模擬試題

何景國 提供

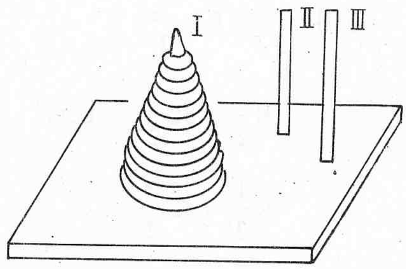
前 言

本份試題大部份是從法國高中數學科會考試題改編，整理出來的，配合我國一般高中程度，可做高中同學升學模擬，複習之用。

1. 設 $m\in R$，$2^x-m=0$ 則下列各敘述何者爲正確？
   (A)當 $m>1$ 時，方程式僅有一實根
   (B)當 $m<1$ 時，方程式有二負根
   (C)當 $m=3$ 時，方程式有一個介於 1 與 2 之間的實根
   (D)當 $m=1$ 時，方程式有一零根
   (E)當 $0<m<1$ 時，方程式有二實根。

2. 設 P 爲等腰梯形 $ABCD$ 所在的平面上之任一點
   (甲)若 P 到各頂點距離之平方和爲最小值時，則 P 位置落在
   (A)梯形外接圓之圓心上
   (B)對角線的交點上
   (C)兩腰中點連線之中點上
   (D)梯形的任一頂點上
   (E)梯形外接圓之圓周上
   (乙)若 $AB=1$，$BC=AD=1$，$DC=2$ 則 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2$ 的極小值是
   (A) $\frac{11}{8}$ (B) $\frac{13}{8}$ (C) $\frac{11}{4}$ (D) $\frac{13}{4}$ (E) $\frac{15}{8}$

3. 傳說古時候在一個寺廟裡，有 64 個大小不同的銀圈與豎立在一塊木板上的三根金棒。這些銀圈套在其中一根金棒上，由大而小地疊積起來，（見下附圖；但圖中只畫有 12 個銀圈）寺廟裡的和尚嘗試着把這一堆銀圈整個搬移到另一根金棒上面去，不過他們之間有一個約束：(1)每一次僅能搬動一個銀圈。 (2)大的銀圈不得置於小的銀圈之上。



   (甲)試問在這個約束之下最少需要搬動幾次才能完成。
   (A) 2^{63}（次） (B) $2^{63}-1$（次）
   (C) 2^{64}（次） (D) $2^{64}-1$（次）
   (E) $2^{64}+1$（次）
   (乙)（多選） 假設以搬動 1 次需時 1 秒鐘計則搬動 64 個銀圈約需歷時多長時間？（已知：$\log 2=0.30103$）
   (A) 5850 億年 (B) 5800 億年
   (C) 5830 億年 (D) 5840 億年
   (E) 2^{64} 秒

4. 設 ΔABC 爲一直角三角形，$\angle B=90°$，$AC=2m$，且(E)爲過直線 $\overleftrightarrow{AC}$ 且與平面 ABC 垂直的平面。若平面 E 上，ΔPAC 爲一等腰直角三角形，則 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$

$+\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=$

(A) $14\ m^2$　(B) $16\ m^2$　(C) $10\ m^2$

(D) $12\ m^2$　(E) $19\ m^2$

*5. 設　$\tan x=\cot x-m\cot 2x$　爲恆等式，且 x 不爲象限角，則：

(甲) $m=$

(A) -1　(B) -1　(C) 2　(D) -2　(E) 3

(乙)利用上述結果，試求下式中之 K 值。

$$\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n}-K\cot\frac{x}{2^{n-1}}$$

（其中 $n\in N$）

$K=$

(A) 2^{n-1}　(B) 2^n　(C) n^2　(D) $\frac{1}{2^n}$　(E) $\frac{1}{2^{n-1}}$

(丙)利用(乙)的性質求下式之和：

$$S_n=\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$$

（其中 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$）

$S_n=$　(A) $\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n}-\cot x$

(B) $\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n}$

(C) $\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n}+\cot x$

(D) 2^n

(E) 1

6. （多選）　設方程式：

$$a\log x+b=c\log_x 10$$

甲看錯 b 得 x 的解集 $\{\sqrt{10},\ \frac{1}{100}\}$；乙看錯 c 得 x 的解集 $\{100,\ \frac{1}{100}\}$ 若正確之解集合爲 S，則：

(A) $1\in S$　(B) $\frac{1}{100}\in S$　(C) $10\in S$

(D) $\frac{1}{10}\in S$　(E) $100\in S$

7. 給予一張民國七十一年某月份的日曆表

日	一	二	三	四	五	六

若對方先用鉛筆把縱橫各兩個，合計 4 個數圈起來，在不看這些數字的情況下，將這 4 個數字相加得 56，則這四個數字爲：

(A) 9, 10, 18, 19

(B) 13, 14, 12, 17

(C) 10, 11, 17, 18

(D) 8, 9, 19, 20

(E) 12, 13, 15, 16

8. （多選）　在 XY 一平面坐標系上有三點 P，Q，M 同時各作如下等速運動：

(1) P 自 A（80, 0）出發，在 X 軸上，以每秒 5 單位速度向原點（0，0）移動

(2) Q 自 B（0, 80）在 Y 軸上出發，以每秒 2 單位速度向原點（0，0）移動

(3) M 自原點（0，0）出發，在 $\overrightarrow{OC}$ 上以每秒 $2\sqrt{2}$ 單位速度向點 C（80，80）移動

試問經幾秒後，P，Q，M 三點共線？

(A) 10 秒　(B) 13 秒　(C) $\frac{80}{3}$ 秒

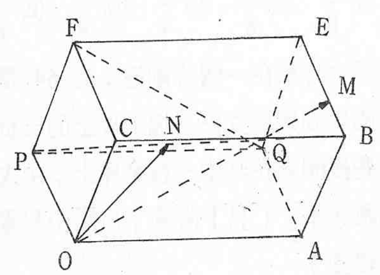
(D) 7 秒　(E) 15 秒

9. 設 W 爲 ΔABC 的外心，若點 P 具有下列關係：$\overrightarrow{WP}=\overrightarrow{WA}+\overrightarrow{WB}+\overrightarrow{WC}$　則 P 是 ΔABC 的那一種心：

(A)重心　(B)內心　(C)外心

(D)垂心　(E)傍心

*10. 如圖所示的平行六面體



下列各題(甲)～(丁)的答案僅有一個，請選出適當的數字來：

(甲)設M為稜邊 $\overline{BE}$ 的中點，則$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+m\overrightarrow{OP}$　其中數值m為何？$m=$＿。

(乙)若N為對角線 $\overline{BP}$ 的中點則$\overrightarrow{ON}=m(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OP})$ 其中數值$m=$＿＿。

(丙)設G為ΔOFQ的重心　則$\overrightarrow{PB}=m\overrightarrow{PG}$ 其中數值$m=$＿＿。

(丁)承上結果：若$\overrightarrow{PG}=m\overrightarrow{GN}$　則$m=$＿＿。

(A) 1　(B) 2　(C) $\frac{1}{2}$　(D) $\frac{1}{3}$　(E) 3

11. 設$\overline{r}$表被 8 除，餘數同為r之整數所成的集合，這個$\overline{r}$裡面的每一個元素為其他元素的代表元。

(甲)試解下列方程式組：

$$\begin{cases}\overline{2}x+\overline{6}y=\overline{4}\\ \overline{1}x-\overline{3}y=\overline{0}\end{cases}$$

則　(A)滿足此方程組之解(x,y)有 4 組。
(B)滿足此方程組之解(x,y)有 1 組。
(C)滿足此方程組之解(x,y)有 2 組。
(D)滿足此方程組之解(x,y)有 3 組。
(E)此方程組為無解方程組。

(乙)(多選)　承上結果，試求滿足：

$$\begin{cases}2x+6y-4=8\text{ 的倍數}\\ x-3y=8\text{ 的倍數}\end{cases}\quad\text{的整數解 }x,y$$

則

(A)解集合$S=(\overline{1}\times\overline{3})\cup(\overline{3}\times\overline{1})\cup(\overline{5}\times\overline{7})\cup(\overline{7}\times\overline{5})$

(B)解集合$S=(\overline{2}\times\overline{4})\cup(\overline{4}\times\overline{2})\cup(\overline{2}\times\overline{6})\cup(\overline{6}\times\overline{2})$

(C)解集合$S=(\overline{0}\times\overline{1})\cup(\overline{1}\cup\overline{0})\cup(\overline{2}\times\overline{3})\cup(\overline{3}\times\overline{2})\cup(\overline{4}\times\overline{5})\cup(\overline{5}\times\overline{4})$

(D)$(x+y)\in\overline{2}$

(E)$(x+y)\in\overline{4}$

12. (多選)　設$m\in R$，複數方程式：
$(1+i)Z^2-2i(1+m)Z+(i-1)(m^2+1)=0$
(其中$Z\in C$)

若方程式的相異根Z_1，Z_2在複數平面上以A_1，A_2對應，則下列何者為正確：

(A)$Z_1=1+mi$，$Z_2=1-mi$

(B)$Z_1=1+mi$，$Z_2=m+i$

(C)若複數$w=1+i$所對應之點為P，則ΔA_1PA_2為等腰直角三角形。

(D)若複數$w=1+i$所對應之點為P，則P為$\overline{A_1A_2}$的中點。

(E)若複數$w=1+i$，則$Z_1-w=i(Z_2-w)$或$Z_2-w=-i(Z_1-w)$

*13. 設二階方陣P如下：

$$P=\begin{bmatrix}a & b\\ 1-a & 1-b\end{bmatrix}$$

其中$a,b\in(0,1)$及 $I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

且　$d=a-b$

$$\text{若定義}\begin{cases}P^1=P\\ P^n=\begin{bmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{bmatrix}\quad(n\in N)\\ P^{n+1}=P^n\cdot P\end{cases}$$

(甲)(多選)　則下列何者成立：

(A)$P^2=(1+d)P-dI_2$

(B)$P^2=(1+d)P+dI_2$

(C)$P^n=\frac{1}{1-d}[(1-d^n)P-d(1-d^{n-1})I_2]$

(D)$P^n=\frac{1}{1-d}[(1-d^n)P+d(1-d^{n-1})I_2]$

(E)$P^n=\frac{1}{1-d}[(1+d^n)P+d(1+d^{n-1})I_2]$

(乙)(多選)　承上，下列何者成立：

(A)$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{b}{1-a+b}$

(B)$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$

(C)$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\frac{b}{1-a+b}$

(D) $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} d_n$

(E) $\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} c_n$

$= \lim_{n\to\infty} b_n + \lim_{n\to\infty} d_n$

$= 1$

(丙)（多選） 方陣P爲不可逆的充要條件爲何？

(A) $P^n = P$　　(B) $P^n = I_2$

(C) $P^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$　(D) $d = 0$

(E) $P^n = P^2$

14. （多選） 設一隨機變數X之機率函數如下表所述：

X之可能值 x	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	0	c	$2c$	$2c$	$3c$	c^2	$2c^2$	$7c^2+c$

則下列何者爲正確：

(A) $0.1 < c < 0.2$

(B) $P(X \geq 5) = \frac{1}{5}$

(C) $P(X < 3) = 0.3$

(D) $P(x^2+1=26) = 0.01$

(E)使 $P(X \leqq x_0) > \frac{1}{2}$ 之極小值 $x_0 = 4$

15. （多選） 設$(0.99)^{10}$ 小數第一、二、三、四位分別爲a，b，c，d則

(A) $a+b+c+d$ 爲一偶數

(B) $a+b=c+d$

(C) $a+b=c+d+2$

(D) $a+b+c$ 爲一質數

(E) $a+b+c+d$ 爲 4 的倍數

*16. 設 $Z = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}$　$(n \in N)$

且 $S_n = \sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots\cdots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}$

試回答下列問題：

(甲)複數級數 $1+Z+Z^2+\cdots+Z^{n-1}$ 之值爲：

(A) $1 + i\tan\frac{\pi}{2n}$　(B) $1 + i\cot\frac{\pi}{2n}$

(C) $i\cot\frac{\pi}{n}$　(D) $i\tan\frac{\pi}{2}$

(E) 0

(乙)三角級數 $S_n =$

(A) $\tan\frac{\pi}{2n}$　(B) $\tan\frac{\pi}{n}$

(C) $\cot\frac{\pi}{2n}$　(D) $\cot\frac{\pi}{n}$

(E) 1

(丙)承上結果，求 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$ 之值：

(A) 0　(B) 1　(C) $\frac{2}{\pi}$　(D) π　(E) 2π

*17. 在複數平面上，複數方程式 $\overline{Z}^2-(1+i)^2 = \overline{Z}^2-(1-i)^2$（其中：$Z=x+iy$，$\overline{Z}=x-iy$，$x$，$y \in R$）的圖形爲$F_1$及另一複數方程式$[Z-(1+i)][\overline{Z}-(1-i)]=8$（其中：$Z=x+iy$，$\overline{Z}=x-iy$，$x$，$y\in R$）的圖形爲$F_2$則

(甲)F_1是

(A)一圓　(B)一拋物線　(C)一雙曲線

(D)一橢圓　(E)一直線

(乙)F_2是

(A)一圓　(B)一拋物線　(C)一雙曲線

(D)一橢圓　(E)一直線

(丙)F_1與F_2的交點元素個數是：

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3　(E) 4　（個）

(丁)過F_1與F_2的交點之公切線方程式爲：

(A) $x-y+2=0$　(B) $x+y+2=0$

(C) $x+y-4=0$　(D) $x-y+4=0$

(E) $x-y+1=0$

18. （多選） 設函數 $f(x) = \frac{x+\tan\alpha}{1-x\tan\alpha}$

其中 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$

$g(x) = \frac{x+\tan\beta}{1-x\tan\beta}$

其中$\beta \in (0,\frac{\pi}{2})$

定義：$f_1(x)=f(x)$

$f_2(x)=f(f_1(x))$

……………………

$f_n(x)=f(f_{n-1}(x))$（其中$n \in N$）

則下列何者爲正確？

(A) $f(g(x))=g(f(x))$

(B)若$f(x)=g(x)$則$\alpha=\beta$

(C) $f_n(x)=\frac{x+\tan n\alpha}{1-x\tan n\alpha}$

(D)若$f(x)=\frac{\sqrt{3}x+1}{\sqrt{3}-x}$　則$\alpha=\frac{\pi}{6}$

(E)若$f(x)=\frac{\sqrt{3}x+1}{\sqrt{3}-x}$

則$f_{17}(x)=\frac{\sqrt{3}x+1}{\sqrt{3}-x}$

19. （多選）　設自然數 341 在a進位法中爲 2331_a，則a之值爲

(A) $a \in \{5,6,8,9\}$

(B) $a^3 \in [64,170]$

(C) $a \in \{4,6,8,9\}$

(D) $a \in \{6,7,9\}$

(E) $341=a^3+(a+1)^3$

20. （多選）　設集合$S=\{x \in R \mid (x^2-x-11)^{x^2-x-6}=1\}$則：

(A) $S \subseteq \{6,4,3,2,-1,-4\}$

(B) $S \subseteq \{4,3,-2,-3\}$

(C) $|S|=4$

(D) $|S|=2$

(E) $|S|=3$

*21. 設a,b,c,d爲實數，若$a^2+b^2=2$，$c^2+d^2=3$　則：

(甲) $ab+cd$之範圍是：

(A) $[\frac{-5}{2},\frac{5}{2}]$　(B) $[0,1]$

(C) $[-1,1]$　(D) $[\frac{-3}{2},\frac{3}{2}]$

(E) $[\frac{-4}{3},\frac{4}{3}]$

(乙) $ac+bd$之範圍是：

(A) $[-\sqrt{5},\sqrt{5}]$

(B) $[-\sqrt{6},\sqrt{6}]$

(C) $[1-\sqrt{5},1+\sqrt{5}]$

(D) $[\frac{-5}{3},\frac{5}{3}]$

(E) $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$

(丙) $ac-bd$之範圍是：

(A) $[-\sqrt{5},\sqrt{5}]$

(B) $[-\sqrt{6},\sqrt{6}]$

(C) $[1-\sqrt{5},1+\sqrt{5}]$

(D) $[\frac{-5}{3},\frac{5}{3}]$

(E) $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$

答案

1. (A)(C)(D)
2. (甲)(C)　(乙)(D)
3. (甲)(D)　(乙)(D)(E)
4. (A)
5. (甲)(C)　(乙)(E)　(丙)(A)
6. (C)(D)
7. (C)
8. (A)(C)
9. (D)
10. (甲)(C)　(乙)(C)　(丙)(E)　(丁)(B)
11. (甲)(A)　(乙)(A)(E)
12. (B)(C)(E)
13. (甲)(A)(C)　(乙)(A)(B)(D)(E)　(丙)(A)(D)
14. (B)(C)(D)(E)
15. (A)(C)(D)(E)
16. (甲)(B)　(乙)(C)　(丙)(C)
17. (甲)(C)　(乙)(A)　(丙)(D)　(丁)(B)
18. (A)(B)(C)(D)
19. (A)(B)(E)
20. (B)(C)
21. (甲)(A)　(乙)(B)　(丙)(B)

（本文作者現任教於私立延平中學）