閱卷雜感

康明昌

前言

今年的大專聯考已經過去了。但是，許多問題仍然沒有過去，例如，為什麼學生的數學成績總是不太高呢？

長久以來，數學就是一門投資報酬率極低的學科。學生投入許多時間與精力去唸數學，卻得不到預期的收穫。為什麼呢？

是因為數學特別艱深難學嗎？還是老師教得不得其法？或是學生的學習態度不對？或是聯招會的命題先生有所偏差？

今年大專聯考的數學恢復了久已廢止的證明題與計算題。在閱卷之中，自然呈現許多高中數學教學與學習的問題。本文的目的是敘述並討論個人在這一週閱卷期間所見所思。

本文首先對甲丙組數學試題的四題證明計算題，給出一種或數種解法，作爲討論的基礎。然後討論各種學生犯錯的例子，我們並且試圖探討學生爲什麼會犯這樣的錯誤或那樣的錯誤。

試題一

題目：

設從區間〔-5，5〕$=\{x:-5\leqslant x\leqslant 5\}$ 中任意選出一個實數 x，試求 $\log_{14}(x^3-5x+12)<1$ 之機率 P。

想法：

學生要知道這個題目並不是什麼求機率的題目，這只不過是一個不等式的題目。我們要解以下不等式，

$$\begin{cases}-5\leqslant x\leqslant 5 & \cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ \log_{14}(x^3-5x+12)<1\end{cases}$$

但是 $\log_{14}(x^3-5x+12)<1$ 成立的充份必要條件是

$$\begin{cases}x^3-5x+12>0 & \cdots\cdots\cdots(2)\\ x^3-5x+12<14 & \cdots\cdots\cdots(3)\end{cases}$$

因此我們只要解不等式(1)，(2)，(3)。

請注意，我們的要求是不等式(1)，(2)，(3)必須同時成立。

解法：

已知

$$-5\leqslant x\leqslant 5 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

因爲

$$\log_{14}(x^3-5x+12)<1$$

成立的充份必要條件是

$$\begin{cases}x^3-5x+12>0 & \cdots\cdots\cdots\cdots(2)\\ x^3-5x+12<14 & \cdots\cdots\cdots\cdots(3)\end{cases}$$

所以我們必須解不等式(1)，(2)，(3)。

首先解不等式(2)。

$$x^3-5x+12>0$$
$$\Leftrightarrow\quad (x+3)(x^2-3x+4)>0$$
$$\Leftrightarrow\quad x+3>0$$
$$\left(因為\ x^2-3x+4=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0\right)$$
$$\Leftrightarrow\quad x>-3 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

其次解不等式(3)。

$$x^3-5x+12<14$$
$$\Leftrightarrow\quad x^3-5x-2<0$$
$$\Leftrightarrow\quad (x+2)\{x-(1-\sqrt{2})\}\{x-(1+\sqrt{2})\}<0$$
$$\Leftrightarrow\quad x<-2\ 或\ 1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

因此不等式(1)，(2)，(3)同時成立的充份必要條件是不等式(1)，(4)，(5)同時成立。

不等式(1)，(4)，(5)同時成立的充份必要條件是

$$-3<x<-2,$$
$$或\quad 1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$$
$$機率\ P=\frac{1+2\sqrt{2}}{10}$$

討論：

一、這個題目學生最易犯的錯誤是沒有考慮不等式(2)，因此許多學生得到的答案是 $\frac{3+2\sqrt{2}}{10}$。高中的老師在教對數函數時應該隨時提醒學生，在高中程度的對數 $\log_a x$ 中，$x>0$ 與 $a>0$，$a\neq 1$ 是第一件要注意的事情。

二、即使學生把「$\log_a x$，x 恆為正數」的條件背得滾瓜爛熟，在考試時學生還是會把這個條件忘掉。為什麼呢？我認為，這是學生很少去分辨何種情況是可逆運算（$\Leftrightarrow$），何種情況是不可逆運算（$\Rightarrow$）。

高中的老師必須提醒學生，不等式 $\log_{14}(x^3-5x+12)<1$ 的充份必要條件是不等式(2)與(3)。光是不等式(3)，並不能得到 $\log_{14}(x^3-5x+12)<1$。老師們，這是你的責任，隨時提醒學生：在解不等式或方程式時，最好是所有的運算過程都是可逆的，否則就要嚴格要求學生注意增根或減根的情形發生。

三、學生在解不等式時，最常見的錯誤是不知道在什麼情況用「或」（or），在什麼情況用「且」（and）。老師要告訴學生，「或」與「且」作為數學術語使用時，有其特殊的規定，不能用普通的字面涵意來揣測其用法。「或」是指兩個或數個條件只要有一個成立即可，「且」是指兩個或數個條件必須同時成立。

很諷刺的是，有不少學生把「或」與「且」用得亂七八糟，“且”他們在實數軸上完全正確的標出不等式的解。

這代表學生完全能夠掌握解不等式的方法，但是他們卻不能分辨「或」與「且」的用法。

有一位同事告訴我，他知道有一個高中在某次考試全部考「或」與「且」的用法。我眞不能想像，「或」與「且」的區別是這麼明顯，值得用幾十個題目來反覆訓練學生嗎？用這麼密集式的方法來解釋一個簡單明瞭的概念，恐怕會引起反效果吧。

四、某些學生在解不等式(2)時，並沒有說明任何理由，就寫出 $x>-3$ 的答案。這是一個很不好的習慣，要說明 x^2-3x+4 恆為正數，不管是用「配方法」或「判別式」，都只不過是一句話而已。我不相信學生沒有時間加以簡要的說明。

還有些學生把 $x^2-3x+4=0$ 的複數根解出來，標在實數軸上。更匪夷所思的是，他居然能夠解出正確的答案：$-3<x<-2$ 或 $1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$。高中的老師們，絕對要禁止學生把不是實數的複數標在實數軸上，這是不可原諒的行為。「數學的精神是自由」並不意味學生可以自由的把虛數標在實數軸上，然後再把這個虛數忘掉。

五、還有些學生把 $\sqrt{2}$ 寫成 1.414。我相信這些學生是知道 1.414 只不過是 $\sqrt{2}$ 的近似值。因此我建議這些學生使用近似的符號：$\sqrt{2}\approx 1.414$，不要寫 $\sqrt{2}=1.414$。

有一些學生在 x^3-5x-2 的分解因式中，把 $(x+2)\{x-(1-\sqrt{2})\}\{x-(1+\sqrt{2})\}$ 寫成 $(x+2)(x-1\pm\sqrt{2})$。這種寫法是不可以的。在解方程式時，可以把 $x=1-\sqrt{2}$ 或 $1+\sqrt{2}$ 寫成 $x=1\pm\sqrt{2}$，我們的確有這種約定（convention）。但是我們從來沒有約定把

$(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})$寫成$x-1\pm\sqrt{2}$。

試題二

題目：

試證明對於一切自然數 n，$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\frac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$。再計算 $\left[\sum_{n=1}^{10000}\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$，此處高斯符號$[x]$表示正實數 x 的「整數部份」。

想法：

注意$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

$$=\frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n-1}-\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{n}}。$$

在計算$\left[\sum_{n=1}^{10000}\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$時，有許多人得到 $2(\sqrt{10001}-1)<\sum_{n=1}^{10000}\frac{1}{\sqrt{n}}<200$，因此他只能得到$\left[\sum_{n=1}^{10000}\frac{1}{\sqrt{n}}\right]=198$ 或 199。所以會發生這件事，是因爲在$2(\sqrt{2}-1)<1<2$這個估計之中，誤差$(2-2(\sqrt{2}-1)=4-2\sqrt{2})$太大了。讀者不妨自己計算，若$n\geqslant 2$時，

$$2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})-2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\frac{1}{n},$$

這時候的誤差就不太大了。因此最好先算 $\sum_{n=2}^{10000}\frac{1}{\sqrt{n}}$，得 $197<200-2\sqrt{2}<\sum_{n=2}^{10000}\frac{1}{\sqrt{n}}<198$，因此 $198<\sum_{n=1}^{10000}\frac{1}{\sqrt{n}}<199$，得 $\left[\sum_{n=1}^{10000}\frac{1}{\sqrt{n}}\right]=198$。

解法：

先證明 $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\frac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$。

$$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

$$=\frac{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$$

$$=\frac{2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})}{(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})}$$

$=2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$，得證。

這個不等式也可以用逆推法證明：

$$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\frac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$$

$$\Leftrightarrow\frac{2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}}<\frac{2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}>\sqrt{n}>\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{n+1}>\sqrt{n}>\sqrt{n-1}。$$

其次求$\left[\sum_{n=1}^{10000}\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$。利用以上不等式，令 $n=2,3,\cdots\cdots,10000$，得

$$2(\sqrt{3}-\sqrt{2})<\frac{1}{\sqrt{2}}<2(\sqrt{2}-1)$$

$$2(\sqrt{4}-\sqrt{3})<\frac{1}{\sqrt{3}}<2(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+)\ 2(\sqrt{10001}-\sqrt{10000})<\frac{1}{\sqrt{10000}}<2(\sqrt{10000}-\sqrt{9999})$$

$$2(\sqrt{10001}-\sqrt{2})<\sum_{n=2}^{10000}\frac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{10000}-1)$$

得

$$2(\sqrt{10001}-\sqrt{2})<\sum_{n=2}^{10000}\frac{1}{\sqrt{n}}<2(100-1)$$

故

$$197<200-2\sqrt{2}<2(\sqrt{10001}-\sqrt{2})<\sum_{n=2}^{10000}\frac{1}{\sqrt{n}}<198。$$

$$198<\sum_{n=1}^{10000}\frac{1}{\sqrt{n}}<199\ 。$$

得 $$\left[\sum_{n=1}^{10000}\frac{1}{\sqrt{n}}\right]=198\ 。$$

討論：

一、最常見的錯誤是，學生在證明不等式時，使用“⇒”的符號，而不是“<=>”的符號。

高中的老師們，當你在教學生用逆推法證明恆等式或不等式時，你要知道你正在把一個非常有效非常重要的數學方法和科學方法教給學生。逆推法，從最後的結果推導出假設與結論的關係，雖然是希臘數學家 Euclid （歐基里德）、Diophantus、Apollonius、Pappus 所熟知的，但是直到文藝復興時期 Viète 才建立逆推法的方法論，他把這種方法叫做「分析」(analysis)，以別於大家所常用的演繹的方法，「綜合」(synthesis)。Viète 還把分析的方法大量的運用到各種數學問題。

最值得注意的是，Apollonius 運用逆推法討論圓錐曲線的切線與交點之後，他總是用綜合的方法，重新再寫一次。Apollonius 似乎不認為逆推法是一種合法的證明。用現代的觀點來看，如果每一個步驟都是可逆的，逆推法當然是合法的證明。

要點就在這裏。你願意不願意認為以下的寫法已經證明了 $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\dfrac{1}{\sqrt{n}}$？

$$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\frac{1}{\sqrt{n}}$$
$$\Rightarrow\ 2\sqrt{n(n+1)}-2n<1$$
$$\Rightarrow\ 2\sqrt{n(n+1)}<2n+1$$
$$\Rightarrow\ 4n(n+1)<(2n+1)^2$$
$$=4n^2+4n+1\text{，得證。}$$

高中的老師們，請設法讓你的學生避免寫出類似上面的「證明」。如何避免呢？第一個方法，應該用雙箭頭 <=> 表示可逆步驟時，就不要用單箭頭。第二個方法，要求學生聲明他是利用逆推法，因此每一個步驟都是可逆的。

高中的同學們，請不要以為這些要求是咬文嚼字，惹是生非的。茅山道士畫一道符咒，可能連他自己都明白那不過是鬼畫符，不代表任何意義。數學家就不是這樣，一個符號代表數學家心中的意圖，當他寫出一個符號，他已經用這個符號來宣告他正在進行的工作。因此當他寫出「$x>2\Rightarrow x\geqslant 2$」，他只表示從「$x>2$」這件事可以證明「$x\geqslant 2$」，他從沒有表示「從 $x\geqslant 2$」也可以證明「$x>2$」。

二、另一個常見的錯誤是學生想用「數學歸納法」來證明這些不等式，結果卻失敗了。

有一位同事說，學生會這麼迷信「數學歸納法」，老師要負一些責任，因為老師常常訓練學生一些無理性的制約反應，例如「看到 n，用數學歸納法」！

三、在求 $\left[\sum_{n=1}^{10000}\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$，學生常見的失誤是只求出 $198<\left[\sum_{n=1}^{10000}\frac{1}{\sqrt{n}}\right]<200$，因此得不到答案（見本題想法）。要彌補這個失誤，學生只有隨時養成細心的習慣：估計一個數值時，盡量使誤差愈小愈好，因此 $2(\sqrt{2}-1)<1<2$ 雖然是完全正確，可是卻是個陷阱。（1 還需要估計嗎？）

四、在求 $\left[\sum_{n=1}^{10000}\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ 時，另一個常見的錯誤是許多學生不知道那一項和那一項對消。因此，在

$$2(\sqrt{2}-1)<1<2(1-0)$$
$$2(\sqrt{3}-\sqrt{2})<\sqrt{2}<2(\sqrt{2}-1)$$
$$2(\sqrt{4}-\sqrt{3})<\sqrt{3}<2(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$2(\sqrt{10001}-\sqrt{10000})<\sqrt{10000}$$
$$<2(\sqrt{10000}-\sqrt{9999})$$

之中，學生甚至把第一式子最左邊的 $\sqrt{2}-1$ 和第二式子最右邊的 $\sqrt{2}-1$ 對消，把第二式子最左邊的 $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ 與第三式子最右邊的 $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ 對消。

為什麼會發生這種「張飛殺岳飛，殺得滿天飛」的怪事呢？我認為這是學生把數學看成一些毫無意義的符號的堆砌。因此，有些學生把數學課本打開，只看到各種奇形怪狀的符號在眼前跳舞，而不知道每一個數學定理都是人類心智的一次探險。睜開眼睛看一看，高中同學們，不要把

做數學問題當做一種機械化的無意識的動作。如果你看到萬里長城的圖片，不會認爲那只不過是一堆磚頭，你還會想到孟姜女的故事，還會想到兩千年前漢民族與異族的生存鬥爭，那麼你看到一個數學問題，爲什麼只能想到一堆毫無意義、毫無內在聯繫的符號？

試題三

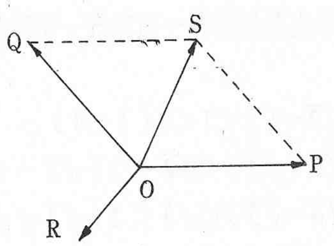
題目：

如果α，β，γ滿足$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$且$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0$，試證明$\text{con}\,2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma=0$且$\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=0$。

解法一：

若u，v，w代表平面上的三個非零的向量，我們要先證明：假設u，v，w的長度相等，則$u+v+w=0$的充份必要條件是u，v，w的夾角皆爲$\pm\frac{2\pi}{3}+2n\pi$。

現在在平面上把u，v，w三個向量標出來，如下圖。其中$\overrightarrow{OP}=u$，$\overrightarrow{OQ}=v$，$\overrightarrow{OR}=w$。



爲討論方便，我們的夾角只取特別角，不加$2n\pi$。$\angle POQ\neq 0$，π，否則$OR=0$，$2OP$。因此可作平行四邊形$OPSQ$，可知$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OS}$。

$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{OS}=-\overrightarrow{OR} \Rightarrow$

$OS=OR=OP=OQ$，且$PS=OQ \Rightarrow$

ΔOPS是正三角形$\Rightarrow \angle POS=\angle OSP=\frac{\pi}{3}$，

又$\angle OSP=\angle SOQ$，故$\angle POQ=\frac{2\pi}{3}$。同理可證$\angle QOR=\angle ROP=\frac{2\pi}{3}$。現在如果$\angle POQ=\angle QOR=\angle ROP=\frac{2\pi}{3}$，欲證$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=0$。

因爲 $OP=OQ$，故 $\angle OQP=\angle OPQ=\frac{\pi}{6}$

現在 $\angle SQP=\angle OPQ$，故 $\angle OQS=\frac{\pi}{3}$。

因爲 $QS=OP=OQ$，

故 $\angle QOS=\angle QSO=\frac{\pi}{3}$，

因此 ΔOQS是正三角形。得$OS=OQ$。

現在 $\angle QOS=\frac{\pi}{3}$，$\angle QOP=\frac{2\pi}{3}$，

故 S，O，R 共線。

已證 $OS=OQ=OR$，

得 $\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{OR}=0$。

故 $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=0$，

現在設 $u_1=(\cos\alpha, \sin\alpha)$，

$v_1=(\cos\beta, \sin\beta)$，

$w_1=(\cos\gamma, \sin\gamma)$。

則u_1，v_1，w_1 之長度皆爲1，其夾角爲$\beta-\alpha$，$\gamma-\beta$，$\alpha-\gamma$。

$$u_1+v_1+w_1=(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma,\ \sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)=0$$

故得 $\beta-\alpha=\gamma-\beta=\alpha-\gamma=\pm\frac{2\pi}{3}+2n\pi$。

故
$$2\beta-2\alpha=2\gamma-2\beta=2\alpha-2\gamma=\pm\frac{4\pi}{3}+2m\pi=\pm\frac{2\pi}{3}+2l\pi$$

但是$2\beta-2\alpha$，$2\gamma-2\beta$，$2\alpha-2\gamma$是向量$(\cos 2\alpha, \sin 2\alpha)$，$(\cos 2\beta, \sin 2\beta)$，$(\cos 2\gamma, \sin 2\gamma)$的夾角。

故 $(\cos 2\alpha, \sin 2\alpha)+(\cos 2\beta, \sin 2\beta)+(\cos 2\gamma, \sin 2\gamma)=0$

得 $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma=0$，

且 $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=0$。

解法二：

令 $Z_1=\cos\alpha+i\sin\alpha$，

$$Z_2 = \cos\beta + i\sin\beta\ ,$$

$$Z_3 = \cos\gamma + i\sin\gamma\ 。$$

由De Moivre（棣美弗）定理，得

$$Z_1^2 = \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha\ ,$$

$$Z_2^2 = \cos 2\beta + i\sin 2\beta\ ,$$

$$Z_3^2 = \cos 2\gamma + i\sin 2\gamma\ ,$$

$$\frac{1}{Z_1} = \cos\alpha - i\sin\alpha\ ,$$

$$\frac{1}{Z_2} = \cos\beta - i\sin\beta\ ,$$

$$\frac{1}{Z_3} = \cos\gamma - i\sin\gamma\ 。$$

$$\begin{aligned} & Z_1 + Z_2 + Z_3 \\ &= (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) \\ &\quad + i(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \\ &= (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) \\ &\quad - i(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) \\ &= 0 \end{aligned}$$

故
$$\begin{aligned} & Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 \\ &= (Z_1 + Z_2 + Z_3)^2 \\ &\quad - 2(Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1) \\ &= (Z_1 + Z_2 + Z_3)^2 \\ &\quad - 2Z_1Z_2Z_3\left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}\right) \\ &= 0\ , \end{aligned}$$

而
$$\begin{aligned} & Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 \\ &= (\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma \\ &\quad + i(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma) \end{aligned}$$

故得證。

讀者請注意，Z_1，Z_2 與 Z_3 是三次方程式 $X^3 - a = 0$ 的三個根，其中 $a = Z_1Z_2Z_3$ 。由此可證明 $\cos n\alpha + \cos n\beta + \cos n\gamma = \sin n\alpha + \sin n\beta + \sin n\gamma = 0$ ，其中n是任意不被3整除的整數。

解法三：

設 θ_1，θ_2，θ_3 爲任意三角，先證

$$\begin{aligned} & \sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \sin\theta_3 \\ & - \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ &= 4\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_2+\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_3+\theta_1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \sin\theta_3 \\ & - \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ &= 2\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2} \\ &\quad - 2\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2+2\theta_3}{2} \\ &= 2\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\left(\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2} - \cos\frac{\theta_1+\theta_2+2\theta_3}{2}\right) \\ &= 4\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_2+\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_3+\theta_1}{2}\ 。 \end{aligned}$$

同理可證

$$\begin{aligned} & \cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cos\theta_3 \\ & + \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ &= 4\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_2+\theta_3}{2}\cos\frac{\theta_3+\theta_1}{2} \end{aligned}$$

現在我們要證明，若 $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0$ 且 $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 0$ ，則 $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 0$ 。

但是

$$\begin{aligned} & \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \cos(\alpha + \beta + \gamma) \\ &= 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}\ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 0 \\ \Leftrightarrow\ & -\sin(\alpha + \beta + \gamma) \\ &= 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}\ 。 \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} & -\sin 2(\alpha + \beta + \gamma) \\ &= -2\sin(\alpha+\beta+\gamma)\cos(\alpha+\beta+\gamma) \\ &= 2\cdot 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2} \\ &\quad \cdot 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2} \\ &= 4\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)\sin(\gamma+\alpha)\ , \end{aligned}$$

而
$$\begin{aligned} & -\sin 2(\alpha + \beta + \gamma) \\ &= 4\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)\sin(\gamma+\alpha) \\ \Leftrightarrow\ & \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 0 \end{aligned}$$

故得證。

現在令

$$\alpha'=\frac{\pi}{4}-\alpha,\ \beta'=\frac{\pi}{4}-\beta,\ \gamma'=\frac{\pi}{4}-\gamma,$$

代入 $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$

$=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0$。

得 $\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha'+\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha'\right)$

$+\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\beta'+\sin\frac{\pi}{4}\sin\beta'\right)$

$+\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\gamma'+\sin\frac{\pi}{4}\sin\gamma'\right)$

$=0$，

且 $\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha'-\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha'\right)$

$+\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\beta'-\sin\frac{\pi}{4}\cos\beta'\right)$

$+\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\gamma'-\cos\frac{\pi}{4}\sin\gamma'\right)$

$=0$

整理上式得

$\cos\alpha'+\cos\beta'+\cos\gamma'$

$=\sin\alpha'+\sin\beta'+\sin\gamma'$

$=0$

由以上討論，知

$\sin 2\alpha'+\sin 2\beta'+\sin 2\gamma'=0$

把 $2\alpha'=\frac{\pi}{2}-2\alpha,\ 2\beta'=\frac{\pi}{2}-2\beta,$

$2\gamma'=\frac{\pi}{2}-2\gamma$

代入上式，得

$\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma=0$

解法四：

$\cos\alpha+\cos\beta=-\cos\gamma$ ……(1)

$\sin\alpha+\sin\beta=-\sin\gamma$ ……(2)

$(1)^2+(2)^2$，

$$\cos(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}$$

$(1)^2-(2)^2$，

$\cos 2\alpha+\cos 2\beta+2\cos(\alpha+\beta)=\cos 2\gamma$。

$(1)\times(2)$，

$\sin 2\alpha+\sin 2\beta+2\sin(\alpha+\beta)=\sin 2\gamma$。

$\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma$

$=\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\{\cos 2\alpha+\cos 2\beta$

$+2\cos(\alpha+\beta)\}$

$=2\{\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos(\alpha+\beta)\}$

$=2\{2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$

$+\cos(\alpha+\beta)\}$

$=2\{\cos(\alpha+\beta)-\frac{1}{2}+\cos(\alpha+\beta)\}$

$=0$。

$\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma$

$=2\{\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin(\alpha+\beta)\}$

$=2\{2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$

$+\sin(\alpha+\beta)\}$

$=2\{2\sin(\alpha+\beta)\cdot-\frac{1}{2}+\sin(\alpha+\beta)\}$

$=0$

解法五：

$\cos\beta+\cos\gamma=-\cos\alpha$ ……(1)

$\sin\beta+\sin\gamma=-\sin\alpha$ ……(2)

$(1)^2+(2)^2$

$$\cos(\beta-\gamma)=-\frac{1}{2}$$

得 $\beta-\gamma=\pm\frac{2\pi}{3}+2n\pi$

即 $2(\beta-\gamma)=\pm\frac{4\pi}{3}+4n\pi$

n, l, m 爲整數。

同理 $2(\gamma-\alpha)=\pm\frac{4\pi}{3}+4l\pi$

$2(\alpha-\beta)=\pm\frac{4\pi}{3}+4m\pi$

故 $P(\cos 2\alpha, \sin 2\alpha)$，$Q(\cos 2\beta, \sin 2\beta)$，$R(\cos 2\gamma, \sin 2\gamma)$ 三等分單位圓。

因此，ΔPQR 是正三角形，且原點 0 是其外心。

正三角形的外心與重心重合，而重心是

$$\left(\frac{\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma}{3},\ \frac{\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma}{3}\right)。$$

故 $\left(\dfrac{\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma}{3},\ \dfrac{\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma}{3}\right)$

$=(0,0)$。

得 $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma$

$=\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma$

$=0$

討論：

一、這個題目學生完全做對的極少，據我估計，完全做對的學生不會超過二十個。

但是還是有許多學生在卷面上大作其文章，眞是滿紙荒唐言。造成閱卷極大的困擾。

台灣的聯考是考生一生前途的一個轉捩點，我們沒有權利要求考生不可以在考卷上面塗鴨，高中老師鼓勵學生在證明題計算題盡量寫也是合情合理的。但是我寧願勸告學生盡量寫，不過只寫正確的，不要寫一些一看就知道是錯誤的敘述。

二、有一些考生證明這一題，完全沒有「方向感」。他拿起已知條件，隨便平方，加，減，乘，除。湊出一些他自己都不知道有什麼用處的結果。

例如，有一個考生湊出

$$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}$$

卻看不出它的意義

$$\left(\cos(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2},\ \alpha-\beta=\pm\frac{2\pi}{3}+2n\pi\right)$$

又繼續玩起他的符號遊戲。

要避免這個錯誤，我認爲，高中老師平時要培養學生分析問題的能力。接到一個問題，先不要急著動手，莽莽撞撞的一頭撞進去只會撞得頭破血流，先觀察問題，從各個不同的角度去觀察，然後再動手。

三、有一個學生從 $Z_1+Z_2+Z_3=0$，就接著說「從分圓公式，得 Z_1，Z_2，Z_3 三等分單位圓」。

我到現在爲止，還不知道什麼是「分圓公式」。不過這是其次的問題，我認爲最重要的一件事是，高中的老師要提醒你們的學生（尤其是好學生），在閱卷時，一個閱卷先生所面對的是幾百個陌生的學生，他不知道這些學生的過去與未來，他所知道的只是這幾百份考卷。因此所有的事情都由卷面上的內容來決定，學生要權衡輕重，那些事情一定要說明，那些事情可以省略不寫。人和人之間總有某些默契，這些標準並不是那麼不可捉摸的。就好像和別人談話，你一定知道那些事情必須詳細說明，那些事情輕描淡寫即可，冷僻的字眼不要用。寫考卷也是如此。

四、許多學生在證明這一題時，都想利用三角函數和差化積的公式，可是他們把公式背錯了。我提供一個方法幫助學生很快的自己導出這些公式。

已知

$$e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\cdot e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}=e^{i\theta_1}\quad\cdots\cdots(1)$$

$$e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\cdot e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}=e^{i\theta_2}\quad\cdots\cdots(2)$$

利用 Euler 公式

$$\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta},$$

(1)與(2)式變成

$$\left(\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}+i\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}+i\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)=\cos\theta_1+i\sin\theta_1\quad\cdots\cdots(3)$$

$$\left(\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}+i\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\left(\cos\frac{-\theta_1+\theta_2}{2}+i\sin\frac{-\theta_1+\theta_2}{2}\right)=\cos\theta_2+i\sin\theta_2\quad\cdots\cdots(4)$$

(3)+(4)

$$2\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}+2i\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}=(\cos\theta_1+\cos\theta_2)+i(\sin\theta_1+\sin\theta_2)$$

(3)−(4)

$$-2\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}+2i\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

$$= (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) + i(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)$$

比較以上二式之實數部份與虛數部份。

請同學注意，在高中的數學課程，是利用幾何圖形的關係證明和差化積公式，然後利用這些公式驗證 Euler 公式滿足一般的指數律，即(1)與(2)式。因此以上的「證明」並不能算和差化積公式的證明，以上證明只是幫助同學記憶和差化積公式。

試題四

題目：

繪圖表示不等式 $|x^2+y^2-169|-6x+8y \leqslant 130$ 的範圍，並求它的面積。

想法：

當然先想辦法把絕對值的符號丟掉。

解法：

若 $x^2+y^2-169 \geqslant 0$，

則 $|x^2+y^2-169| = x^2+y^2-169$

已給的不等式變成

$$x^2+y^2-169-6x+8y \leqslant 130\text{。}$$

若 $x^2+y^2-169 < 0$，

則 $|x^2+y^2-169| = 169-x^2-y^2$

已給的不等式變成

$$169-x^2-y^2-6x+8y \leqslant 130\text{。}$$

因此已知不等式是以下兩組不等式的聯集，

$$(\text{I})\begin{cases} x^2+y^2-169 \geqslant 0 \\ x^2+y^2-169-6x+8y \leqslant 130 \end{cases}$$

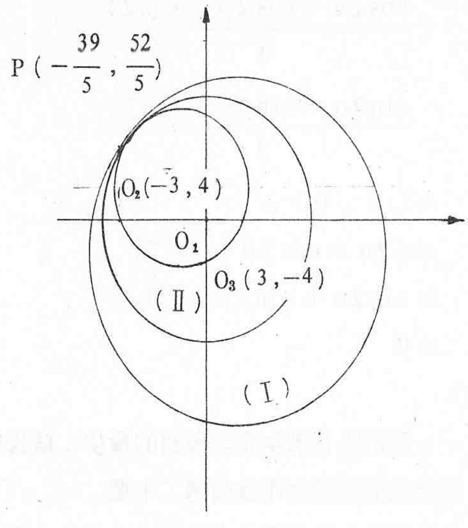
$$(\text{II})\begin{cases} x^2+y^2-169 < 0 \\ 169-x^2-y^2-6x+8y \leqslant 130\text{。} \end{cases}$$

整理以上兩組不等式，得

$$(\text{I})\begin{cases} x^2+y^2 \geqslant (13)^2 \\ (x-3)^2+(y+4)^2 \leqslant (18)^2 \end{cases}$$

$$(\text{II})\begin{cases} x^2+y^2 < (13)^2 \\ (x+3)^2+(y-4)^2 \geqslant (8)^2 \end{cases}$$

圖形如右上：



因為 $P(-\frac{39}{5}, \frac{52}{5})$ 在這三個圓的圓周上，且

$$O_1P - O_2P = 13-8 = 5 = O_1O_2,$$

$$O_3P - O_1P = 18-13 = 5 = O_3O_1,$$

故 P, O_1, O_2, O_3 共線，因此這三個圓相切於 P。

$$\text{面積} = (18^2\pi - 13^2\pi) + (13^2\pi - 8^2\pi) = 260\pi$$

討論：

一、這個題目暴露了一件事，許多高中學生並不瞭解絕對值。

有些學生一接到這個不等式，就繼續寫

$$x^2+y^2-169-6x+8y \leqslant 130$$

照這些學生看來，聯招會的命題先生每一個都是大笨蛋，絕對值根本就是一個多餘的符號，有沒有都無關緊要。

還有一些學生這樣寫，

若 $|x^2+y^2-169| \geqslant 0$，

則 $x^2+y^2-169-6x+8y \leqslant 130$；

若 $|x^2+y^2-169| < 0$，

則 $-(x^2+y^2-169)-6x+8y \leqslant 130$

我不相信這些學生是一時慌張，才寫出 $|x^2+y^2-169| < 0$ 的這種天才命題。我認為這些學生從來就沒有瞭解過絕對值的定義。

我相信所有的學生都知道 $|5| = |-5| = 5$，但是並不是所有的學生都瞭解 $|f(x)|$ 是多少。

從 $|-5|$ 到 $|f(x)|$ 固然不是一蹴即至的，但是也不是遙不可及的。高中的老師只要多舉一些例子，如 $|x|$，$|x^2-9|$，$|\sin x|$，$|[x]|$，我相信學生不難瞭解絕對值 $|f(x)|$ 的意義。

我有時候覺得，寧願學生不知道｜$f(x)$｜是多少，我也不願看到學生寫出｜$f(x)$｜<0 的式子。

學生會寫出｜$f(x)$｜<0 的式子，反映出學生根本不想去瞭解數學的內容，只是一味生吞活剝的死啃數學的形式。

二、還有的學生這樣做：

$$|x^2+y^2-169|-6x+8y\leqslant 130,$$

$$|x^2+y^2-169|\leqslant 6x-8y+130,$$

$$(x^2+y^2-169)^2\leqslant(6x-8y+130)^2$$

$$(x^2+y^2-169)^2-(6x-8y+130)^2\leqslant 0$$

$$(x^2+y^2-169-6x+8y-130)$$

$$(x^2+y^2-169+6x-8y+130)\leqslant 0$$

結果得到同樣的答案。

事實上這是不可以的。

這樣做會引入

$$|x^2+y^2-169|\leqslant-(6x-8y+130)$$

的圖形。幸好

$$|x^2+y^2-169|\leqslant-(6x-8y+130)$$

的圖形只是一個點 $\left(-\dfrac{39}{5},\dfrac{52}{5}\right)$，並不影響大局。

同學要知道，如果用以上的方法解不等式

$$|x^2+y^2-169|+6x-8y\leqslant-130,$$

就要出亂子了。同學也不妨用以上的方法解不等式 $|x^2-y^2-169|-6x+8y\leqslant 130$ 看看。

三、畫圖的部份是最使閱卷先生氣短的。

許多學生努力把這三個圓畫得很圓很圓，卻忘記討論這三個圓的相關位置：純包含，相切，相交，或相離。

高中的老師們，你一定唸過微積分的。你記不記得你的微積分老師要求你用微分的方法（求極大、極小、函數增減性質、反曲點、漸近線、函數凸凹性質）去畫函數圖形？你有沒有這種經驗，你描了十幾個點，不過沒有求極大値，別人求極大値，只描兩三個點，結果你的成績比他差？你想過這個原因嗎？

坦白的講，如果沒有器械幫助，不管你描幾百個點，你永遠畫不出一個「正確」的幾何圖形。不相信的話，畫個拋物線看看。

但是這並不表示我們不能掌握函數圖形的幾何性質。我們可以用綜合幾何、解析幾何或微積分的方法，探討平面圖形的各種幾何性質。

事實上，在大多數場合，瞭解函數圖形的幾何性質比「正確」的畫出函數圖形還重要。

對於高中的老師，我想建議你們多訓練學生畫圖，特別強調要畫出圖形的幾何特性。有些老師只有在教函數圖形那一節時，才認眞畫幾個圖；其他場合，就隨便畫個邋邋遢遢的圖。這對學生會有很不好的影響：學生一方面會認爲畫一個「正確」的函數圖形是很困難的，另一方面又會以爲畫函數圖形是不重要的。

有些學生畫出三個相切圖，卻沒有標出那些部份才是我們需要的。高中老師們，培養學生正確的畫圖習慣是非常重要的。數學的對象不外是「形」與「數」。學生如果不能正確處理圖形，他的數學知識也就所剩無幾了。

後記：本文初稿曾經張國男先生指正，特此致謝。

（本文作者現任敎於台大數學系）