四次方程式的解決法

蕭守仁

前　　言

四次方程式的解根方法早已解決，且有多種解法。本文的目的在介紹另一種解根方法以供參考。

本　　文

設四次方程式爲：(p , q , r , $s \in R$)

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0 \tag{1}$$

令 $x = y - \frac{p}{4}$ 代入(1)式，整理得

$$y^4 + ay^2 + by + c = 0 \tag{2}$$

其中

$$a = \frac{-3p^2 + 89}{8}, \quad b = \frac{p^3 - 4pq + 8r}{8}$$

$$c = \frac{-3p^4 + 16p^2q - 64pr + 256s}{4^4}$$

今設

$$y^4 + ay^2 + by + c$$
$$= (y^2 + a_1 y + b_1)(y^2 + a_2 y + b_2) \tag{3}$$

比較(3)式兩端之係數：

$$a_1 + a_2 = 0. \tag{4}$$
$$b_1 + b_2 + a_1 a_2 = a \tag{5}$$
$$a_1 b_2 + a_2 b_1 = b \tag{6}$$
$$b_1 b_2 = c \tag{7}$$

由(4)得 $a_2 = -a_1$ 代入(5),(6),得下二式

$$b_1 + b_2 = a + a_1^2 \tag{8}$$
$$a_1(b_2 - b_1) = b \tag{9}$$

利用恒等式，並將(7)，(8)，(9)代入式中

$$a_1^2(b_1 + b_2)^2 = a_1^2(b_2 - b_1)^2 + 4a_1^2 b_1 b_2$$

$$\Rightarrow a_1^2(a + a_1^2)^2 = b^2 + 4a_1^2 c$$

$$\Rightarrow (a_1^2)^3 + 2a(a_1^2)^2 + (a^2 - 4c)(a_1^2) - b^2 = 0 \tag{10}$$

(i) 因爲(10)式乃由(4)(5)(6)(7)導得，故有以下事實：

"凡能滿足(4)(5)(6)(7)各式的 a_1 皆能滿足(10)式"

(ii) 設 u 是(10)式中 a_1 的一解，今將之代入(4)(5)(6)三式得

$$u + a_2 = 0 \quad ①$$
$$b_1 + b_2 + ua_2 = a \quad ②$$
$$ub_2 + a_2 b_1 = b \quad ③$$

(a)如果由(10)式解得 $u = 0$ ，則由①得

$a_2 = 0$ ， 代入②③

$$b_1 + b_2 = a \quad ④$$
$$0 = b \quad ⑤$$
$$b_1 b_2 = c \quad (7)$$

" $b = 0$ "乃爲必然，此由(10)式有 $a_1 = 0^-$ 解得知，而 b_1 ， b_2 必可由④(7)解得且必有解，亦就是說：

"若(10)式有 $a_1 = 0^-$ 解，則必滿足(4)(5)(6)(7)各式"

(b)如果由(10)式解得 $u \fallingdotseq 0$ ，則①， $a_2 = -u$ 代入②，③得

$$b_1 + b_2 = a + u^2 \quad ⑥$$

$$b_2 - b_1 = \frac{b}{u} \quad ⑦$$

由⑥+⑦，⑥−⑦分別得 b_2, b_1 如下：

$$b_2 = \frac{1}{2}\left(u^2 + a + \frac{b}{u}\right)$$

$$b_1 = \frac{1}{2}\left(u^2 + a - \frac{b}{u}\right)$$

則 $b_1b_2=\frac{1}{4}\left[(u^2+a)^2-(\frac{b}{u})^2\right]$

$=\frac{1}{4u^2}\left[(u^2)^3+2a(u^2)^2+a^2(u^2)-b^2\right]$

又 u 滿足⑽式，即

$(u^2)^3+2a(u^2)^2+(a^2-4c)(u^2)-b^2=0$

所以有 $b_1b_2=\frac{1}{4u^2}\left[4cu^2\right]=c$，

即 $b_1b_2=c$ 此滿足⑺式，亦就是說："若⑽式有一解 $a_1\neq 0$，則也必滿足⑷⑸⑹⑺各式"

由(a)(b)討論得知以下事實：凡滿足⑽式之 a_1 亦必滿足⑷⑸⑹⑺諸式的 a_1"

(iii) 由(i)(ii)證明得知：⑽式之 a_1 解集合必相等於⑷⑸⑹⑺諸式的 a_1 解集合。

因此，只要將⑽式的 a_1^2 解出，代回⑷⑸⑹⑺各式，則能解出 a_2，b_1b_2 而得⑵式之四根，利用卡丹的三次方程式解法解⑽式即可得 a_1^2。

(i) 若 $a_1^2\neq 0$ 即 $a_1\neq 0$，則由⑻⑼得 b_1b_2 如下：

$$b_1=\frac{1}{2}\left(a+a_1^2-\frac{b}{a_1}\right),$$

$$b_2=\frac{1}{2}\left(a+a_1^2+\frac{b}{a_1}\right)$$

於是解下二式可得⑵式四根

$$y^2+a_1y+\frac{1}{2}\left(a+a_1^2-\frac{b}{a_1}\right)=0 \tag{11}$$

$$y^2-a_1y+\frac{1}{2}\left(a+a_1^2+\frac{b}{a_1}\right)=0 \tag{12}$$

(ii) 若 $a_1^2=0$，即 $a_1=0$，則由⑺，⑻兩式得 b_1,b_2 如下：

$$b_1=\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2-4c}\right),$$

$$b_2=\frac{1}{2}\left(a-\sqrt{a^2-4c}\right)$$

於是解下二式可得⑵式之四根

$$y^2+\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2-4c}\right)=0 \tag{13}$$

$$y^2+\frac{1}{2}\left(a-\sqrt{a^2-4c}\right)=0 \tag{14}$$

設⑵式之四根是 y_1，y_2，y_3，y_4，則⑴式之四根是

$$y_1-\frac{p}{4},\quad y_2-\frac{p}{4},$$

$$y_3-\frac{p}{4},\quad y_4-\frac{p}{4}。$$

實例說明：1.試解方程式

$$x^4+4x^3+7x^2+10x+3=0$$

【解】 利用公式減根消去三次項，得⑵式的 a，b，c。

$$a=\frac{-3\cdot 4^2+8\cdot 7}{8}=1,$$

$$b=\frac{4^3-4\cdot 4\cdot 7+8\cdot 10}{8}=4$$

$$c=\frac{-3\cdot 4^4+16\cdot 4^4\cdot 7-64\cdot 4\cdot 10+256\cdot 3}{4^4}=-3$$

再解⑽式 $(a_1^2)^3+2\cdot 1\cdot(a_1^2)^2+(1^2-4(-3))(a_1^2)-4^2=0$

即 $(a_1^2)^3+2(a_1^2)^2+13(a_1^2)-16=0$

解之得 $a_1^2=1$，或 $a_1^2=\frac{1}{2}(-3\pm\sqrt{55}\,i)$

以下分別利用此三種 a_1^2 解⑾、⑿式求方程式的四根，以驗證所求之四根可滿足原方程式，且利用何種 a_1^2 皆可求得相同的四根。

① $a_1^2=1$，得 $a_1=1$ 或 -1，代入⑾、⑿式得 $y^2+y-1=0$ 及 $y^2-y+3=0$

得四根 $\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{5})$，

$\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{11}\,i)$

② $a_1^2=\frac{1}{2}(-3+\sqrt{55}\,i)$，

得 $a_1=-\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2}i$ 或 $\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{11}}{2}i$

代入⑾、⑿式得

$$y^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{11}}{2}i\right)y$$
$$+\frac{1}{4}(-1+\sqrt{55}\,i+\sqrt{5}-\sqrt{11}\,i)$$
$$=0$$
$$y^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{11}}{2}i\right)y$$
$$+\frac{1}{4}(-1+\sqrt{55}\,i-\sqrt{5}+\sqrt{11}\,i)$$
$$=0$$

得四根 $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$，

$\frac{1}{2}(1+\sqrt{11}\,i)$，

$\frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})$，

$\frac{1}{2}(1-\sqrt{11}\,i)$。

③ $a_1^2=\frac{1}{2}(-3-\sqrt{55}\,i)$

得 $a_1=-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{11}}{2}i$

或 $\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2}i$

代入⑾、⑿式得

$$y^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2}i\right)y$$
$$+\frac{1}{4}(-1+\sqrt{11}\,i+\sqrt{5}-\sqrt{55}\,i)$$
$$=0$$
$$y^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2}i\right)y$$
$$+\frac{1}{4}(-1-\sqrt{11}\,i-\sqrt{5}-\sqrt{55}\,i)$$
$$=0$$

得四根 $\frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})$，

$\frac{1}{2}(1+\sqrt{11}\,i)$，

$\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$，

$\frac{1}{2}(1-\sqrt{11}\,i)$

由①、②、③討論皆得四根

$\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{5})$，$\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{11}\,i)$

於是得原四次方程式之四根是：

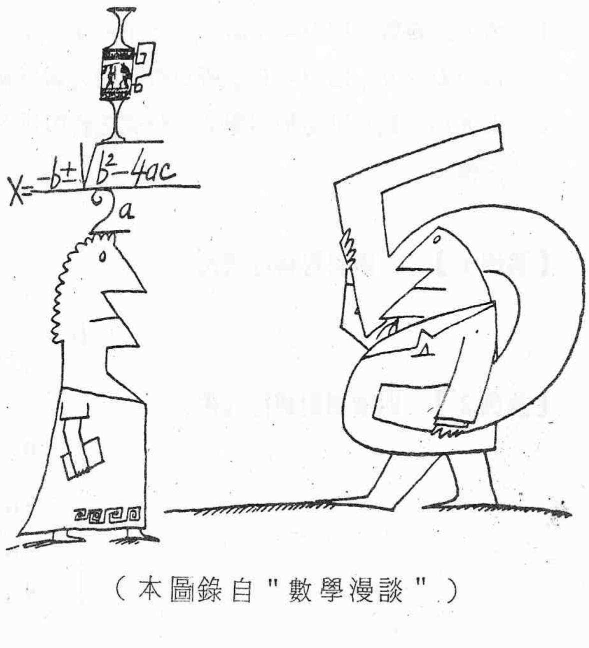
$\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{5})-\frac{4}{4}$，

$\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{11}\,i-\frac{4}{4})$

即 $\frac{1}{2}(-3\pm\sqrt{5})$ 或 $\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{11}\,i)$

將此四根代入原方程式皆能滿足，即知此四根確爲原方程式之四根。

（本文作者現就讀於嘉義高中）



（本圖錄自"數學漫談"）