-1}-(\sqrt{3}-1)^{2k-1}\}$$
$$=8\cdot 2^{k+1}a-4\{(\sqrt{3}+1)^{2k-1}-(\sqrt{3}-1)^{2k-1}\}$$

現在如果我們知道「$(\sqrt{3}+1)^{2k-1}-(\sqrt{3}-1)^{2k-1}$ 是一個可被2^k整除的正整數」，那麼$n=k+1$時就成立了！但是「$(\sqrt{3}+1)^{2k-1}-(\sqrt{3}-1)^{2k-1}$ ……」正好是$n=k-1$的情況。

所以在第(2)步驟，我們改作「若$n=k$，$k+1$ 時皆成立，則$n=k+2$時亦成立」。為了順應第(2)步驟的修正，第(1)步驟要改成「$n=1$時原敘述成立，$n=2$時原敘述亦成立。」

證明：我們用「數學歸納法」證明。

(1) $n=1$時，$(\sqrt{3}+1)^3-(\sqrt{3}-1)^3=20$ 可被2^2整除。

$n=2$時，$(\sqrt{3}+1)^5-(\sqrt{3}-1)^5=152$ 可被2^3整除。

(2)證明：若$n=k$，$k+1$時成立，則$n=k+2$時亦成立。

由$n=k$時成立，

得$(\sqrt{3}+1)^{2k+1}-(\sqrt{3}-1)^{2k+1}=2^{k+1}a$

由$n=k+1$時成立，

得$(\sqrt{3}+1)^{2k+3}-(\sqrt{3}-1)^{2k+3}=2^{k+2}b$

其中a與b都是正整數。

考慮$n=k+2$的情形，

$$(\sqrt{3}+1)^{2k+5}-(\sqrt{3}-1)^{2k+5}$$
$$=\{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2\}\{(\sqrt{3}+1)^{2k+3}-(\sqrt{3}-1)^{2k+3}\}+(\sqrt{3}+1)^2(\sqrt{3}-1)^{2k+3}-(\sqrt{3}-1)^2(\sqrt{3}+1)^{2k+3}$$
$$=8\cdot 2^{k+2}b-(\sqrt{3}+1)^2(\sqrt{3}-1)^2\{(\sqrt{3}+1)^{2k+1}-(\sqrt{3}-1)^{2k+1}\}$$
$$=2^{k+5}b-4\cdot 2^{k+1}a$$
$$=2^{k+3}(4b-a)$$，其中$4b-a$是整數。

因為$(\sqrt{3}+1)^{2k+5}>(\sqrt{3}-1)^{2k+5}$，故$4b-a$是正整數。

(3)綜合(1)與(2)，可知$(\sqrt{3}+1)^{2n+1}-(\sqrt{3}-1)^{2n+1}$是一個可被$2^{n+1}$整除的正整數。

「數學歸納法」是人類很早就非常熟悉的工具。早在古希臘時代，Euclid（歐基里德，約300 B.C.）在證明「質數是無窮多的」時，已經掌握了「數學歸納法」的基本精神（見下一小節的**例題**1）。以後許多數學家都不自覺的利用「數學歸納法」證明各種問題。第一個明確的指出「數學歸納法」的形成與原理，是法國數學家 Blaise Pascal（巴斯噶 1623～1662）。（註一）

習題 1

1. 證明 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. 試用「數學歸納法」證明等差級數公式與等比級數公式。
3. 證明 $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots+n(n+1)(n+2)=\dfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$。
4. 證明 $5^{20}>3^{20}+4^{20}$。
5. 證明 $3^n>n^3$ 其中 $n\geq4$。（提示：你能否證明 $3^{\frac{1}{3}}>1+\frac{1}{n}$ 若 $n\geq4$？）

註一：Pascal 是數學史上所謂的天才數學家之一。據他的姊姊 Madam Perier 的回憶，Pascal在十二歲左右，他的父親要他先學會拉丁文和希臘文，然後再學數學，因此他們家中所有的數學書都被藏起來。小Pascal不管這一套，他自己導出一套平面幾何的定理，證明三角形的三內角和是180°。Pascal 著名的貢獻有，Pascal三角形，圓錐曲線內接六邊形的Pascal定理。

6. 證明「二項式定理」：$(1+x)^n=1+nx+\frac{n!}{2!(n-2)!}x^2+\frac{n!}{3!(n-3)!}x^3+\cdots\cdots+\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k+\cdots+\frac{n!}{(n-1)!1!}x^{n-1}+x^n$，其中 x 是任意數，n 是任意正整數，$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots n$。

7. 證明 $(1+x)(1+\frac{x}{2})(1+\frac{x}{3})\cdots(1+\frac{x}{n})=1+x+\frac{x(x+1)}{2!}+\frac{x(x+1)(x+2)}{3!}+\cdots\cdots+\frac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)}{n!}$，其中 x 是任意數，n 是任意正整數。

8. 設 $-1<x_i<0$，$i=1,2,\cdots,n$，證明 $(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)>1+x_1+\cdots+x_n$。（討論：若 $x_i\geq 0$，你能否不用「數學歸納法」，證明 $(1+x_1)(1+x_2)\cdots\cdots(1+x_n)\geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_n$？）

9. 若 $x_i\geq 0$，$i=1,2,\cdots,n$。令 $S_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$。證明 $(1+x_1)(1+x_2)\cdots\cdots(1+x_n)\leq 1+S_n+\frac{S_n^2}{2!}+\cdots+\frac{S_n^n}{n!}$。

10. 證明 $x^n-nx+(n-1)$ 可被 $(x-1)^2$ 整除，其中 $n\geq 2$。

11. 證明 $(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n$ 是一個可被 2^n 整除的正整數，其中 n 是任意正整數。

12. 令 $x_0=1$，$x_n=x_0+x_1+\cdots+x_{n-1}$，$n=1,2,\cdots\cdots$。證明 $x_n=2^{n-1}$。

13. 令 $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2n-1}=x_n\sqrt{2}+y_n\sqrt{3}+z_n+u_n\sqrt{6}$。其中 n 是任意整數，x_n，y_n，z_n，u_n 是整數。求證 $z_n=u_n=0$。（提示：你要作兩種「數學歸納法」，一種從 $n=1$ 開始，推到 $n=2,3,4\cdots\cdots$，另一種從 $n=-1$ 開始，推到 $n=-2,-3,-4,\cdots\cdots$。）

14. 令 $x_1=\alpha$，$x_{n+1}=(2\alpha-1)x_n+1-\alpha$，$n=2,3,\cdots\cdots$。求證 $x_n=\frac{1+(2\alpha-1)^n}{2}$。

15. 證明 $6n^5+15n^4+10n^3-n$ 是 30 的倍數。

*2.2 更多的例子

本小節的證明，我們常常省略「數學歸納法」的第三步驟，只寫出證明的要點。

例題1 證明質數是無窮多的。

證明：我們只要證明「對於任意正整數 n，我們都可找到 n 個相異的正質數」就夠了。現在用「數學歸納法」證明。

(1)若 $n=1$，2 就是一個正質數。

(2)假設 $n=k$ 時，我們可以找到 k 個相異的正質數 p_1，$p_2\cdots\cdots$，p_k。

設 $L=p_1p_2\cdots\cdots p_k+1$。則 $L\geq 3$。設 p 是 L 的某一個正的質因數。因爲 p 整除 $p_1p_2\cdots\cdots p_k+1$，所以 $p\neq p_1,p_2,\cdots\cdots,p_k$（否則 p 會整除 1，矛盾）。因此 $p_1,p_2,\cdots\cdots p_k,p_{k+1}=p$ 是 $(k+1)$ 個相異的正質數。

(3)綜合(1)與(2)，可知我們永遠能找到 n 個相異的正質數。

討論：以上例題是 Euclid 在「幾何原本」(Elements) 裏面提出的一個定理。Euclid 的證明與以上證明在表面上稍有不同，請參看本系列文章「整數的因子分解」。

例題2 設 n 是任意正整數，求證必可找正整數 k，使得 $(\sqrt{2}-1)^n=\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$。

想法：$(\sqrt{2}-1)^n$ 必可寫成 $u_n+v_n\sqrt{2}$ 的形式，其中 u_n，v_n 都是整數。又因 $|\sqrt{2}-1|<1$，故 u_n 與 v_n 不可能同時是正整數。如果 x_n，y_n 是正整數，那麼 $x_n-y_n\sqrt{2}=\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$ 的充分條件是 $x_n^2-2y_n^2=1$。同理如果 x_n，y_n 是正整數，那麼 $x_n\sqrt{2}-y_n=\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$ 的充分條件是 $2x_n^2-y_n^2=1$。

證明：第一部份，證明 $(\sqrt{2}-1)^{2n}=x_{2n}-y_{2n}\sqrt{2}$，其中 x_{2n}，y_{2n} 都是正整數。並且 $x_{2n}^2-2y_{2n}^2=1$。

(1) $n=1$，$(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$，且 $3^2-2\cdot 2^2=1$。

(2)設 $(\sqrt{2}-1)^{2k}=x_{2k}-y_{2k}\sqrt{2}$，其中 x_{2k}，y_{2k} 都是正整數，且 $x_{2k}^2-2y_{2k}^2=1$。

現在 $(\sqrt{2}-1)^{2k+2}=(\sqrt{2}-1)^2(\sqrt{2}-$

$1)^{2k}=(3-2\sqrt{2})(x_{2k}-y_{2k}\sqrt{2})=(3x_{2k}+4y_{2k})-(2x_{2k}+3y_{2k})\sqrt{2}$，其中 $3x_{2k}+4y_{2k}$，$2x_{2k}+3y_{2k}$ 都是正整數，且 $(3x_{2k}+4y_{2k})^2-2(2x_{2k}+3y_{2k})^2=x_{2k}^2-2y_{2k}^2=1$

第二部份，證明 $(\sqrt{2}-1)^{2n-1}=x_{2n-1}\sqrt{2}-y_{2n-1}$，其中 x_{2n-1}，y_{2n-1} 都是正整數，並且 $2x_{2n-1}^2-y_{2n-1}^2=1$。

請同學自己做做看吧。

討論：我們已經證明了 $(\sqrt{2}-1)^n=\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$，但是 k 究竟是多少呢？

假設 $(\sqrt{2}-1)^n=\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$ (1)

則 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}\right)^n=\dfrac{1}{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}$

故 $(\sqrt{2}+1)^n=\sqrt{k}+\sqrt{k-1}$ (2)

(1)+(2)，

$$\sqrt{k}=\frac{1}{2}\{(\sqrt{2}+1)^n+(\sqrt{2}-1)^n\}$$

$$k=\frac{1}{4}\{(\sqrt{2}+1)^{2n}+(\sqrt{2}-1)^{2n}+2\}$$

$$=\frac{1}{4}\{2\sum_{m=0}^{n}\binom{2n}{2m}2^m+2\}$$

所以，高三同學不妨用以下的提示來證明本題：

證明 $k=\dfrac{1}{4}\{2\sum\limits_{m=0}^{n}\binom{2n}{2m}2^m+2\}$ 是正整數，且 $(\sqrt{2}-1)^n=\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$

例題3已知 x_1，x_2，…，x_n，… 都是正數，並且 $x_1=\sqrt{2}$，$x_{n+1}^2=x_n+2$。求證 $x_n<2$，且 $x_1<x_2<x_3<\cdots<x_n<x_{n+1}<\cdots\cdots$。

證明：欲證 $x_n<2$，$x_n<x_{n+1}$。

(1) $n=1$，$x_1=\sqrt{2}<2$，

$x_1=\sqrt{2}<\sqrt{2+\sqrt{2}}=x_2$。

(2)設 $x_k<2$，且 $x_k<x_{k+1}$。

$x_{k+1}^2=x_k+2<2+2=4$，故 $x_{k+1}<2$。

$x_{k+2}^2-x_{k+1}^2$

$=x_{k+1}+2-x_{k+1}^2$

$=-(x_{k+1}+1)(x_{k+1}-2)>0$，

故 $x_{k+1}<x_{k+2}$。

例題4已知一組數列 $\dfrac{1}{1}$，$\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{7}{5}$，…，$\dfrac{p_n}{q_n}$，$\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$，…，其中 $p_{n+1}=p_n+2q_n$，$q_{n+1}=p_n+q_n$。證明 p_n 與 q_n 互質。

證明：

(1) $n=1$ 時，$p_1=1$ 與 $q_1=1$ 互質。

(2)假設 p_k 與 q_k 互質。

若 r 是一個整除 p_{k+1} 與 q_{k+1} 的正整數，則 r 整除 $p_{k+1}-q_{k+1}=(p_k+2q_k)-(p_k+q_k)=q_k$。故 r 也整除 $q_{k+1}-q_k=p_k$。

故 r 是 p_k 與 q_k 的公因數。但是已知 p_k 與 q_k 互質。故 $r=1$，即 p_{k+1} 與 q_{k+1} 互質。

討論：請同學自己證明 $\dfrac{1}{1}<\dfrac{7}{5}<\dfrac{p_5}{q_5}<\cdots<\dfrac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}<\dfrac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}<\cdots<\sqrt{2}<\cdots<\dfrac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}}<\dfrac{p_{2n}}{q_{2n}}<\cdots\cdots\cdots<\dfrac{3}{2}$。

例題5已知 $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0$，證明 $\cos n\alpha+\cos n\beta+\cos n\gamma=\sin n\alpha+\sin n\beta+\sin n\gamma=0$，其中 n 是不被3整除的正整數。（高一同學不必做這個題目。）

證明：令 $Z_1=\cos\alpha+i\sin\alpha$

$Z_2=\cos\beta+i\sin\beta$

$Z_3=\cos\gamma+i\sin\gamma$

由 de Moivre定理，可得 $(\cos n\alpha+\cos n\beta+\cos n\gamma)+i(\sin n\alpha+\sin n\beta+\sin n\gamma)=(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)+(\cos n\beta+i\sin n\beta)+(\cos n\gamma+i\sin n\gamma)=Z_1^n+Z_2^n+Z_3^n$，其中 n 是任意整數。

由已知條件知，$Z_1+Z_2+Z_3=0$，且 $\dfrac{1}{Z_1}+\dfrac{1}{Z_2}+\dfrac{1}{Z_3}=0$，故 $Z_1Z_2+Z_2Z_3+Z_3Z_1=Z_1Z_2Z_3\left(\dfrac{1}{Z_1}+\dfrac{1}{Z_2}+\dfrac{1}{Z_3}\right)=0$，可見 Z_1,Z_2,Z_3 是三次方程式 $X^3-A=0$ 的三個根，其中 $A=Z_1Z_2Z_3$。

現在我們要用「數學歸納法」證明所給恒等式。

(1) $n=1$，這是已給條件。

$n=2$，$Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2=(Z_1+Z_2+Z_3)^2-2(Z_1Z_2+Z_2Z_3+Z_3Z_1)=0$，故 $\cos2\alpha++\cos2\beta+\cos2\gamma=\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma=0$

(2)假設 $n=3k-2$，$3k-1$時皆成立，得 $Z_1^{3k-2}+Z_2^{3k-2}+Z_3^{3k-2}=Z_1^{3k-1}+Z_2^{3k-1}+Z_3^{3k-1}=0$。

因爲 $Z_1^3=A$，故 $Z_1^{3k+1}=AZ_1^{3k-2}$；同理 $Z_2^{3k+1}=AZ_2^{3k-2}$，$Z_3^{3k+1}=AZ_3^{3k-2}$。所以 $Z_1^{3k+1}+Z_2^{3k+1}+Z_3^{3k+1}=A(Z_1^{3k-2}+Z_2^{3k-2}+Z_3^{3k-2})=0$，得 $\cos(3k+1)\alpha+\cos(3k+1)\beta+\cos(3k+1)\gamma=\sin(3k+1)\alpha+\sin(3k+1)\beta+\sin(3k+1)\gamma=0$。

同理 $Z_1^{3k+2}+Z_2^{3k+2}+Z_3^{3k+2}=A(Z_1^{3k-1}+Z_2^{3k-1}+Z_3^{3k-1})=0$，故 $\cos(3k+2)\alpha+\cos(3k+2)\beta+\cos(3k+2)\gamma=\sin(3k+2)\alpha+\sin(3k+2)\beta+\sin(3k+2)\gamma=0$。

討論：若 $\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cdots+\cos\alpha_{101}=\cos2\alpha_1+\cos2\alpha_2+\cdots+\cos2\alpha_{101}=\cdots\cdots\cdots=\cos50\alpha_1+\cos50\alpha_2+\cdots+\cos50\alpha_{101}=\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\cdots+\sin\alpha_{101}=\sin2\alpha_1+\sin2\alpha_2+\cdots+\sin2\alpha_{101}=\cdots=\sin50\alpha_1+\sin50\alpha_2+\cdots\cdots+\sin50\alpha_{101}=0$，請同學自己證明 $\cos n\alpha_1+\cos n\alpha_2+\cdots+\cos n\alpha_{101}=\sin n\alpha_1+\sin n\alpha_2+\cdots+\sin n\alpha_{101}=0$，其中 n 是不被 101 整除的整數。

例題6 證明平面上 n 條直線將這平面至多分割成 $1+\dfrac{n(n+1)}{2}$ 個區域。

證明：令 n 條直線

(1) $n=1$，平面被分割成 $2=1+\dfrac{1\cdot2}{2}$ 個區域

(2)假設 k 條直線至多分割成 $1+\dfrac{k(k+1)}{2}$ 個區域。

考慮 $k+1$ 條直線 L_1，L_2，…，L_{k+1}

如果不考慮 L_{k+1}，則 L_1，L_2，…，L_k 至多分割出 $1+\dfrac{k(k+1)}{2}$ 個區域。

L_{k+1}與 L_1，L_2，…，L_k 的交點至多有 k 個。由於 L_{k+1} 與這些新的交點至多增加了 $k+1$ 個區域。（爲什麼？）

因此 $k+1$ 條直線至多分割出 $1+\dfrac{k(k+1)}{2}+k+1=1+\dfrac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$ 個平面區域。

習題 2

1. 若 a 與 b 都是整數，$(a+b\sqrt{2})^n$ 可以寫成 $a_n+b_n\sqrt{2}$ 的形式，其中 a_n 與 b_n 都是整數，n 是正整數。證明：如果 a 是最靠近 $b\sqrt{2}$ 的整數，則對於每一個正整數 n，a_n 是最靠近 $b_n\sqrt{2}$ 的整數。

2.3 什麼是「數學歸納法」？(二)

回到本節的第 2.1 小節的**例題 1**。我們要證明 $1^3+2^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$。那時候我們發現一種方法：只要能夠證明「若 $n=k$ 時成立，則 $n=k+1$ 時也成立」，問題幾乎就迎刃而解了。

同學可能會說：「我不能夠想到這種方法。這種方法好像是從天上掉下來的。平常的人是想不到這種方法的。」

那麼就讓我們再想個新方法吧。同學應該不會反對使用「歸謬證法」吧。

假設這個敘述是錯的。例如，在 $n=199$ 時，$1^3+2^3+\cdots+199^3\neq\dfrac{199^2\cdot200^2}{4}$。很可能，不只在 $n=199$ 時是錯的，還有很多正整數使這個敘述不成立。我們取出「這個敘述不成立」的最小正整數，令其爲 k。也就是說，

$$1^3+2^3+\cdots+k^3\neq\frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

若 $1\leq n\leq k-1$。

請注意，$k\neq1$，因爲 $n=1$ 時這個敘述顯然成立。

我們現在要導出一個矛盾。

因爲

$$1^3+2^3+\cdots+k^3 \neq \frac{k^2(k+1)^2}{4} \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$1^3+2^3+\cdots+(k-1)^3=\frac{(k-1)^2k^2}{4} \cdots\cdots (2)$$

$$(1)-(2) \quad k^3 \neq \frac{k^2(k+1)^2}{4}-\frac{(k-1)^2k^2}{4} \cdots (3)$$

但是 $\frac{k^2(k+1)^2}{4}-\frac{(k-1)^2k^2}{4}$

$$=\frac{k^2\{(k+1)^2-(k-1)^2\}}{4}$$

$$=\frac{k^2\cdot 4k}{4}=k^3,$$

(3)式顯然是個矛盾。證明完畢。

以上的方法可以總結如下：

一假設這個敍述不正確，我們就可以找到一些反例（counterexamples，也就是這個敍述錯誤的情況）。

二在這些反例中，我們可以找到一個最小反例（minimal counterexample），也就是，找到一個正整數 k，使得 $n=k$ 時這個敍述不成立，$n<k$ 時這個敍述一定成立。

三設法導出矛盾。例如，證明「若 $n=k-1$ 成立，則 $n=k$ 亦成立」（若 $k\geq 2$），或是證明「若 $n=k-2$，$k-1$ 成立，則 $n=k$ 成立」（若 $k\geq 3$），或是證明「若 $n=1$，2，$\cdots$，$k-1$ 成立，則 $n=k$ 成立」（若 $k\geq 2$）。

我如果說，這種「最小反例」的方法和第 2.1 小節所用的「數學歸納法」其實是同樣的精神，同學應該會同意了吧。

同學不妨再進一步想想這種「最小反例」的方法。這種方法其實是利用了自然數一個很顯明（不過也很重要）的性質，即：自然數的任意子集合，如果非空，一定有一個最小的元素。

這個性質表示自然數的大小關係是良序的（well-ordered）。一般來說，一個集合如果具有大小關係，例如整數、有理數或實數，這種大小關係必是良序的，如果任何一個非空的子集合一定都有一個最小的元素。整數、有理數、實數都不是良序的。同學能不能在 $N\times N$ 上面定義出一種良序的大小關係？其中 N 代表自然數形成的集合。

有人可能會猜測，一個集合如果是良序的，我們大概就可以利用「最小反例」的方法或「數學歸納法」？答案：完全正確。這種例子在比較高等的數學常常出現，不過我們不準備在此繼續追究下去。

例題證明任何大於 1 的整數都可寫成有限個質因數的乘積。

證明：假設以上敍述不正確。設 n 是最小的不能寫成有限個質因數的乘積的整數。

n 不是質數，否則與假設違反。

故 $n=mk$，其中 m，$k\geq 2$。因此 m，$k<n$。

所以 m 與 k 分別都可寫成有限個質因數的乘積。因此 n 也可以寫成有限個質因數的乘積。矛盾。

2.4 數學歸納法的誤用

運用數學歸納法時，要注意應該檢查：(1) $n=1$ 時是否成立，(2)若 $n=k$ 時成立，$n=k+1$ 是否成立。二者缺一不可。同時在第(2)步驟的 k，是任意一個自然數，而不是某些特定的數。

例題 1 證明 n^2-n+41 是質數。

「證明」令 $f(n)=n^2-n+41$。

$n=1$，$f(1)=41$。

$n=2$，$f(2)=43$。

$n=3$，$f(3)=47$。

$n=4$，$f(4)=53$。

$n=5$，$f(5)=61$。

$n=6$，$f(6)=71$。

以下類推，$f(n)$ 恒爲質數。

但是請看 $f(41)=41\cdot 40+41=41^2$，$f(42)=42\cdot 41+41=41\cdot 43$，都不是質數。

錯在那裏？錯在沒有驗證第(2)步驟。

例題 2 求證一平面上的任意 n 點，皆在一直線上。

「證明」現在讓我們用歸納法來「證明」一下上面的敍述，在

$n=1$ 時，這敍述當然成立。

$n=2$ 時，這敘述也當然成立，

……………………

在 $n=k$ 時，這敘述說：平面上任何 k 點皆在一直線上，假如這是對的，我們想證明平面上任何 $k+1$ 個點，皆在一直線上。

設 p_1，……，p_{k+1}為這 $k+1$ 個點，因 p_1，……p_k為 k 個點，故它們必在同一直線上；又因 p_2，p_3，……，p_{k+1}是 k 個點，所以它們也在同一直線上。但是任意二點便決定一直線，所以p_1，p_2，……，p_{k+1}必須在同一直線上，因此，利用歸納法，我們證明了平面上任意 n 點，皆在一直線上。

但是：我們知道任取三點，便可能不在一直線上，那麼，上面的「證明」錯在那裏？

在 $k=2$ 時，我們的「證明」發生問題。在 $k=2$ 轉到 $k=3$ 時，p_1，p_2固然決定一直線，p_2，p_3也決定一直線，但它們不一定為同一直線。因此 p_1，p_2，p_3不一定在一直線上！

我們應該把題目改成：若任意三點皆在一直線上，則任意 n 點必在一直線上。

習題 3

1. 有人用下法證明全世界的人性別都一樣，設一集合 M_n 包含 n 個人，則想證明 M_n 中的人性別都一樣。當 $n=1$ 時，M_n 中只有一個人，當然其性別是唯一的。現在假定命題當 $n=k$ 時成立，再假定 M_{k+1} 是包含 $k+1$ 個人的集合。在 M_{k+1} 中選定兩個人 x 和 y，則 $M_{k+1}\setminus\{x\}$ 和 $M_{k+1}\setminus\{y\}$ 都是只包含 k 個人的集合，所以其中的人性別都一樣，因而 x，y 和 $M_{k+1}\setminus\{x,y\}$ 中任何人的性別都相同，故 M_{k+1} 中諸位的性別必全相同。請指正這證明錯在那裏？
2. 有人用下法證明任何兩個自然數都相等。令 $max\{a,b\}$表示 a 與 b 之中較大者。對 $max\{a,b\}$ 作數學歸納法，我們想證明 $a=b$。若 $max\{a,b\}=1$，則 $1\leq a$，$b\leq 1$，故 $a=b$。假設 $max\{a,b\}=k$，則 $a=b$。考慮 $max\{a,b\}=k+1$ 的情形。今 $max\{a-1,b-1\}=max\{a,b\}-1=k$，故 $a-1=b-1$，得 $a=b$。請指出錯在那裏？

2.5 如何尋找答案？

同學可能會問：「現在我們已經學會數學歸納法。可是你如果不告訴我們 $1^3+2^3+\cdots+n^3$ 的和是 $\dfrac{n^2(n+1)^2}{2}$，我們根本就求不出 $1^3+2^3+\cdots+n^3$。你能不能告訴我們如何尋找答案」？

如何尋找答案？首先，你要先試驗幾個特殊例子；在這些特例尋找它們共同之處，試試看能不能歸納出一般的結論出來。同學可以參考 G. Polya, How to solve it ？這是一本很值得看的課外讀物，有張憶壽的中文譯本，長橋出版社出版。

我們在這一節，要介紹有系統的求和方法。

例題 1 求 $S_n=1^2+2^2+\cdots+n^2$。

解法 1 由 $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$，得

$$2^3-1^3=3\cdot1^2+3\cdot1+1$$
$$3^3-2^3=3\cdot2^2+3\cdot2+1$$
$$\cdots\cdots$$
$$+)\ (n+1)^3-n^3=3\cdot n^2+3\cdot n+1$$

$$(n+1)^3-1=3(1^2+2^2+\cdots+n^2)+3(1+2+\cdots+n)+n$$

故 $$S_n=\frac{(n+1)^3-1-3(1+2+\cdots+n)-n}{3}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}。$$

解法 2 由「差和分理論」可知

$S_n=an^3+bn^2+cn+d$，其中 a,b,c,d 是有理數。

現在只要求出 a,b,c,d 就可以。

$$1=S_1=a+b+c+d$$
$$5=S_2=8a+4b+2c+d$$
$$14=S_3=27a+9b+3c+d$$
$$30=S_4=64a+16b+4c+d$$

得 $a=\dfrac{1}{3}$，$b=\dfrac{1}{2}$，$c=\dfrac{1}{6}$，$d=0$。

討論 1. 在解法 1 中，也可由公式 $(k+1)^3-(k-1)^3=6k+2$ 求得。

2. 解法2是所謂「未定係數法」，我們只要求出那些未知的係數 a, b, c, d 即可。

例題2 求 $S_n=1^3+2^3+\cdots+n^3$。

解法：由 $(k+1)^4-(k-1)^4=8k^3+8k$，得

$$\begin{aligned}
&2^4-0=8\cdot1^3+8\cdot1\\
&3^4-1^4=8\cdot2^3+8\cdot2\\
&4^4-2^4=8\cdot3^3+8\cdot3\\
&\cdots\cdots\\
&n^4-(n-2)^4=8\cdot(n-1)^3+8(n-1)\\
+)\ &(n+1)^4-(n-1)^4=8\cdot n^3+8n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(n+1)^4+n^4-1^4\\
&=8(1^3+2^3+\cdots+n^3)+8(1+2+\cdots+n)
\end{aligned}$$

故 $S_n=\dfrac{(n+1)^4+n^4-1-8(1+2+\cdots+n)}{8}$

$=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$。

討論：請用 $S_n=an^4+bn^3+cn^2+dn+e$，求 a, b, c, d, e。

例題3 求 $S_n=1+2+4+8+\cdots+2^{n-1}$。

解法：
$$\begin{aligned}
1+S_n&=1+1+2+4+8+\cdots+2^{n-1}\\
&=2+2+4+8+\cdots+2^{n-1}\\
&=4+4+8+\cdots+2^{n-1}\\
&=8+8+\cdots\cdots+2^{n-1}\\
&=2^{n-1}+2^{n-1}=2^n
\end{aligned}$$

故 $S_n=2^n-1$。

討論：$S_n-2S_n=1-2^n$，同學能不能說明原因?

習題4

1. 將循環小數 0.317317317……化成分數。
2. 求 $2+2\cdot3+2\cdot3^2+2\cdot3^3+\cdots+2\cdot3^n$ 之和。
3. 求 $1\cdot2^2+2\cdot3^2+3\cdot4^2+\cdots+(n-1)n^2$ 之和。(提示：一般項 $(k-1)k^2=k^3-k^2$。)
4. 求 $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots+n(n+1)(n+2)$ 之和。
5. 求 $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 之和。
6. 求 $\cos\dfrac{\pi}{17}\cos\dfrac{2\pi}{17}\cos\dfrac{4\pi}{17}\cos\dfrac{8\pi}{17}$ 之值。(提示：考慮 $\sin\dfrac{\pi}{17}\cos\dfrac{\pi}{17}\cos\dfrac{2\pi}{17}\cos\dfrac{4\pi}{17}\cos\dfrac{8\pi}{17}$。)

2.6 不必用數學歸納法的例子

同學們做完了以上五節的例題與習題，會不會「歸納」出如下的口訣：「看到含有 n 的恒等式或不等式證明題，用數學歸納法」？

如果你這麼迷信數學歸納法，那麼請看以下的例子。你用數學歸納法證明，我用別的方法證明，我們比賽一下，比比看誰做得快，做得巧。

例題1 證明 $\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\geq\sqrt{n}$。

證明：用逆推法證明。

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geq\sqrt{n}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{2n}}+\frac{1}{\sqrt{3n}}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}+\frac{1}{\sqrt{n^2}}\geq1\text{。}$$

但是 $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\geq\dfrac{1}{\sqrt{n^2}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\geq\dfrac{1}{\sqrt{n^2}}$，

$\dfrac{1}{\sqrt{3n}}\geq\dfrac{1}{\sqrt{n^2}}$，…，$\dfrac{1}{\sqrt{n(n-1)}}\geq\dfrac{1}{\sqrt{n^2}}$

故 $\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{\sqrt{2n}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n(n-1)}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2}}$

$\geq\dfrac{n}{\sqrt{n^2}}=1$。得證

例題2 試證 $n^n<(1\cdot2\cdots n)^2<(\dfrac{n+1}{2})^{2n}$，其中 $n\geq3$。

證明：因為

$$\begin{aligned}
&1\cdot n\geq n\\
&2\cdot(n-1)>n\\
&3\cdot(n-2)\geq n\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&k(n-k+1)=n+(k-1)n-k(k-1)\\
&\qquad=n+(k-1)(n-k)\geq n
\end{aligned}$$

……………………

$n\cdot 1\geq n$

故得 $(1\cdot 2\cdots\cdots n)^2>n^n$

另一方面，因爲 $(\frac{n+1}{2})^2-k(n-k+1)$

$=\{\frac{k+(n-k+1)}{2}\}^2-k(n-k+1)$

$=\{\frac{k-(n-k+1)}{2}\}^2\geq 0$，得

$1\cdot n<(\frac{n+1}{2})^2$

$2\cdot(n-1)\leq(\frac{n+1}{2})^2$

……………………

$k(n-k+1)\leq(\frac{n+1}{2})^2$

……………………

$n\cdot 1<(\frac{n+1}{2})^2$

故得 $(1\cdot 2\cdots n)^2<(\frac{n+1}{2})^{2n}$

例題3試證 $\frac{1}{2\sqrt{n}}<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\cdots\frac{2n-1}{2n}$

$<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

證明：$(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\cdots\frac{2n-1}{2n})^2\cdot(2n+1)$

$=\frac{1}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdots\cdots\frac{(2n-1)^2}{(2n)^2}\cdot\frac{2n+1}{1}$

$=\frac{3}{2^2}\cdot(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4})\cdot(\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6})\cdots(\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2k})$

$\cdots(\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n})\leq\frac{3}{4}\underbrace{1\cdot 1\cdots 1}_{n-1\text{項}}<1$，

故得 $(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n})^2\cdot(2n+1)<1$

得 $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$。

另一方面，$4n\cdot(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n})^2$

$=2\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdots\frac{(2n-1)^2}{(2n)^2}\cdot 2n$

$=(\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4})(\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6})\cdots(\frac{2k-1}{2k-2}\cdot\frac{2k-1}{2k})\cdots\cdots$

$\cdots(\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\frac{2n-1}{2n})>\underbrace{1\cdot 1\cdots\cdots 1}_{n-1\text{項}}=1$。故

得 $4n(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\cdots\frac{2n-1}{2n})^2>1$

得 $\frac{1}{2\sqrt{n}}<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\cdots\frac{2n-1}{2n}$。

例題4試證 $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\frac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$。

證明：$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$=\frac{2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}$。

$2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$

$=\frac{2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$

$=\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}>\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}$。

討論：過分迷信數學歸納法的同學無論如何都應該用數學歸納法來解解這個題目。同學可以利用這個題目，證明 $[\sum_{n=1}^{10000}\frac{1}{\sqrt{n}}]=198$，其中 Gauss 符號 $[x]$ 表示正實數 x 的整數部分。

後記：本文初稿完成後，曾經張國男先生提供不少修正補充意見，特別是第 2.2 節**例題2**的討論與第 2.6 節是他建議增添的。謹此誌謝。

(本文作者現任教於台大數學系)