從「七十一年聯考數學試題」談數學教育之改革

王秋夫

鈴聲響起，陪考的家長及老師不安的心弦隨之拉緊；直等看到考生帶著笑容走出考場，緊張的情緒才鬆懈下來。考生的笑容似乎暗示著試題或許不難，及至下午補習班發出解答，證實了這個想法。

今年數學科由於首度出現計算及證明題，老師們似乎都無法把定方向，給學生適當的考前指導。考完後從試題的深度看來，倒覺得是一份較易被接受的試題。除了第一册及第六册部分出題較少外，其餘部分已略具平均，且沒有怪題出現，只是考古題稍多，是較爲人詬病的一點。由題目的取材，考生應能得到些啓示，只要把課本和參考書算熟，以前考過的題目看一次，就能拿高分，不需要拚命鑽牛角尖去讀那些模擬考題或日本大學試題。筆者個人認爲它是聯考有史以來，較爲平實而易爲共認的一份優良試題。

(一)茲先將今年聯考各冊出題份量分析如下

	第一册	第二册	第三册	第四册	第五册	第六册
甲丙組	5	27	22	20	17	9
乙丁組	5	27	12	20	27	9

其中證明題第一題實際上是解對數不等式之考題，故一半視爲第二册，一半視爲第五册考題，證明題第三題（甲丙組）三角問題，可用三角之和差化積及複角公式解之，亦可用複數解之（第四册部分），在此歸爲第三册考題計分。從試題分數所佔之比例看來，似乎仍維持歷年來較偏重第二、三、四、五册之傳統。

(二)今年試題之特色

1. 難易度較爲適中，沒有使人做不下去之試題。
2. 考古題很多，但變化較爲漂亮。
3. 題目語意非常淸楚，沒有含糊不淸之試題。
4. 各册分佈比例較往年平均，但出題範圍仍不夠普及，過份注重圖形及方程式。
5. 基本分數較去年高，且由淺入深排列，可消除學生考場上恐懼之心理。
6. 證明題之證法不止一種，容易造成給分上的困擾。
7. 部分題目仍可用反代法得到答案，是唯一之缺憾。
8. 甲丙組及乙丁組試題幾乎相同，似乎不盡合理。對乙丁組而言顯然稍深了些，且第三題證明超出課程標準。

㈢試題解答研究

第一部份：選擇題

㈤ 設$f(x)=x^4+7x^3+11x^2-3x-18$ 求 $S=f(f(1))=?$

1. (A) $|S|\in\{2,4,6,8\}$ (B) $|S|\in\{2,3,6,7,\}$
(C) $|S|\in\{4,5,6,7\}$ (D) $S<0$
(E)以上皆非

解：1°

$$\begin{array}{r|l} 1+7+11-\ 3-18 & 1 \\ +1+\ 8+19+16 & \\ \hline 1+8+19+16,-2 & \end{array} \qquad \therefore f(1)=-2,$$

$$\begin{array}{r|l} 1+7+11-3-18 & -2 \\ -2-10-2+10 & \\ \hline 1+5+\ 1-5,-8 & \end{array}$$

$f(-2)=-8$，
$\therefore S=f(f(1))=f(-2)=-8$
$\therefore |S|=8$， $S<0$ 而選(A)

註：1° 此爲一考古題之推演，64 年曾考過$f(x)=x^7-50x^5+6x^4+4x^3+25x^2-30x-11$，則$f(7)$ (A)是一個偶數 (B)是一個負數 (C)是一個質數 (D)可被 5 整除 (E)可被 3 整除

㈦ 以方程式$x^3-7x+6=0$的三根α，β，γ之平方根，得一新方程式$x^3+lx^2+mx+n=0$ 試求 l，m，n。

3. (A) $|l|=12$ (B) $|l|=14$ (C) $|l|=22$
(D) $|l|=36$ (E) $l<0$

4. (A) $|m|=12$ (B) $|m|=36$ (C) $|m|=42$
(D) $|m|=49$ (E) $m<0$

5. (A) $|n|=28$ (B) $|n|=36$ (C) $|n|=48$
(D) $|n|=49$ (E) $n<0$

解：1° 由根與係數關係知 $\alpha+\beta+\gamma=0$， $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-7$， $\alpha\beta\gamma=-6$

2° $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=0-2(-7)=14$

$\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=49-0=49$

$\alpha^2\beta^2\gamma^2=(-6)^2=36$

3° 故所求之方程式爲 $x^3-14x^2+49x-36=0$ $\therefore l=-14,\ m=49,\ n=-36$

$\therefore |l|=14$， $|m|=49$， $|n|=36$

4° 故 3. 選(B)(E) 4. 選(D) 5. 選(B)(E)

註：1° 此亦爲考古題之推演，60 年夜聯曾考過，設α，β，γ爲方程式$18x^3+9x^2+2x+1=0$之三根，$a=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}$，$b=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$，$c=\alpha\beta\gamma$，則

(A) $a=-2$，$b=\dfrac{1}{9}$，$c=-\dfrac{1}{18}$ (B) $a=-\dfrac{1}{2}$，$b=9$，$c=-1$

(C) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\dfrac{1}{36}$ (D) $\alpha+\beta+\gamma>0$

2° 最近幾年來之聯考很重視

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

$$=\frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]$$

$$=(x+y+z)[(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)]$$

及 $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2\pm 2xy\pm 2yz+2zx$

及 $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$ 之應用。

(丙) 採用極坐標 (γ,θ)，三點 $(5,\frac{\pi}{3})$，$(3,\frac{10}{18}\pi)$ 及 $(3.6,\frac{-1}{18}\pi)$，所成三角形之面積爲何？

取兩位有效數字（其下四捨五入），將此面積記成 $l+\frac{m}{10}$ $(l, m\in \mathbf{A})$ 求 l，m計算時可使用 $\sin\frac{4\pi}{18}=0.6428$，$\sin\frac{7}{18}\pi=0.9397$

5. (A) $l\in\{1,3,5,7,9\}$ (B) $l\in\{2,6,3,7\}$
   (C) $l\in\{4,5,6,7,8\}$ (D) $l\in\{0,8,9\}$

6. (A) $m\in\{1,3,5,7,9\}$ (B) $m\in\{2,3,6,7\}$
   (C) $m\in\{4,5,6,7,8\}$ (D) $m\in\{0,8,9\}$

解： 1° 代入公式 $A(\gamma_1,\theta_1)$，$B(\gamma_2,\theta_2)$，$C(\gamma_3,\theta_3)$

$$\Rightarrow\ a\Delta ABC=\frac{1}{2}\left|\gamma_1\gamma_2\sin(\theta_1-\theta_2)+\gamma_2\gamma_3\sin(\theta_2-\theta_3)+\gamma_3\gamma_1\sin(\theta_3-\theta_1)\right|$$

2° $$a\Delta ABC=\frac{1}{2}\left|5\cdot 3\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{10}{18}\pi\right)+3.6\times 3\cdot\sin\left(\frac{10}{18}\pi+\frac{\pi}{18}\right)\right.$$

$$\left.+3.6\times 5\sin\left(\frac{-\pi}{18}-\frac{\pi}{3}\right)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|-15\sin\frac{4\pi}{18}+10.8\sin\left(\frac{11}{18}\pi\right)-18\sin\frac{7\pi}{18}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|15\sin\frac{4\pi}{18}-10.8\sin\frac{7\pi}{18}+18\sin\frac{7\pi}{18}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|15\times 0.6428+7.2\times 0.9397\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|9.64+6.7658\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|16.4\right|=8.205\doteq 8.21$$

$$=8\times\frac{2}{10}$$

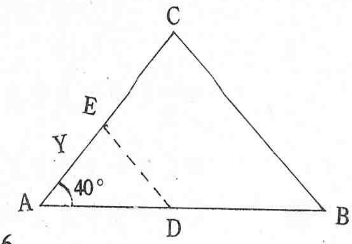
3° $\therefore l=8$，$m=2$， 故 5. 選(C)(D) 6. 選(B)

註： 1° 此一考題，代公式即可得分，亦可化成直角坐標再做。

(丁) 已知三角形 ABC 之邊 $\overline{AB}=9$，$\overline{AC}=8$，$\angle A=40°$，在 $\overline{AB}$ 上取一點 D，在 $\overline{AC}$ 上取一點 E，而 $\overline{DE}$ 把 ΔABC 的面積等分爲二，試問：若要求 $\overline{DE}$ 之長度爲最短，$\overline{AD}$ 及 $\overline{AE}$ 之值應爲何？

7. $\overline{AD}=$ (A) 3 (B) 4 (C) 4.5 (D) 6 (E) 7.5

8. $\overline{AE}=$ (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 4.5 (E) 6



解： 1° 設 $AD=x$， $AE=y$

則 $a\Delta ADE=\frac{1}{2}a\Delta ABC$

$\therefore\ \frac{1}{2}xy\sin 40^\circ=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 8\sin 40^\circ\Rightarrow xy=36$

由餘弦定律知及算術平均數大於等於幾何平均數知

2° $DE^2=x^2+y^2-2xy\cos 40^\circ\geqslant 2xy-2xy\cos 40^\circ$ （$\because x^2+y^2\geqslant 2\sqrt{x^2y^2}=2xy$）

$=2xy(1-\cos 40^\circ)=4xy\sin^2 20^\circ=144\sin^2 20^\circ$

3° 等號在 $x=y=6$ 時 DE 有最小值爲 $12\sin 20^\circ$

4° 故此時 $\overline{AD}=6$，$\overline{AE}=6$

$\therefore$ 7.選(D) 8.選(E)

註： 1° 此爲餘弦定律及算術平均數大於或等於幾何平均數之應用，簡單而巧妙，爲一很漂亮之考題。

(戊) 將坐標軸旋轉 θ 角（$0<\theta<\frac{\pi}{2}$）可以把二次曲線 $4x^2+4xy+y^2-6x-3y+2=0$ 之方程式化爲標準形式求出 $\tan\theta$ 以及這個標準形式。

9. $\tan\theta=$ (A)$\frac{1}{3}$ (B)$\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2 (E) 3

10. 這曲線是 (A)橢圓（非退化） (B)雙曲線（非退化） (C)拋物線（非退化） (D)相交兩直線 (E)以上皆非

解： 1° 由 $\cot 2\theta=\frac{4-1}{4}=\frac{3}{4}$， $\tan 2\theta=\frac{4}{3}=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\Rightarrow 4-4\tan^2\theta=6\tan\theta$

2° $2\tan^2\theta+3\tan\theta-2=0\ \Rightarrow\ (\tan\theta+2)(2\tan\theta-1)=0$

3° $\tan\theta=-2$（不合） 或 $\tan\theta=\frac{1}{.2}$ （$\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}$）

4° $\because\ \delta=4^2-4\cdot 1=0$ 且 $4x^2+4xy+y^2-6x-3y+2=0$

可分解成 $(2x+y-1)(2x+y-2)=0$

表平行二直線 $2x+y-1=0$， $2x+y-2=0$

5° 故 9.選(B) 10.選(E)

註： 1° 此爲一考古題之結合：

(1) 70 年曾考過：給橢圓 $7x^2-6\sqrt{3}\,xy+13y^2-16=0$ 試將坐標軸繞原點轉動 θ 角（$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$），使 x 軸與橢圓之長軸重合，又設橢圓至原點之最遠距離爲 a，最近距離爲 b， $a,b\in\mathbf{A}$，求 θ，a，b

(2) 57 年考過：方程式 $x^2+4xy+4y^2-2x-4y-3=0$ 之圖形是

(A)橢圓 (B)雙曲線 (C)兩平行直線之聯集

(D)兩相交直線之聯集 (E)以上皆非

(己) 試求 $\frac{x}{a}+\frac{a}{x}=\frac{y}{b}+\frac{b}{y}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ 的實解，解出後再用 $a=8$，$b=27$ 代入，設此時有 N 組不同解（x_i，y_i），$i=1,2,\cdots N$（$N>1$），將這 N 組不同解依字典排法排列，即要求 $x_i\leq x_{i+1}$（x 自小到大排列），而當 $x_i=x_{i+1}$ 時，要求 $y_i<y_{i+1}$ 試問 $N=$？第二組解（x_2，y_2）爲何？

11. (A)$N=2$ (B)$N=3$ (C)$N=4$ (D)$N=6$ (E)$N=8$

12. $x_2=$ (A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 12 (E) 18

13. $y_2=$ (A) 6 (B) 8 (C) 9 (D) 12 (E) 18

解： 1° 由 $\frac{x}{a}+\frac{a}{x}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{x}{a}-\frac{x}{y}=\frac{y}{x}-\frac{a}{x} \Rightarrow \frac{xy-ax}{ay}=\frac{y-a}{x}$

$\Rightarrow x^2(y-a)=ay(y-a) \Rightarrow (y-a)(x^2-ay)=0$

$\Rightarrow y=a$ 或 $x^2=ay$

2° 由 $\frac{y}{b}+\frac{b}{y}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{y}{b}-\frac{y}{x}=\frac{x}{y}-\frac{b}{y} \Rightarrow \frac{xy-by}{bx}=\frac{x-b}{y}$

$\Rightarrow (x-b)(y^2-bx)=0 \Rightarrow x=b$ 或 $y^2=bx$

3° 以 $a=8$，$b=27$ 代入得四組解為

① $\begin{cases} x=27 \\ y=9 \end{cases}$ ② $\begin{cases} x=27 \\ x^2=8y \end{cases} \Rightarrow x=27$，$y=\frac{27^2}{8}=\frac{629}{8}$

③ $\begin{cases} 27x=y^2 \\ y=8 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{64}{27}$，$y=8$

④ $\begin{cases} y^2=27x \\ x^2=8y \end{cases} \Rightarrow (\frac{y}{x})^2=\frac{27}{8}(\frac{x}{y}) \Rightarrow \frac{y^3}{x^3}=\frac{27}{8}$

$\Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{3}{2} \Rightarrow y=\frac{3}{2}x$ 代入 $y^2=27x$

得 $\frac{9}{4}x^2=27x \Rightarrow x=27\times\frac{4}{9}=12$，$\therefore y=\frac{3}{2}\cdot 12=18$

4° ∴依大小順序排其四組解為 $(\frac{64}{27}, 8)$，$(12, 18)$，$(27, 9)$，$(27, \frac{629}{8})$

$\therefore x_2=12$，$y_2=18$

5° 故11.選(C) 12.選(D) 13.選(E)

註： 1° 此題之12，13可用代答法求得，65 年夜聯有類似考題：

求解聯立方程式 $\begin{cases} x^2=3y \\ y^2=3x \end{cases}$

乙丁組 (乙) 計算方程式 $x^3-7x+6=0$ 的根（小數點以下四捨五入），設為 α，β，γ 且 $\alpha<\beta<\gamma$，則

2. (A) $|\alpha|\in\{1,3,5,7,9\}$ (B) $|\alpha|\in\{2,3,6,7\}$
(C) $|\alpha|\in\{4,5,6,7,8\}$ (D) $|\alpha|\in\{0,8,9\}$
(E) $\alpha<0$

3. (A) $|\beta|\in\{1,3,5,7,9\}$ (B) $|\beta|\in\{2,3,6,7\}$
(C) $|\beta|\in\{4,5,6,7,8\}$ (D) $|\beta|\in\{0,8,9\}$
(E) $\beta<0$

4. (A) $|\gamma|\in\{1,3,5,7,9\}$ (B) $|\gamma|\in\{2,3,6,7\}$
(C) $|\gamma|\in\{5,5,6,7,8\}$ (D) $|\gamma|\in\{0,8,9\}$
(E) $\gamma<0$

解：1°

$$\begin{array}{l} 1+0-7+6 \ \underline{\lfloor 1} \\ \quad +1+1-6 \\ \hline 1+1-6\ ,\ 0 \ \underline{\lfloor 2} \\ \quad +2+6 \\ \hline 1+3\ ,\ 0 \ \underline{\lfloor -3} \\ \quad -3 \\ \hline 1\ ,\ 0 \end{array}$$

$\therefore (x-1)(x-2)(x+3)=0 \Rightarrow x=1,2,-3$

$\alpha<\beta<\gamma$

$\therefore \alpha=-3,\quad \beta=1,\quad \gamma=3$

2° 故 2.選(A)(B)(E) 3.選(A) 4.選(B)

註：1° 此亦為一考古題 70 年曾考過求 $f(x)=6x^4-29x^3+26x^2+14x-12=0$ 之有理根

乙丁組 (戊) 若與拋物線 $y=3x^2-2x+1$ 相切且與 $x+4y+3=0$ 正交之直線為 $y=mx+l$，則

9. (A) $|m|\in\{1,3,5,7,9\}$ (B) $|m|\in\{2,3,6,7\}$
(C) $|m|\in\{4,5,6,7,8\}$ (D) $|m|\in\{0,8,9\}$
(E) $m<0$

10. (A) $|l|\in\{1,3,5,7,9\}$ (B) $|l|\in\{2,3,6,7\}$
(C) $|l|\in\{4,5,6,7,8\}$ (D) $|l|\in\{0,8,9\}$
(E) $l<0$

解：1° $y=mx+l$ 與 $y=3x^2-2x+1$ ⇒相切 $\therefore 3x^2-(2+m)x+(1-l)=0$ 之 $D=0 \Rightarrow (2+m)^2-4\cdot3(1-l)=0 \Rightarrow m^2+4m+12l-8=0$……①

2° 因 $x+4y+3=0$ 與 $mx-y+l=0$ 正交

$\therefore \cos\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{m-4}{\sqrt{1+4^2}\ \sqrt{m^2+1}}=0$ $\therefore m=4$ 代入①得 $l=-2$

3° 故 9.選(C) 10.選(B)(E)

註：1° 此為考古題之結合，51 年曾考過若拋物線 $y=ax^2+bx+c$ 與 $x-y=1$，$3x-y=2$，$5x-y=4$ 所表直線相切，求 a,b,c 之值。53 年考過，求 $2x^2-7xy+3y^2+3x+y=2$ 所表二直線之交角為何？

第二部份：非選擇題

一、設從區間〔$-5,5$〕$=\{x:-5\le x\le 5\}$ 中任意選出一個實數 x

(1) 試求 $\log_{14}(x^3-5x+12)<1$ 之機率 p

(2) 求 $\log_{14}(x^2-5x+12)>1$ 之機率 Q （71聯）

解：(1) 已知 $x^3-5x+12>0 \Rightarrow (x+3)(x^2-3x+4)>0$

$\because x\in R,\quad x^2-3x+4>0 \Rightarrow x>-3$ ……①

$$\begin{array}{l} 1+0-5+12 \ \underline{\lfloor -3} \\ \quad -3+9-12 \\ \hline 1-3+4\ ,\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 1+0-5-2 \ \underline{\lfloor -2} \\ \quad -2+4+2 \\ \hline 1-2-1\ ,\ 0 \end{array}$$

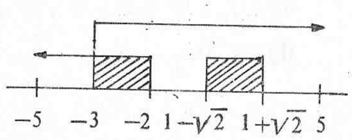
又 $\log_{14}(x^3-5x+12)<1 \Rightarrow x^3-5x+12<14' \Rightarrow x^3-5x-2<0$

$\Rightarrow (x+2)(x^2-2x-1)<0 \Rightarrow (x+2)[x-(1+\sqrt2)][x-(1-\sqrt2)]<0$

$\Rightarrow 1-\sqrt2<x<1+\sqrt2$ 或 $x<-2$ ……②

由①②及 $-5\le x\le 5$ 得 $-3<x<-2$

或 $1-\sqrt2<x<1+\sqrt2$



$\therefore$所求之機率為　$p=\dfrac{[-2-(-3)]+[(1+\sqrt{2})-(1-\sqrt{2})]}{5-(-5)}$

$=\dfrac{1+2\sqrt{2}}{10}$

(2)　由已知　$x^3-5x+12>0 \;\Rightarrow\; (x+3)(x^2-3x+4)>0$

$\because x\in R$，$x^2-3x+4>0 \;\Rightarrow\; x>-3$　………①

又　$\log_{14}(x^3-5x+12)>1 \;\Rightarrow\; x^3-5x+12>14 \;\Rightarrow\; x^3-5x-2>0$

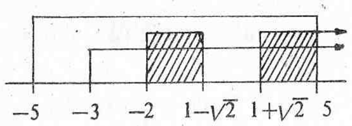
$\Rightarrow\; (x+2)[x-(1+\sqrt{2})][x-(1-\sqrt{2})]>0$

$\Rightarrow\; x>1+\sqrt{2}$　或　$-2<x<1-\sqrt{2}$　………②

由①②知$-5\leq x\leq 5$得$-2<x<1-\sqrt{2}$或$1+\sqrt{2}<x<5$

故所求之機率　$Q=\dfrac{[5-(1+\sqrt{2})]+[(1-\sqrt{2})-(-2)]}{10}$

$=\dfrac{7-2\sqrt{2}}{10}$



註：1°　此亦為考古題之推演，63年夜聯曾考過不等式 $\log_{10}(x-3)+\log_{10}x<1$ 之解集合，及68.70.64.年聯考幾何機率為近年來之熱門考題。

二、試證明：$\forall n\in N\quad 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$恒成立，再計算

$\left[\sum_{n=1}^{10000}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$，此處高斯符號$[x]$表示正實數$x$的整數部份

證：1°　$\forall n\in N\quad \sqrt{n-1}<\sqrt{n}<\sqrt{n+1}$

$\Rightarrow\; \sqrt{n-1}+\sqrt{n}<\sqrt{n}+\sqrt{n}<\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$

$\Rightarrow\; \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\dfrac{1}{2\sqrt{n}}<\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$

$\Rightarrow\; 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$

2°　$\because$　$1 \leq 1 \leq 1$

$2(\sqrt{3}-\sqrt{2})\leq\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leq 2(\sqrt{2}-\sqrt{1})$

$2(\sqrt{4}-\sqrt{3})\leq\dfrac{1}{\sqrt{3}}\leq 2(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

……………………………………

$2(\sqrt{10000}-\sqrt{9999})\leq\dfrac{1}{\sqrt{9999}}<2(\sqrt{9999}-\sqrt{9998})$

$2(\sqrt{10001}-\sqrt{10000})\leq\dfrac{1}{\sqrt{10000}}\leq 2(\sqrt{10000}-\sqrt{9999})$

3°　兩邊相加得　$2(\sqrt{10001}-\sqrt{2})+1\leq\sum_{n=1}^{10000}\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2(100-1)+1=199$

4°　$\therefore\quad \left[\sum_{n=1}^{10000}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]=198$

註： 1° 此題與 63 年聯考試題幾乎一樣，只差證明及高斯記號，相信看過的應可證出來。

三、如果 α，β，γ 滿足 $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$ 且 $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0$

試證明：$\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma=0$ 且 $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=0$

【證一】 1° 由 $\cos\alpha+\cos\beta=-\cos\gamma\cdots\cdots①$， $\sin\alpha+\sin\beta=-\sin\gamma\cdots\cdots②$

2° $①^2+②^2$ 得 $2+2\cos(\alpha-\beta)=1$ $\quad\therefore\cos(\alpha-\beta)=-\dfrac{1}{2}$

3° $①^2-②^2$ 得 $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+2\cos(\alpha+\beta)=\cos 2\gamma$

$\therefore\ 2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+2\cos(\alpha+\beta)=\cos 2\gamma$

4° $\therefore\ \cos(\alpha+\beta)=\cos 2\gamma$

5° $\therefore\ \cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma$

$=2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\cos 2\gamma$

$=-\cos(\alpha+\beta)+\cos 2\gamma=0$

6° ①×②得 $\cos\alpha\sin\alpha+\cos\alpha\sin\beta+\cos\beta\sin\alpha+\cos\beta\sin\beta=\cos\gamma\sin\gamma$

$\therefore\ \dfrac{1}{2}\sin 2\alpha+\dfrac{1}{2}\sin 2\beta+\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{2}\sin 2\gamma$

7° $\therefore\ \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{2}\sin 2\gamma$

$\Rightarrow\ \sin(\alpha+\beta)=\sin 2\gamma$

8° $\therefore\ \sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma$

$=2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin 2\gamma$

$=-\sin(\alpha+\beta)+\sin 2\gamma=0$

【證二】 1° 設 $a=\cos\alpha+i\sin\alpha$，$b=\cos\beta+i\sin\beta$，$c=\cos\gamma+i\sin\gamma$

2° $\therefore\ a+b+c=(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)+(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)=0$

3° $\therefore\ \overline{a+b+c}=\overline{0}=0$ $\qquad\therefore\ \overline{a}+\overline{b}+\overline{c}=0$

且 $|a|=1$，$|b|=1$，$|c|=1$

4° $\overline{a}=\cos\alpha-i\sin\alpha=\dfrac{1}{a}$， $\overline{b}=\cos\beta-i\sin\beta=\dfrac{1}{b}$，

$\overline{c}=\cos\gamma-i\sin\gamma=\dfrac{1}{c}$

$\therefore\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0\ \Rightarrow\ \dfrac{bc+ca+ab}{abc}=0\ \Rightarrow\ ab+bc+ca=0$

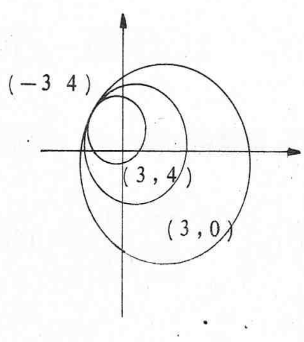
5° 又 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=0-0=0$

6° 即 $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^2+(\cos\beta+i\sin\beta)^2+(\cos\gamma+i\sin\gamma)^2=0$

$\therefore\ (\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma)+i(\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma)=0$

7° $\therefore\ \cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma=0$， $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=0$

註： 1° 此題證法有很多種，較易被接受者爲上二證法，筆者認爲此題出得很漂亮。



四、繪圖表示不等式 $|x^2+y^2-169|-6x+8y\leq 130$ 的範圍，並求它的面積。

解： 1° 若 $x^2+y^2-169\geqslant 0$， 即 $x^2+y^2\geqslant 169$

則原不等式變爲

$x^2+y^2-169-6x+8y\leqslant 130 \Rightarrow (x-3)^2+(y+4)^2\leqslant 324$

故所圍圓區域之面積爲$\pi\cdot 18^2-\pi\cdot 13^2=155\pi$ ……①

2° 若$x^2+y^2-169\leq 0$，即$x^2+y^2\leq 169$

則原不等式變爲

$-(x^2+y^2-169)-6x+8y\leq 130 \Rightarrow (x+3)^2+(y-4)^2\geq 64$

故所圍圓區域之面積爲$\pi\cdot 13^2-\pi\cdot 8^2=105\pi$ ……②

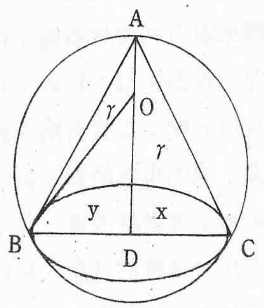
3° 由①②知所圍區域之面積爲$155\pi+105\pi=260\pi$

註：此題爲考古題之推演，59 年曾考過不等式$(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-2y-3)\leq 0$之解集合之面積爲何？

乙丁組 三、考慮一半徑爲固定值r之球，其內接直圓錐何者體積爲最大？試求之

解：1° 設圓錐之底半徑爲y，球心至圓錐之底的距離爲x，

則 $x^2+y^2=r^2$



2° 圓錐之體積爲 $V=\dfrac{1}{3}\pi y^2(x+r)$

$=\dfrac{\pi}{3}(r^2-x^2)(x+r)$

$=\dfrac{\pi}{3}[-x^3-rx^2+r^2x+r^3]$

3° $V'=\dfrac{\pi}{3}[-3x^2-2rx+r^2]$

4° 令 $V'=0 \Rightarrow -3x^2-2rx+r^2=0 \Rightarrow 3x^2+2rx-r^2=0$

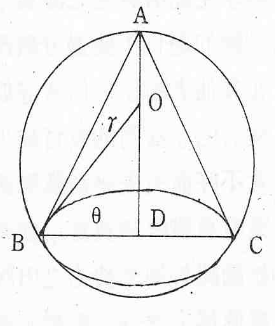
$\Rightarrow (3x-r)(x+r)=0$

$\therefore\ x=\dfrac{r}{3}$ 或 $x=-r$ （不合）

5° 當 $x=\dfrac{r}{3}$ 時V有最大值爲 $\dfrac{32\pi r^3}{81}$

另解：1° 設 $\angle OBD=\theta$ 則 $BD=r\cos\theta$，$OD=r\sin\theta$

$AD=r+r\sin\theta$



2° ∴圓錐之體積爲 $V=\dfrac{1}{3}\pi(r\cos\theta)^2(r+r\sin\theta)$

$=\dfrac{1}{3}\pi r^3(1-\sin^2\theta)(1+\sin\theta)$

3° 令 $\sin\theta=x$，$g(x)=(1-x^2)(x+1)$

$=1+x-x^2-x^3$

$g'(x)=1-2x-3x^2=(1-3x)(1+x)$，$g''(x)=-2-6x$

4° 令 $g'(x)=0$ 即得 $x=\dfrac{1}{3}$ 或 $x=-1$

代入$g''(x)$中 $g''(\dfrac{1}{3})=-2-2=-4<0$

5° 即$x=\dfrac{1}{3}$時，$g(x)$有最大值爲$g(\dfrac{1}{3})=(1-\dfrac{1}{9})(\dfrac{1}{3}+1)=\dfrac{8}{9}\cdot\dfrac{4}{3}=\dfrac{32}{27}$

6° 其最大體積為 $V=\dfrac{32}{81}\pi\gamma^{3}$

註：此題給乙丁組做略難些，且有超出課程標準範圍，為聯考首度出現利用導函數求極大極小之考題。

(四)如何提高學生對數學之研習興趣

這是一個很重要的課題。由於數學教材的枯燥無味，教材教法之守舊和呆板，再加上平時老師們喜以艱深題目難倒學生，和聯考試題命題不均、不當，使得很多學生望數學而生畏，放棄數學之呼聲不僅在鄉間學校佔絕大多數，甚至連幾所有名中學亦如此，誠為今日數學教育發展之隱憂。主持教材修訂的教授們，聯考的命題教授和大部分的中學數學教師們，實應正視此問題，而想辦法提出解決之道。在此提供下列幾點建議，希望數學界諸先進能參考與指正。

(1)關於教材部分：經民國 57 年之教材改革造成國內數學教育之大震憾以來，這期間雖再有 61 年之課程標準重訂和教材重編，但數學教材的缺點却一直存在而未加以改進。據筆者側面所知，幾年前教育部已再委託師大科教中心從事教材改革之研究，並選定中正國防預校做教材實驗工作，但一直未曾加以公開。其實前兩次教材改革所以未能成功，完全是教材編輯沒有充分準備，編輯群意見未能協調，國內現有師資、環境未顧及，以及教師在心理上無充分準備等因素所致。這一次雖然教育部愼重地從事教材改進工作，也派出許多教授到歐美各國考察研究，但是若教材未能透過從事中學教育工作者實際的試教、研討和改進，則其適應性就非常值得商榷。希望教育部能從明年暑假開始，把教材逐册的公開，並徵求志願參加教材改革研究之教師，從事實際之試教、研討和改進，使我國的教材能適切國人的需要，順應世界潮流，並能與初中及大學教材相互連接。相信這是很多老師所期待的。

(2)教材之內容要與教學時數相配合。以現今之教材，加上學校主管不當地要求把教材在高三上全部教完以便複習，常使老師們疲於奔命。殊不知科學是循序漸進的，不可急燥；而學生的領悟能力亦各有差異，必須給他們一段時間去消化、吸收，老師不可以以自己的領悟程度來制定進度。因此我建議新改之教材應以老師初教此教材時所化的時間為進度標準，且每週能增加演習指導一節，使教師與學生能有溝通之機會，實際了解學生程度，而能因材施教。

(3)測驗的題目不要過分艱深，使學生畏難而失去學習興趣。大部分的數學教師都喜歡以難題考倒學生和其他老師。一份考卷如果造成大部分學生的不及格，甚至老師們亦不會做，出題老師是應該自我檢討的。我們的教育缺少評估和仲裁的機構，以至於許多老師皆以出難題來標榜自己，造成學生因考不好而失去研習數學興趣。故合理試題之研製和各校月考，期考和模擬考試題，難易度之評鑑，應有專職機構負責，使考試能達到確實診斷學生學習能力之功能。

(4)鼓勵課外補充讀物之出版，現今數學之刋物實在少之又少，除了中央研究院數學研究所出版的「數學傳播」季刋，新竹凡異出版之「數學圈」雜誌，「科學月刋」，及幼獅書局出版的一套叢書（供國中教師參考）以外，國內幾乎再也找不到其他可供學生參考及老師教學補充之專題性讀物。因此筆者建議，負有推動科教專責之師大科教中心應積極擴大編制，專人研究出版專刋，介紹科學新知和教學方法。我認為像「科教月刋」中趙文敏教授所撰之資料和勇清之資料，就是非常好的補充教材。我們期望能有像美國的「Mathematics Teachers」或日本的「數學 Seminar 」之類的雜誌供中學生及老師們參考。

(5)獎勵科學創作，提高科學展覽之品質。筆者以為每年一度之科學展覽，有如民間七月份的大拜拜，很多作品都是抄襲或纂改歐美日各國的成品，負責評審之教授態度不夠嚴謹，主持之機構沒能提供評審教授足夠的時間及資料去研判創作的品質，以致選出來的作品多半沒有實際的應用價值。因此

我希望今後的科學展覽，應聘請對該課題具有專長之教授從事評估工作，摒除私心，眞正做到爲國舉才之功效。

(6)舉辦「數學講座」或成立「數學育樂營」，使學生和老師有互相切磋和觀摩之機會。成立「數學育樂營」，可使具有數學天才之學生發揮專長，甚至可以發掘更多天才兒童，加以適當的輔導。「數學講座」可使老師們進修機會增加，教學相長，發揮教學的功能。我誠懇的建議教育主管們：教師進修不一定要於暑假集中到政大、師大、師院去研習，可透過各縣市教育局主動成立教師研習會，定期做書報討論、演講或請專家學者就某一特殊課題做一系列之介紹，相信定可使鄉間更多教師獲益。

(7)專門性之教育電視台之設立刻不容緩。幾年來此種電視台之設立，一直停在「只聞樓梯響」之階段。當前已屬知識爆炸之時代，人們對專業知識之需求亦隨著增加。若電視台能就當前人們最需要的課題做一有系統之介紹，受惠的將不只是少數人，而是廣大之群衆，譬如小學生新改之自然科學教材，學校受到設備之限制可能無法做實驗，學生便無法完全了解。若教育電視台能就該學科做一有系統之實驗介紹，我想不僅兒童受益，家長們也可藉此機會獲得再教育。在十幾年前，美國大量地製作新武器使用、操作之影片，在軍中不斷地放映，很快的，美國軍人便熟悉了新武器之使用及維護。這就是一個好例子。因此欲使學生對學科之疑難得到解答，事業性教育電視台之設立是刻不容緩的事。

(8)多舉辦校際性之數學競試，並給予適當的獎勵，以促進學生對數學之學習興趣。雖然在曹亮吉等數位台大教授之大力奔走下，文復會每年特別舉辦數學競試（已辦了兩屆），但參加之對象皆爲高三之學生，有很多有才能的學生爲了準備聯考，皆不太熱心參與競試，若能分期分區及分階段競試，可能促使學生和學校對它之重視而發掘有潛力之青年，給予適當地輔導。

(9)聯考試題之難度應放淺些，使中下程度的學生不致放棄數學。每年聯考完了後很多學生就非常感慨，花了那麼多時間學數學，結果又泡湯了。近兩年來數學試題已有顯著地改善，使很多學生認爲讀數學在聯考錄取上佔很有利之地位，但若明年數學再出深題，則學生學習之意願又將會減低，因此筆者希望有資格命題之諸位教授，能將試題之難度，和緩之加深，才不致使中、下程度之學生放棄數學，今日那樣多學生放棄數學，大部分是老師們出題太深，大專聯考無法得高分，和學生之疑難無法獲得妥善之解決所致。

(10)學校的考試過繁，影響學生學習之心理。各級學校爲了提高升學率，考試密集之程度，連老師都透不過氣來，更何況學生呢？要使學生有興趣去讀書，發掘問題和解決問題，必須讓學生有充分之時間去看去想去做，如果學生天天爲著學校之大小考緊張，即使再聰明的學生也只是變成考試機器，在作輸入與輸出之動作而已。因此希望教育主管當局，能嚴格禁止各級學校不當之考試制度。

(11)老師應嚴格要求學生動手去做習題。由於聯考出現選擇題，且部分選擇題可用速解法或其他很多絕招解出，因此最近幾年來之教學變成老師們不教定義定理（即使教了也沒有多少學生肯聽），不嚴格要求學生做課本之習題，導致很多學生背一些解題絕招，就可以考得很好，基礎科學之根基因而動搖，現已再恢復 40％之非選擇題，相信可促使老師教學之正常化，但筆者以爲要學生學好數學之關鍵，在於培養學生「多想」、「多做」，故嚴格地要求學生動手做課本之習題，和老師認眞地批改學生之作業，是使學生打好數學基礎之原動力。

(12)設法引進國外最新數學教學法，以改進國內數學教學上之缺點。唯有從大學師資之培育和教學法之改進上多下點功夫，才能使中學老師在教學上能有所改進。幾年來師大、師院等負責師資之訓練和培育工作之機構，雖然在教材上盡了很大之心力，但在教學法上仍然沒有很顯著之改變，除了塡鴨式教學法外，很少介紹新式之教學法。教學方法之生動有趣，是提高學生研習數學興趣的要件。筆者希望教育主管當局能定期派出老師到歐美各國考察最新教學方式，以帶動國內數學教學之革新。

以上爲筆者個人之淺見，意在拋磚引玉，更期望數學界諸先進能不吝指正。

（本文作者現任教於嘉義高中）