孟氏定理及其一推廣

許振榮

在「關於西瓦定理及關聯定理」一文中，我們利用「質量中心」的概念來證明擴張的定理又得到與其類似的一定理。在本文我們想再利用「質量中心」的概念來討論孟氏（Menelaus）定理及其一推廣。當然在一直線上方向不同的線段的長度以不同的符號來表示。

孟氏定理：設 A_1，A_2，A_3 爲一三角形之頂點。又設 B_1，B_2，B_3 分別在三角形的邊 A_1A_2，A_2A_3，A_3A_1 上或在其延長上。則 B_1，B_2，B_3 共線之充要條件爲下式之成立：

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\frac{A_3B_3}{B_3A_1}=-1 \tag{1}$$

爲了證明孟氏定理及其一推廣，我們要先注意下列各項：

(α)三點 B_1，B_2，B_3 在一直線上的充要條件爲

$$b_1\overrightarrow{B_1}+b_2\overrightarrow{B_2}+b_3\overrightarrow{B_3}=0\text{，且 }b_1+b_2+b_3=0 \tag{2}$$

之成立。

(β)四點 B_1，B_2，B_3，B_4 在一平面上的充要條件爲

$$b_1\overrightarrow{B_1}+b_2\overrightarrow{B_2}+b_3\overrightarrow{B_3}+b_4\overrightarrow{B_4}=0\text{，且 }b_1+b_2+b_3+b_4=0 \tag{3}$$

之成立。一般而言

(γ)（$k+2$）個點 B_1，B_2，……，B_{k+2} 在一個 k 維的平直下空間的充要條件爲

$$b_1\overrightarrow{B_1}+b_2\overrightarrow{B_2}+\cdots\cdots+b_{k+2}\overrightarrow{B_{k+2}}=0\text{，且 }b_1+b_2+\cdots\cdots+b_{k+2}=0 \tag{4}$$

之成立。我們現在先來證明下列補助定理：

補助定理 1：設 A_1，A_2，A_3 爲一三角形之頂點，B_1，B_2，B_3 分別在邊 A_1A_2，A_2A_3，A_3A_1 上或在其延長上。又假設下列二條件成立：

Ⅰ. (A) B 點中有二點爲內分點（即在邊上），第三點爲外分點（即在邊之延長上），或(B)三點 B 點均爲外分點。

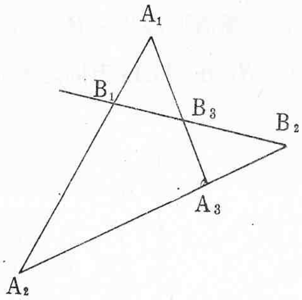
Ⅱ. 在各 A 點和各 B 點處均有有適當質量的質點存在使如果 B_k 爲 A_iA_j 之內分點，則 B_k 爲在 A_i，A_j 處的二質點之質量中心，又如果 B_k 爲在 A_iA_j 方向之延長上，則 A_j 爲在 A_i 處和在 B_k 處的二質點之質量中心。

此時，B_1，B_2，B_3 爲共線，並且下式成立：

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\frac{A_3B_3}{B_3A_1}=-1 \tag{1}$$

補助定理 1 之證明：設在點A_1，A_2，A_3處的質點的質量分別爲m_1，m_2，m_3。在補助定理 1 之條件Ⅰ的(A)項，不妨假設二個內分點爲 B_1 和 B_3 。則由條件Ⅱ可得

(5) $$\overrightarrow{B_1}=\frac{m_1\overrightarrow{A_1}+m_2\overrightarrow{A_2}}{m_1+m_2},\quad \overrightarrow{B_3}=\frac{m_1\overrightarrow{A_1}+m_3\overrightarrow{A_3}}{m_1+m_3}$$



第一圖

現在如果 B_2 在 A_2A_3 方向之延長上，則

(6₁) $$\overrightarrow{B_2}=\frac{m_3\overrightarrow{A_3}-m_2\overrightarrow{A_2}}{m_3-m_2},\quad m_2<m_3$$

如果 B_2 在 A_3A_2 方向之延長上，則

(6₂) $$\overrightarrow{B_2}=\frac{m_2\overrightarrow{A_2}-m_3\overrightarrow{A_3}}{m_2-m_3},\quad m_3<m_2$$

所以，如果$m_2<m_3$，則得

(7₁) $$(m_1+m_3)\overrightarrow{B_3}-(m_1+m_2)\overrightarrow{B_1}-(m_3-m_2)\overrightarrow{B_2}=0，且$$
$$(m_1+m_3)-(m_1+m_2)-(m_3-m_2)=0$$

如果$m_3<m_2$成立，則得

(7₂) $$(m_1+m_2)\overrightarrow{B_1}-(m_1+m_3)\overrightarrow{B_3}-(m_2-m_3)\overrightarrow{B_2}=0，且$$
$$(m_1+m_2)-(m_1+m_3)-(m_2-m_3)=0$$

故，不論那一情形發生，依(α)，B_1，B_2，B_3爲共線。此時由(5)，(6)可得

(8) $$\frac{A_2B_1}{B_1A_1}=\frac{m_1}{m_2},\quad \frac{A_2B_2}{B_2A_3}=\frac{-m_3}{m_2},\quad \frac{A_3B_3}{B_3A_1}=+\frac{m_1}{m_3}$$

故得

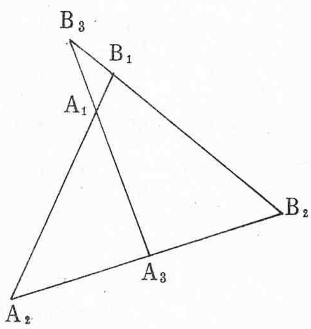
$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\frac{A_3B_3}{B_3A_1}=\left(\frac{m_2}{m_1}\right)\left(-\frac{m_3}{m_2}\right)\left(\frac{m_1}{m_3}\right)=-1$$

在補助定理 1 之條件Ⅰ(B)項，我們先考慮外分點 B_1 和 B_3 。

現在B_1，B_3在A_1A_2，A_3A_1之延長上的情形有下列四種：

(i) B_1 在 A_2A_1 方向之延長上，且 B_3 在 A_3A_1 方向之延長上。此時由補助定理 1 之條件Ⅱ可得

(9) $$\begin{cases}\overrightarrow{B_1}=\dfrac{m_1\overrightarrow{A_1}-m_2\overrightarrow{A_2}}{m_1-m_2}, & m_2<m_1\\[2ex] \overrightarrow{B_3}=\dfrac{m_1\overrightarrow{A_1}-m_3\overrightarrow{A_3}}{m_1-m_3}, & m_3<m_1\end{cases}$$



第二圖

此時如果 B_2 在 A_2A_3 方向之延長上，則得

(10₁) $$\overrightarrow{B_2}=\frac{m_3\overrightarrow{A_3}-m_2\overrightarrow{A_2}}{m_3-m_2},\quad m_2<m_3$$

如果，B_2 在 A_3A_2 方向之延長上，則

(10₂) $$\overrightarrow{B_2}=\frac{m_2\overrightarrow{A_2}-m_3\overrightarrow{A_3}}{m_2-m_3},\quad m_3<m_2$$

故，若$m_2<m_3$，則得

(11₁) $$(m_1-m_2)\overrightarrow{B_1}-(m_1-m_3)\overrightarrow{B_3}-(m_3-m_2)\overrightarrow{B_2}=0，且$$
$$(m_1-m_2)-(m_1-m_3)-(m_3-m_2)=0$$

如果，$m_3<m_2$，則得

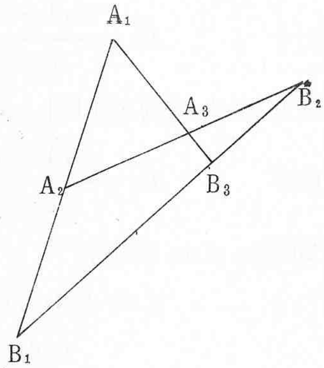
(11₂) $(m_1-m_3)\vec{B_3}-(m_1-m_2)\vec{B_1}-(m_2-m_3)\vec{B_2}=0$，且

$$(m_1-m_3)-(m_1-m_2)-(m_2-m_3)=0$$

故，不論那一種情形發生，B_1，B_2，B_3 為共線。

(ii) B_1 在 A_1A_2 方向之延長上，B_3 在 A_1A_3 方向之延長上。此時，由補助定理 1 之條件 II，可得：

(12)
$$\begin{cases}\vec{B_1}=\dfrac{m_2\vec{A_2}-m_1\vec{A_1}}{m_2-m_1}, & m_1<m_2\\[2ex] \vec{B_3}=\dfrac{m_3\vec{A_3}-m_1\vec{A_1}}{m_3-m_1}, & m_1<m_3\end{cases}$$



第三圖

此時，如果 B_2 在 A_2A_3 方向之延長上，則

(13₁) $$\vec{B_2}=\frac{m_3\vec{A_3}-m_2\vec{A_2}}{m_3-m_2},\quad m_2<m_3$$

如果 B_2 在 A_3A_2 方向之延長上，則

(13₂) $$\vec{B_2}=\frac{m_2\vec{A_2}-m_3\vec{A_3}}{m_2-m_3},\quad m_3<m_2$$

故，如果 $m_2<m_3$，則

(14₁) $(m_3-m_1)\vec{B_3}-(m_2-m_1)\vec{B_1}-(m_3-m_2)\vec{B_2}=0$，且

$$(m_3-m_1)-(m_2-m_1)-(m_3-m_2)=0$$

如果 $m_3<m_2$，則

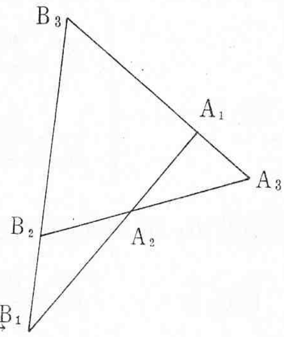
(14₂) $(m_2-m_1)\vec{B_1}-(m_3-m_1)\vec{B_3}-(m_2-m_3)\vec{B_2}=0$，且

$$(m_2-m_1)-(m_3-m_1)-(m_2-m_3)=0$$

故，無論那一種情形發生，B_1，B_2，B_3 均為共線。

(iii) B_1 在 A_1A_2 方向之延長上，B_3 在 A_3A_1 方向之延長上。此時由補助定理 1 之條件 II，可得：

(15)
$$\begin{cases}\vec{B_1}=\dfrac{m_2\vec{A_2}-m_1\vec{A_1}}{m_2-m_1}, & m_1<m_2\\[2ex] \vec{B_3}=\dfrac{m_1\vec{A_1}-m_3\vec{A_3}}{m_1-m_3}, & m_3<m_1\end{cases}$$



第四圖

在此情形，$m_3<m_1<m_2$。故，B_2 必在 A_3A_2 方向之延長上，即

(16) $$\vec{B_2}=\frac{m_2\vec{A_2}-m_3\vec{A_3}}{m_2-m_3},\quad m_3<m_2$$

此時可得

(17) $(m_2-m_1)\vec{B_1}+(m_1-m_3)\vec{B_3}-(m_2-m_3)\vec{B_2}$

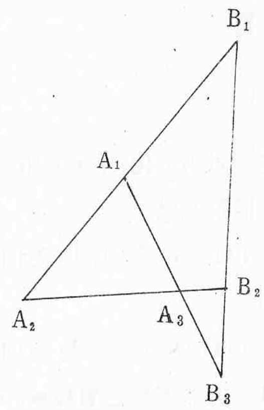
$=0$，且

$$(m_2-m_1)+(m_1-m_3)-(m_2-m_3)=0$$

成立。故，B_1，B_2，B_3 為共線。

(iv) B_1 在 A_2A_1 方向之延長上，B_3 在 A_1A_3 方向之延長上。此時由補助定理 1 之條件 II，可得：

$$(18)\quad \begin{cases} \vec{B_1} = \dfrac{m_1\vec{A_1} - m_2\vec{A_2}}{m_1 - m_2}, & m_2 < m_1 \\ \vec{B_3} = \dfrac{m_3\vec{A_3} - m_1\vec{A_1}}{m_3 - m_1}, & m_1 < m_3 \end{cases}$$



第五圖

在此情形，$m_2 < m_1 < m_3$。故 B_2 必在 A_2A_3 方向之延長上，即

$$(19)\quad \vec{B_2} = \frac{m_3\vec{A_3} - m_2\vec{A_2}}{m_3 - m_2}, \quad m_2 < m_3$$

因之，

$$(20)\quad (m_1 - m_2)\vec{B_1} + (m_3 - m_1)\vec{B_3} - (m_3 - m_2)\vec{B_2} = 0 \text{，且}$$

$$(m_1 - m_2) + (m_3 - m_1) - (m_3 - m_2) = 0$$

故，B_1，B_2，B_3 為共線。

最後，由(9)，(10)，或(12)，(13)抑或，(15)，(16)，抑或(18)，(19)均可得

$$(21)\quad \frac{A_1B_1}{B_1A_2} = -\frac{m_2}{m_1}, \quad \frac{A_3B_3}{B_3A_1} = -\frac{m_1}{m_3}, \quad \frac{A_3B_2}{B_2A_2} = -\frac{m_2}{m_3}$$

因之，

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2} \cdot \frac{A_2B_2}{B_2A_3} \cdot \frac{A_3B_3}{B_3A_1} = \left(-\frac{m_2}{m_1}\right)\left(-\frac{m_3}{m_2}\right)\left(-\frac{m_1}{m_3}\right) = -1$$

成立。

孟氏定理之證明：先假設(1)式成立。想證明：B_1，B_2，B_3 為共線。先注意：如果 B_1 在邊 A_1A_2 上，則 $\frac{A_1B_1}{B_1A_2}$ 為正，又如果 B_1 在 A_1A_2 之延長上 $\frac{A_1B_1}{B_1A_2}$ 為負等。因之，當(1)式成立時，如果有二個 B 點為內分點，則第三個 B 點必為外分點。又如果有二個 B 點為外分點，第三個 B 點亦必為外分點。故，補助定理 1 的條件 I 成立。其次來證明補助定理 1 之條件 II 亦成立。先考慮有二個 B 點為內分點的情形。此時不妨假設此二 B 點為 B_1 及 B_3。和補助定理 1 之證明時一樣，適當地選在 A_1，A_2，A_3 處的質點的質量，使(5)式成立。因之，可得

$$(22)\quad \frac{A_1B_1}{B_1A_2} = \frac{m_2}{m_1}, \quad \frac{A_3B_3}{B_3A_1} = \frac{m_1}{m_3}$$

代入(22)於(1)式之左邊，則得

$$(23)\quad \frac{A_2B_2}{B_2A_3} = -\frac{m_3}{m_2}$$

由(23)可得 (6_1) 和 (6_2) 式。故補助定理 1 之條件 II 成立。而且，此為條件 I (A)項的情形。

其次，考慮 B_1 和 B_3 為二個外分點的情形。B_1，B_3 在 A_1A_2，A_3A_1 之延長上的情形有四種。先考慮

(i) B_1 在 A_2A_1 方向之延長上，B_3 在 A_3A_1 方向之延長上的情形。和補助定理 1 之證明時一樣，此時可適當地選在 A_1，A_2，A_3 處的質點之質量 m_1，m_2，m_3 使(9)式成立。因之，可得：

$$(24)\quad \frac{A_2B_1}{B_1A_1} = -\frac{m_1}{m_2}, \quad \frac{A_3B_3}{B_3A_1} = -\frac{m_1}{m_3}$$

代入(24)式於(1)式之左邊，則得

$$\left(-\frac{m_2}{m_1}\right)\left(\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\right)\left(-\frac{m_1}{m_3}\right) = -1$$

故，得

(25) $$\frac{A_2B_2}{B_2A_3}=-\frac{m_3}{m_2}$$

因之，可得 (10_1)，(10_2) 兩式。所以，補助定理 1 之條件 II 成立。並且此爲補助定理條件 I 中(B)項之一情形。當

(ii) B_1 在 A_1A_2 方向之延長上，B_3 在 A_1A_3 方向之延長上的情形時討論完全與 (i) 相同。其次考慮

(iii) B_1 在 A_1A_2 方向之延長上，B_3 在 A_3A_1 方向之延長上的情形。此時，適當地選在點 A_1，A_2，A_3 處的質點之質量 m_1，m_2，m_3 使(15)式成立。再由(15)式可得

(26) $$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}=-\frac{m_2}{m_1}\quad,\quad \frac{A_3B_3}{B_3A_1}=-\frac{m_1}{m_3}$$

代入(26)式於(1)式之左邊，可得

$$\left(-\frac{m_2}{m_1}\right)\left(\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\right)\left(-\frac{m_1}{m_3}\right)=-1$$

故得

(27) $$\frac{A_2B_2}{B_2A_3}=-\frac{m_3}{m_2}$$

此時，因爲 $m_3<m_1<m_2$，可得(16)式。故補助定理 1 之條件 II 成立。

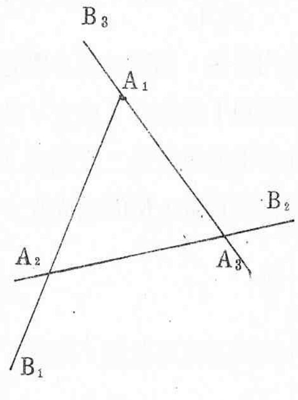
注意：由(1)式可知下列情形不可能發生：即 B_1 在 A_1A_2 方向之延長上，B_2 在 A_2A_3 方向之延長上，B_3 在 A_3A_1 方向之延長上的情形。因如果此情形發生，則

(28) $$\left|\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\right|>1\text{，}\left|\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\right|>1\text{，}\left|\frac{A_3B_3}{B_3A_1}\right|>1$$

成立。因之，

$$\left|\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\frac{A_3B_3}{B_3A_1}\right|>1$$

此式與(1)式不合之故。



第六圖

(iv) B_1 在 A_1A_2 方向之延長上，B_3 在 A_1A_3 方向之延長上時討論完全與 (iii) 相同。

故(1)成立時沒有補助定理 1 之條件 I 以外的情形，並且對於所有可能的情形補助定理之條件 II 均成立。因此依補助定理 1，得知 B_1，B_2，B_3 三點爲共線。

反之，假設 B_1，B_2，B_3 三點爲共線，想證明(1)式成立。先考慮 B_1，B_3 爲內分點的情形。與上面一樣可決定在 A_1，A_2，A_3 處的質點之質量 m_1，m_2，m_3 使(5)式成立。現在考慮下列位置向量所表的點 B_2'：

(29) $$\vec{B_2}'=\begin{cases}\dfrac{m_3\vec{A_3}-m_2\vec{A_2}}{m_3-m_2}\text{，當 } m_2<m_3 \text{ 時}\\[2ex] \dfrac{m_2\vec{A_2}-m_3\vec{A_3}}{m_2-m_3}\text{，當 } m_3<m_2 \text{ 時}\end{cases}$$

此時，如果 $m_2<m_3$ 可得

(30_1) $$(m_1+m_3)\vec{B_3}-(m_1+m_2)\vec{B_1}-(m_3-m_2)\vec{B_2}=0\text{，且}$$

$$(m_1+m_3)-(m_1+m_2)-(m_3-m_2)=0$$

如果$m_3 < m_2$成立，則得

(30₂) $$(m_1+m_2)\overrightarrow{B_1}-(m_1+m_3)\overrightarrow{B_3}-(m_2-m_3)\overrightarrow{B_2}=0 \text{，且}$$
$$(m_1+m_2)-(m_1+m_3)-(m_2-m_3)=0$$

故B_2'爲直線B_1B_2與邊A_2A_3之交點。所以$B_2'=B_2$，而B_2亦可表成(29)式右邊之形狀。我們又得知：如果B_1，B_2，B_3爲共線，且其中爲二點爲內分點，第三點必爲外分點。其次考慮有二個B點爲外分點的情形。B_1，B_2分別在A_1A_2，A_3A_1之延長的情形，如上述的有四種。先考慮

(i) B_1在A_2A_1方向之延長上，B_3在A_3A_1方向之延長上的情形。如上，適當地選在A_1，A_2，A_3處的質點的質量m_1，m_2，m_3使(9)式成立。此時，如果$m_2 < m_3$，則

(31₁) $$(m_1-m_2)\overrightarrow{B_1}-(m_1-m_3)\overrightarrow{B_3}-(m_3-m_2)\overrightarrow{B_2}'=0 \text{，且}$$
$$(m_1-m_2)-(m_1-m_3)-(m_3-m_2)=0$$

如果$m_3 < m_2$，則

(31₂) $$(m_1-m_3)\overrightarrow{B_3}-(m_1-m_2)\overrightarrow{B_1}-(m_2-m_3)\overrightarrow{B_2}'=0 \text{，且}$$
$$(m_1-m_3)-(m_1-m_2)-(m_2-m_3)=0$$

此處

(32) $$B_2'=\begin{cases}\dfrac{m_3\overrightarrow{A_3}-m_2\overrightarrow{A_2}}{m_3-m_2} \text{，當} m_2 < m_3 \text{時} \\[2ex] \dfrac{m_2A_2-m_3A_3}{m_2-m_3} \text{，當} m_3 < m_2 \text{時}\end{cases}$$

故，B_2'爲直線B_1B_3和邊A_2A_3之交點。因之，$B_2'=B_2$，而B_2可表成(32)之右邊之形狀。當

(ii) B_1在A_1A_2方向之延長上，而B_3在A_1A_3方向之延長上時討論完全與(i)相同。其次考慮

(iii) B_1在A_1A_2方向之延長上，B_3在A_3A_1方向之延長上的情形。此時可適當地選在A_1，A_2，A_3處的質點之質量m_1，m_2，m_3使(15)式成立。故$m_3 < m_1 < m_2$。此時可得

(33) $$(m_2-m_1)\overrightarrow{B_1}+(m_1-m_3)\overrightarrow{B_3}-(m_2-m_3)\overrightarrow{B_2}'=0 \text{，且}$$
$$(m_2-m_1)+(m_1-m_3)-(m_2-m_3)=0$$

此處

(34) $$\overrightarrow{B_2}'=\frac{m_2\overrightarrow{A_2}-m_3\overrightarrow{A_3}}{m_2-m_3}$$

故B_2'爲B_1B_3和A_2A_3之交點。因之$B_2'=B_2$，而B_2亦表成(34)式之右邊之形狀。我們亦可知：B_2必在A_3A_2方向之延長上，而不可能在A_2A_3方向之延長上。當

(iv) B_1在A_2A_1方向之延長上，而B_3在A_1A_3方向之延長上時討論完全與(iii)相同。如上，我們已經證明了：如果B_1，B_2，B_3爲共線，則補助定理1之條件Ⅰ，Ⅱ均成立。故依補助定理1可知(1)式成立。

孟氏定理之一推廣：設$A_1A_2\cdots\cdots A_{n+1}A_1$爲$n$維歐氏空間$E^n$中，不被包含於任何超平面$E^{n-1}$的閉$(n+1)$角形。設點$B_i$ $(i=1,\cdots\cdots\cdots,n)$在閉多角形之邊$A_iA_{i+1}$上，或其延長上。又$B_{n+1}$在$A_{n+1}A_1$上或其延長上。此時$B_1$，$B_2$，$\cdots\cdots$，$B_{n+1}$均被包含$n$維空間$E^n$中的一個超平面$E^{n-1}$之充要條件爲下式之成立：

(35) $$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{A_{n+1}B_{n+1}}{B_{n+1}A_1}=\begin{cases}-1 \text{，當} n \text{爲偶數時} \\ 1 \text{，當} n \text{爲奇數時}\end{cases}$$

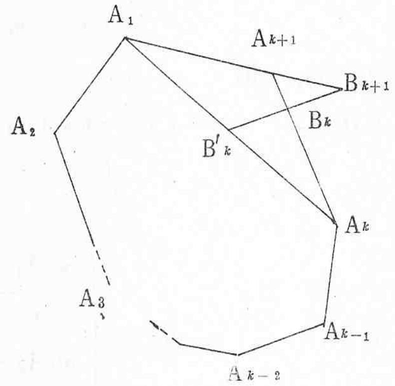
當$n=2$時此爲孟氏定理本身。

當$n=3$時此爲大家所熟悉的一習題。

用數學歸納法的證明：在上面已經證明了定理對於 $n=2$ 時成立。現在假設定理對於 $n=2$，3……，$k-2$，$k-1$ 時成立。想證明定理亦對於 $n=k$ 時成立。為了此目的，假設 $A_1A_2\cdots\cdots A_kA_{k+1}A_1$ 為在 k 維空間 E^k 中而不在任一（$k-1$）維的空間 E^{k-1} 中的一閉（$k+1$）多角形。又假設 B_1，B_2，……，B_{k+1} 在一個（$k-1$）維平直下空間 E^{k-1} 中。我們想先證明

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{A_{k+1}B_{k+1}}{B_{k+1}A_1}=\begin{cases}-1 & \text{當 } k \text{ 為偶數時}\\ 1 & \text{當 } k \text{ 為奇數時}\end{cases}\tag{36}$$

先證明：$A_1A_2\cdots\cdots A_kA_1$ 為在一 E^{k-1} 中的閉 k 角形，而不在任一個 E^{k-2} 中。因若 $A_1A_2\cdots\cdots A_kA_1$ 在一 E^{k-2} 中，則 $A_1A_2\cdots\cdots A_{k+1}A_1$ 必在一 E^{k-1} 中。此與上述假設不合之故。點 A_{k+1} 不屬於包含 A_1，A_2，……A_k 之 E^{k-1} 中。$A_1A_kA_{k+1}$ 為一個二維的平直下空間 E^2。



第七圖

又 $E^2\cup E^{k-1}=E^k$。故 $E^2\cap E^{k-1}$ 為直線 A_1A_k。B_k 屬於 A_kA_{k+1}，B_{k+1} 屬於 $A_{k+1}A_1$。故 B_k，B_{k+1} 不屬於上述 E^{k-1} 中。故有下列二種情形：(a) B_kB_{k+1} 與 A_1A_k 相交於一點 B_k'，或(b) B_kB_{k+1} 與 A_1A_k 平行。現在先考慮(a)之情形。此時 B_1，B_2，……，B_{k-1}，B_k' 在一 E^{k-2} 中。因設 B_1，B_2，……，$B_{k-1}B_k'$ 不在一 E^{k-2} 中，則他們在一個 E^{k-1} 中，此時 B_1，……，B_kB_{k+1} 在 $E^{k-1}\cup B_kB_{k+1}=E^k$ 中（因 B_k，B_{k+1} 不在 E^{k-1} 中）。此與我們的假設不合之故。因為 B_1，B_2，……，$B_{k-1}B_k'$ 在一個 E^{k-2} 中，依歸納法之假定

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\cdots\cdot\frac{A_{k-1}B_{k-1}}{B_{k-1}A_k}\cdot\frac{A_kB_k'}{B_k'A_1}=\begin{cases}-1\text{，當 } k-1 \text{ 為偶數時}\\ 1\text{，當 } k-1 \text{ 為奇數時}\end{cases}\tag{37}$$

另一方面，在三角形 $A_1A_kA_{k+1}$ 中 B_k，B_{k+1}，B_k' 為共線。故依孟氏定理可得：

$$\frac{A_1B_k'}{B_k'A_k}\cdot\frac{A_kB_k}{B_kA_{k+1}}\cdot\frac{A_{k+1}B_{k+1}}{B_{k+1}A_1}=-1\tag{38}$$

由此二式可得：

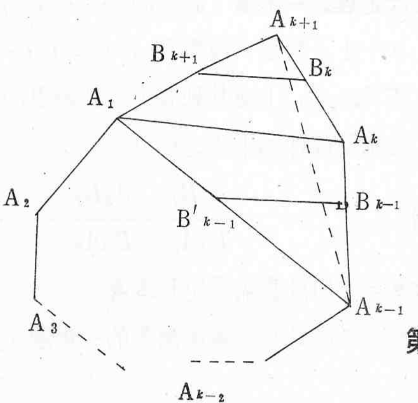
$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{A_{k-1}B_{k-1}}{B_{k-1}A_k}\cdot\frac{A_kB_k'}{B_k'A_1}\left(\frac{A_1B_k'}{B_k'A_k}\cdot\frac{A_kB_k}{B_kA_{k+1}}\cdot\frac{A_{k+1}B_{k+1}}{B_{k+1}A_1}\right)$$

$$=\begin{cases}1\text{，當 } k \text{ 為奇數時}\\ -1\text{，當 } k \text{ 為偶數時}\end{cases}$$

卽得

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{A_{k-1}B_{k-1}}{B_{k-1}A_k}\cdot\frac{A_kB_k}{B_kA_{k+1}}\cdot\frac{A_{k+1}B_{k+1}}{B_{k+1}A_1}=\begin{cases}-1\text{，當 } k \text{ 為偶數}\\ 1\text{，當 } k \text{ 為奇數}\end{cases}\tag{39}$$

(b) B_kB_{k+1} 與 A_1A_k 平行的情形。如上 A_1，A_2……A_k 在一個 E^{k-1} 中而不在任一個 E^{k-2} 中，故 A_1，……，A_{k-1} 必在一個 E^{k-2} 中（因 $k-1$ 個點必在維數 $\leq k-2$ 之空間中）。又 $A_1A_{k-1}A_kA_{k+1}$ 在一個 E^3 中而不在任一 E^2 中。因若在一 E^2 中，則 A_{k+1} 在平面 $A_1A_{k-1}A_k$ 中，故 A_{k+1} 在包含 A_1，A_2，……，A_k 在 E^{k-1} 中。此與假定不合之故。現在 $E^{k-2}\cup E^3=E^k$，故 $E^{k-2}\cap E^3$ 為直線 A_1A_{k-1}。設在平面 $A_1A_{k-1}A_k$ 上經過 B_k 而與 A_1A_k 平行的直線與直線 $A_{k-1}A_1$ 交於點 B_{k-1}'。此時，B_1，B_2，……，B_{k-2}，B_{k-1}' 在一個 E^{k-3} 上。因若 B_1，B_2，……，B_{k-2}，B_{k-1}' 在一個 E^{k-2} 上，則 B_1，B_2，……，B_{k-2}，B_{k-1}'，B_{k-1} 在一個 E^{k-1} 上。因之，



第八圖

B_1，B_2，……，B_{k-1}，B_k，B_{k+1}在一個 E^k 上。此與我們的假定不合之故。因爲B_1，B_2，……，B_{k-2}，B'_{k-1} 在一個 E^{k-3} 上，依歸納法之假定可得

$$(40)\quad \frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\cdots\cdot\frac{A_{k-2}B_{k-2}}{B_{k-2}A_{k-1}}\cdot\frac{A_{k-1}B'_{k-1}}{B'_{k-1}A_1}=\begin{cases}-1，當 k-2 為偶數（即 k 為偶數）\\ \ \ 1，當 k-2 為奇數（即 k 為奇數）\end{cases}$$

現在，因爲 $B_{k-1}B'_{k-1}$ 和 A_1A_k 和 B_kB_{k+1} 三直線互爲平行，可得

$$(41)\quad \frac{A_{k-1}B_{k-1}}{B_{k-1}A_k}=\frac{A_{k-1}B'_{k-1}}{B'_{k-1}A_1}\ ,\ \frac{A_kB_k}{B_kA_{k+1}}=\frac{A_1B_{k+1}}{B_{k+1}A_{k+1}}$$

由(41)之第二式又可得

$$(42)\quad \frac{A_kB_k}{B_kA_{k+1}}\cdot\frac{A_{k+1}B_{k+1}}{B_{k+1}A_1}=1$$

最後由(40)式，(41)之第一式和(42)式可得

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\cdots\cdot\frac{A_{k-2}B_{k-2}}{B_{k-2}A_{k-1}}\cdot\frac{A_{k-1}B_{k-1}}{B_{k-1}A_k}\cdot\frac{A_kB_k}{B_kA_{k+1}}\cdot\frac{A_{k+1}B_{k+1}}{B_{k+1}A_1}=\begin{cases}-1，若 k 為偶數\\ \ \ 1，若 k 為奇數\end{cases}$$

反之假設(36)式成立。我們想用數學歸納法來證明：B_1，B_2，……，B_{k+1}在一個（$k-1$）維的平直下空間 E^{k-1} 上。與上面相同，我們假設A_1，……，A_k 在一個 E^{k-1} 中而不在任何 E^{k-2} 中的。三角形$A_1A_kA_{k+1}$ 不在此 E^{k-1} 中。若

(a) B_kB_{k+1} 與 A_1A_k 相交於點 B_k'，則依孟氏定理可得(38)式。由(36)式和(38)式可得(37)式。故依數學歸納法之假定，B_1，B_2，……B_{k-1}，B_k'在一個 E^{k-2} 中。故，B_1，……，B_{k-1}，B_k，B_{k+1} 在一個 E^{k-1} 中。其次考慮下列情形：

(b) B_kB_{k+1} 與 A_1A_k 平行。此時可得(41)之第二式。由(41)之第二式和(36)式可得

$$(43)\quad \frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\cdots\cdot\frac{A_{k-1}B_{k-1}}{B_{k-1}A_k}=\begin{cases}-1，若 k 為偶數\\ \ \ 1，若 k 為奇數\end{cases}$$

現在與上面一樣，設在三角形$A_1A_{k-1}A_k$ 中經過 B_{k-1}，而平行於直線 A_1A_k 之直線與 A_1A_{k-1} 相交於點 B'_{k-1} 。則得(41)之第一式。由此式和(43)式可得(40)式。因之，由數學歸納法之假定B_1，B_2，……，B_{k-2}，B'_{k-1} 在一個 E^{k-3} 中。故B_1，B_2，……，B_{k-2}，B'_{k-1}，B_{k-1}在一個E^{k-2}中。此 E^{k-2} 亦包含 A_1A_k 。故B_kB_{k+1} 與此 E^{k-2} 平行。故B_1，B_2，……，B_{k-2}，B'_{k-1} ，B_{k-1}，B_k，B_{k+1}被包含於一個 E^{k-1} 中。因之，由數學歸納法定理成立。

注意：B_i 爲 A_iA_{i+1} 之內分點時 $\dfrac{A_iB_i}{B_iA_{i+1}}$ 爲正，B_i 爲 A_iA_{i+1} 之外分點時 $\dfrac{A_iB_i}{B_iA_{i+1}}$ 爲負。由孟氏定理之擴張，如果B_1，B_2，……，B_n，B_{n+1} 在一個 E^{n-1} 中，則下式成立。

$$(35)\quad \frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{A_{n+1}B_{n+1}}{B_{n+1}A_1}=\begin{cases}-1，當 n 為偶數時\\ \ \ 1，當 n 為奇數時\end{cases}$$

此式左邊有（$n+1$）個 $\dfrac{A_iB_i}{B_iA_{i+1}}$ 形狀的因子。如果n爲偶數$n+1$爲奇數故左邊之因子中必有奇數個爲負，偶數個爲正。n爲奇數時（$n+1$）爲偶數故(35)之左邊因子中必有偶數個負和偶數個正的。因之，當B_1，B_2，……，B_{n+1}在一個 E^{n-1} 中，則其中必有偶數個爲內分點（零亦視爲偶數）。

用質量中心概念的一證明：以上我們已經把孟氏定理的推廣以數學歸納法來證明了。但是我們會想起下列疑問：是否孟氏定理之推廣亦可直接用質量中心的概念來證明？ 即是可否找出孟氏定理之推廣用質量中心的證明？ 為答此疑問我們先來證明下列補助定理：

補助定理2：設$A_1A_2\cdots\cdots A_{n+1}A_1$爲在$E^n$ 中，不在其任一個（$n-1$）維平直下空間的一閉（$n+1$）角形。又設在這些頂點，各有質量m_1，m_2，……，m_{n+1}的質點存在。又設B_1，B_2，……，B_{n+1} 分別在邊A_1A_2，A_2A_3，……，$A_{n+1}A_1$ 上或在其延長上。其中有偶數個的B點各爲其所在的邊的頂點處的二質點之質量中心。其外的B點在其所在的邊之延長上，且其處有一適當質量的質點存在，使如果 B_j 在 $A_{j+1}A_j$ 方向之延長上，則

$$\vec{B}_j=\frac{m_j\vec{A}_j-m_{j+1}\vec{A}_{j+1}}{m_j-m_{j+1}},\quad m_{j+1}<m_j$$

成立。如果 B_j 在 A_jA_{j+1} 方向之延長，則

$$\vec{B}_j=\frac{m_{j+1}\vec{A}_{j+1}-m_j\vec{A}_j}{m_{j+1}-m_j},\quad m_j<m_{j+1}$$

成立。此時可證：B_1，B_2，……，B_{n+1}在一個（$n-1$）維的平直下空間中，並且下式成立：

(35)
$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{A_nB_n}{B_nA_{n+1}}\cdot\frac{A_{n+1}B_{n+1}}{B_{n+1}A_1}=\begin{cases}-1\text{，若 }n\text{ 爲偶數}\\ \;\;\,1\text{，若 }n\text{ 爲奇數}\end{cases}$$

證明：設B_{i_1}，……，$B_{i_{2r}}$（r可爲零）爲B點中所有的內分點，則它們可表成如

(44)
$$\vec{B}_{i_1}=\frac{m_{i_1}\vec{A}_{i_1}+m_{i_1+1}\vec{A}_{i_1+1}}{m_{i_1}+m_{i_1+1}}$$

等。其他的（$n+1-2r$）$=S$個點B_{j_1}，B_{j_2}，……，B_{j_s}可表成

(45₁)
$$\vec{B}_{j_1}=\frac{m_{j_1}\vec{A}_{j_1}-m_{j_1+1}\vec{A}_{j_1+1}}{m_{j_1}-m_{j_1+1}},\quad m_{j_1+1}<m_{j_1}$$

或

(45₂)
$$\vec{B}_{j_1}=\frac{m_{j_1+1}\vec{A}_{j_1+1}-m_{j_1}\vec{A}_{j_1}}{m_{j_1+1}-m_{j_1}},\quad m_{j_1}<m_{j_1+1}$$

之形狀。故由(44)可得

(46)
$$(m_{i_1}+m_{i_1+1})\vec{B}_{i_1}=m_{i_1}\vec{A}_{i_1}+m_{i_1+1}\vec{A}_{i_1+1}$$

等。如這些式，其右邊二項之符號相同者，稱爲**同符號式**。從(45)可得

(47₁)
$$(m_{j_1}-m_{j_1+1})\vec{B}_{j_1}=m_{j_1}\vec{A}_{j_1}-m_{j_1+1}\vec{A}_{j_1+1}$$

或

(47₂)
$$(m_{j_1+1}-m_{j_1})\vec{B}_{j_1}=m_{j_1+1}\vec{A}_{j_1+1}-m_{j_1}\vec{A}_{j_1}$$

等。如這些式，其右邊二項之符號相異者，稱爲**異符號式**。因爲有 $2r$ 個內分點我們可得 $2r$ 個同符號式。其外的B點均爲外分點，故我們可得（$n+1-2r$）$=S$ 個異符號式合起來一共有（$n+1$）個式子。特別要注意事情爲每一個 A_i 出現於這些（$n+1$）個式子中有二次而僅有二次。我們又注意：由二個同符號式，如

(48)
$$\begin{cases}(m_{i_1}+m_{i_1+1})\vec{B}_{i_1}=m_{i_1}\vec{A}_{i_1}+m_{i_1+1}\vec{A}_{i_1+1}\\ (m_{i_1+1}+m_{i_1+2})\vec{B}_{i_1+1}=m_{i_1+1}\vec{A}_{i_1+1}+m_{i_1+2}\vec{A}_{i_1+2}\end{cases}$$

可消去$\vec{A}_{i_1+1}$，而得

(49)
$$(m_{i_1}+m_{i_1+1})\vec{B}_{i_1}-(m_{i_1+1}+m_{i_1+2})\vec{B}_{i_1+1}=m_{i_1}\vec{A}_{i_1}-m_{i_1+2}\vec{A}_{i_1+2}$$

卽經過消去的操作，由二個同符號式可得一個異符號式。此時所得異符號式的左邊係數之和等於右邊的係數之和。如

(50)
$$(m_{i_1}+m_{i_1+1})-(m_{i_1+1}+m_{i_1+2})=m_{i_1}-m_{i_1+2}$$

由二個異符號式，如

$$(51)\quad \begin{cases}(m_{j_1}-m_{j_1+1})\vec{B}_{j_1}=m_{j_1}\vec{A}_{j_1}-m_{j_1+1}\vec{A}_{j_1+1}\\(m_{j_1+1}-m_{j_1+2})\vec{B}_{j_1+1}=m_{j_1+1}\vec{A}_{j_1+1}-m_{j_1+2}\vec{A}_{j_1+2}\end{cases}$$

可消去 $\vec{A}_{j_1+1}$ ，而得

$$(52)\quad (m_{j_1}-m_{j_1+1})\vec{B}_{j_1}+(m_{j_1+1}-m_{j_1+2})\vec{B}_{j_1+1}=m_{j_1}\vec{A}_{j_1}-m_{j_1+2}\vec{A}_{j_1+2}$$

即經過消去操作，由二個異符號式可得一個異符號式。此時所得異符號式的左邊之係數之和等於右邊的係數之和。如

$$(53)\quad (m_{j_1}-m_{j_1+1})+(m_{j_1+1}-m_{j_1+2})=m_{j_1}-m_{j_1+2}$$

如果二個異符號式爲

$$(54)\quad \begin{cases}(m_{j_1}-m_{j_1+1})\vec{B}_{j_1}=m_{j_1}\vec{A}_{j_1}-m_{j_1+1}\vec{A}_{j_1+1}\\(m_{j_1+2}-m_{j_1+1})\vec{B}_{j_1+1}=m_{j_1+2}\vec{A}_{j_1+2}-m_{j_1+1}\vec{A}_{j_1+1}\end{cases}$$

則消去 $\vec{A}_{j_1+1}$ 可得

$$(55)\quad (m_{j_1}-m_{j_1+1})\vec{B}_{j_1}-(m_{j_1+2}-m_{j_1+1})\vec{B}_{j_1+1}=m_{j_1}\vec{A}_{j_1}-m_{j_1+2}\vec{A}_{j_1+2}$$

而且

$$(56)\quad (m_{j_1}-m_{j_1+1})-(m_{j_1+2}-m_{j_1+1})=m_{j_1}-m_{j_1+2}$$

故，結果與上述的相同。現在考慮一個同符號式和一個異符號式。如

$$(57)\quad \begin{cases}(m_{i_1}+m_{i_1+1})\vec{B}_{i_1}=m_{i_1}\vec{A}_{i_1}+m_{i_1+1}\vec{A}_{i_1+1}\\(m_{i_1+1}-m_{i_1+2})\vec{B}_{i_1+1}=m_{i_1+1}\vec{A}_{i_1+1}-m_{i_1+2}\vec{A}_{i_1+2}\end{cases}$$

由此二式消去 A_{i_1+1} 可得

$$(58)\quad (m_{i_1}+m_{i_1+1})\vec{B}_{i_1}-(m_{i_1+1}-m_{i_1+2})\vec{B}_{i_1+1}=m_{i_1}\vec{A}_{i_1}+m_{i_1+2}\vec{A}_{i_1+2}$$

即經過消去操作，由一個同符號式和一個異符號式，可得一個同符號式。又此同符號式的左邊的係數之和等於右邊的係數之和。如

$$(59)\quad (m_{i_1}+m_{i_1+1})-(m_{i_1+1}-m_{i_1+2})=m_{i_1}+m_{i_1+2}$$

有了上面的準備之後補助定理 2 可容易地進行如下：如上，我們有 $2r$ 個同符號式和 $(n+1-2r)=s$ 個異符號式。一共有 $(n+1)$ 個式子。先由 $2r$ 個同符號式用消去操作，可從其中 $2u$ 個式子消去 u 個 A 而得 u 個異符號式，使從其剩下的 $(2r-2u)=2v$ 個同符號式不能再消去任何 A。如果 $v=0$（即 $u=r$ ，故沒有同符號式剩下），則得一組 $s+u=n+1-2r+r=n+1-r$ 個異符號式。此組包含 $(n+1-r)$ 個 A（因爲 r 個 A 已被消去）。從這一組消去一個 A，就得少一個異符號式的式組。因之，組中異符號式的數目與其所包含的 A 的個數相同。繼續消去操作，最後可得包含二個 A 的二個異符號式，而我們可同時消去這二個 A，這樣可得 $\vec{B}_i$ 的一線性組合等於零，而且其係數和亦等於零。如果 $v\neq 0$ ，則上述的 $2v$ 個同符號式中，因爲不能再消去任何 A，而且每一個式子都包含二個 A，所以一共含有 $4v$ 個 A。在上面所得的 u 個新的異符號式和本來就有的 $(n+1-2r)=s$ 個異符號式合起來一共有 $s+u$ 個異符號式。從這些 $s+u$ 個異符號式，經過消去操作可漸漸減少 A 之個數和式子的個數。最後可得不能再消去任何 A 的一組異符號式。這一組異符號式不可能包含不在上述最後一組 $2v$ 個同符號式中的 A。因爲有一個 A 在此異符號式組中，則表此 A 還沒有被消去。又因此組不能再消去任何 A，此組不包含第二個的同一 A。因之，此 A 必出現於上述的 $2v$ 個同符號式所成的式組之故。同理在 $2v$ 個同符號式組出現的 A 亦均必在此異符號式組中出現。因此，此異符號式組亦必有 $2v$ 個式子，且包含 $4v$ 個 A。現在從這一組同符號式和這一組異符號式（各組包含 $2v$ 個式子），將一個同符號式配一個異符號式來消去 $2v$ 個 A 可得一個包含 $2v$ 個同符號式，而沒有異符號式的組。這一組包含 $2v$ 個 A。如果 $v=1$ ，則有二個同符號式包含二個 A。故從這二個同符號式可同時消去這二個 A。這樣就得一個關於 $\vec{B}_i$ 的線性組合等於零的式子，並且其係數之和亦等於零。如果 $v>1$ ，則從

這些 $2v$ 個同符號式所成的組消去 v 個 A，可得含有 v 個 A 的 v 個異符號式所成的組。因爲每一個出現於二個式子，從這一組繼續消去操作。則消去一個 A 就得式子的數目少一的異符號式組。這樣繼續下去，最後可得包含二個 A 的二個異符號式所成的組。從這二式可同時消去這二個 A。如此我們可得關於 $\overrightarrow{B_1}$，$\overrightarrow{B_2}$，……，$\overrightarrow{B_{n+1}}$ 的線性組合等於零。其係數的和亦等於零，因爲對每一次消去操作後所得的式子的二邊的係數和爲相等之故。這事實表示點 B_1，B_2，……，B_{n+1} 在同一個 $n-1$ 維的平直下空間中。

現在，由與(44)相同的式子可得

$$\frac{A_iB_i}{B_iA_{i+1}}=\frac{m_{i+1}}{m_i} \tag{60}$$

由與(45)相同的式子可得

$$\frac{A_jB_j}{B_jB_{j+1}}=-\frac{m_{j+1}}{m_j} \tag{61}$$

故得

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{A_nB_n}{B_nA_{n+1}}\cdot\frac{A_{n+1}B_{n+1}}{B_{n+1}A_1}=\left(\pm\frac{m_2}{m_1}\right)\left(\pm\frac{m_3}{m_2}\right)\ \cdots\ \left(\pm\frac{m_{n+1}}{m_n}\right)\left(\pm\frac{m_1}{m_{n+1}}\right)$$

在此式右邊中有（$n+1$）個±符號。因爲 B 點中有偶數個點爲內分點，其中有偶數個要取＋號，其餘者要取－號。故若 n 爲奇數上式中亦有偶數個－號，若 n 爲偶數，上式中有奇數個－號。因之可得

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{A_{n+1}B_{n+1}}{B_{n+1}A_1}=\begin{cases}-1\text{，若 } n \text{ 爲偶數}\\ \ \ 1\text{，若 } n \text{ 爲奇數}\end{cases}$$

如此補助定理 2 之證明完了。

注意：在上面補助定理 2 之證明中，我們假設了，B 點中其爲內分點者有偶數個。如果我們假設內分點的 B 點有奇數個，即爲 $2r+1$ 個，則我們可得（$2r+1$）個同符號式，其餘的（$n+1-2r-1$）$=n-2r$ 個爲異符號式。如上從這些 $2r+1$ 個同符號式中的 $2u$ 個式子可消去 u 個 A，使從其剩下的（$2r+1-2u$）$=2$（$r-u$）$+1\equiv 2v+1$ 個同符號式不能再消去任何 A。此時如果 $v=0$ 即 $u=r$，則只剩下一個同符號式又新得 r 個異符號式。故連本來就有的 $n-2r$ 個異符號式加起來一共有（$n-r$）個異符號式。這些式子中有（$2n+2-2r-2$)$=2$（$n-r$）個 A（不一定相異）出現。其實這裏有（$n-r-1$）個 A 均出現二次其餘二個 A 出現一次。這二個 A 就是在同符號式中出現者。從此組 $n-r$ 個異符號式消去（$n-r-1$）個 A 可得一個異符號式，其中所包含的二個 A 就是在同符號式中出現者。最後，從上述的一個同符號式和這個異符號式可再消去一個 A。如此可表另外一個 A 爲 B_i 等的線性組合的式子。其次，如果 $v\neq 0$，則我們有上述的（$2v+1$）個同符號式其中包含 $4v+2$ 個 A 和（$n-2r$）$+u$ 個異符號式。其中（$n-2r$）個是本來的。u 個是經過消去操作後新得者。與在補助定理 2 之證明中所做的一樣，我們可從這一組異符號式經過消去操作可得一組不可能再消去任何 A 的異符號式組。這一組中有（$2v+1$）個異符號式而包含 $4v+2$ 個 A。其次從這一組同符號式和這一組異符號式，將一個同符號式配一個異符號式來消去 $2v+1$ 個 A 可得一個包含（$2v+1$）個同符號式的式組。其中（$4v+2$）個 A 出現。從這一組再消去 v 個 A 後就得一個同符號式和 v 個異符號式。這一組異符號式中 A 出現 $2v$ 次。即（$v-1$）個 A 各出現二次其餘二個 A 各出現一次。這二個 A 是在另一個同符號式中出現者。從這一組（v 個）異符號式再消去出現二次的（$v-1$）個 A 後就得一個異符號式，其所包含的二個 A 爲在同符號式中出現者。從上述的最後一個同符號式和此異符號式消去一個 A 就可把另一個 A 表成 $\overrightarrow{B_i}$ 等之線性組合。且其式兩邊的係數和相等。

孟氏定理之推廣之證明（利用質量中心概念的）：先假定(35)式成立。我們想證明 B_1，B_2，……，B_{n+1} 在一個（$n-1$）維的平直下空間中。在用數學歸納法的證明之後面，我們已經注意了如果(35)式

成立，則B點中必有偶數個是內分點的。現在決定在 A_1 和 A_2 處的質點之質量使如果 B_1 在邊 A_1A_2 上，則$\overrightarrow{B_1}=\dfrac{(m_1\overrightarrow{A_1}+m_2\overrightarrow{A_2})}{(m_1+m_2)}$，故$\dfrac{A_1B_1}{B_1A_2}=\dfrac{m_2}{m_1}$。如果 B_1 在 A_1A_2 方向之延長上，則$\overrightarrow{B_1}=\dfrac{m_2\overrightarrow{A_2}-m_1\overrightarrow{A_1})}{(m_2-m_1)}$，如果 $\overrightarrow{B_1}$ 在 A_2A_1 方向之延長上，則$\overrightarrow{B_1}=\dfrac{(m_1\overrightarrow{A_1}-m_2\overrightarrow{A_2})}{(m_1-m_2)}$。故不論那一情形發生，均有$\dfrac{A_1B_1}{B_1A_2}=-\dfrac{m_2}{m_1}$的關係成立。其次決定在 A_3 處的質點之質量使如果 B_2 在 A_2A_3 上，則 $\overrightarrow{B_2}=\dfrac{(m_2\overrightarrow{A_2}+m_3\overrightarrow{A_3})}{(m_2+m_3)}$，故$\dfrac{A_2B_2}{B_2A_3}=\dfrac{m_3}{m_2}$ 成立。如果 B_2 在 A_2A_3 方向之延長上，則$\overrightarrow{B_2}=\dfrac{(m_3\overrightarrow{A_3}-m_2\overrightarrow{A_2})}{(m_3-m_2)}$，如果 B_2 在 A_3A_2 方向之延長上，則$\overrightarrow{B_2}=\dfrac{(m_2\overrightarrow{A_2}-m_3\overrightarrow{A_3})}{(m_2-m_3)}$。故不論那一情形發生均有$\dfrac{A_2B_2}{B_2A_3}=-\dfrac{m_3}{m_2}$之關係。如此繼續下去，順次決定在 A_4 處的質點之質量等等。最後決定在點 A_{n+1} 處的質點的質量中心，使如果 B_n 在 A_nA_{n+1} 上，則$\overrightarrow{B_n}=\dfrac{(m_n\overrightarrow{A_n}+m_{n+1}\overrightarrow{A_{n+1}})}{(m_n+m_{n+1})}$，故$\dfrac{A_nB_n}{B_nA_{n+1}}=\dfrac{m_{n+1}}{m_n}$成立。如果 B_n 在 A_nA_{n+1} 方向之延長上，則$\overrightarrow{B_n}=\dfrac{(m_{n+1}\overrightarrow{A_{n+1}}-m_n\overrightarrow{A_n})}{(m_{n+1}-m_n)}$，如果 B_n 在 $A_{n+1}A_n$ 方向之延長上，則$\overrightarrow{B_n}=\dfrac{(m_n\overrightarrow{A_n}-m_{n+1}\overrightarrow{A_{n+1}})}{(m_n-m_{n+1})}$。故不論那一情形發生均有$\dfrac{A_nB_n}{B_nA_{n+1}}=-\dfrac{m_{n+1}}{m_n}$之關係成立。現在把上面所得的諸關係代入於(35)式，則得

$$\left(\pm\frac{m_2}{m_1}\right)\left(\pm\frac{m_3}{m_2}\right)\cdots\cdots\left(\pm\frac{m_{n+1}}{m_n}\right)\left(\frac{A_{n+1}B_{n+1}}{B_{n+1}A_1}\right)=\pm 1$$

故得

$$(62)\qquad \frac{A_{n+1}B_{n+1}}{B_{n+1}A_1}=\pm\frac{m_1}{m_{n+1}}$$

故，如果 B_{n+1} 在邊 $A_{n+1}A_1$ 上，則$\overrightarrow{B_{n+1}}=\dfrac{(m_{n+1}\overrightarrow{A_{n+1}}+m_1\overrightarrow{A_1})}{(m_{n+1}+m_1)}$，且$\dfrac{A_{n+1}B_{n+1}}{B_{n+1}A_1}=\dfrac{m_1}{m_{n+1}}$。如果$B_{n+1}$在 $A_{n+1}A_1$ 方向之延長上，則$\overrightarrow{B_{n+1}}=\dfrac{m_1\overrightarrow{A_1}-m_{n+1}\overrightarrow{A_{n+1}}}{m_1-m_{n+1}}$。如果 B_{n+1} 在 A_1A_{n+1} 方向之延長上，則$\overrightarrow{B_{n+1}}=\dfrac{(m_{n+1}\overrightarrow{A_{n+1}}-m_1\overrightarrow{A_1})}{(m_{n+1}-m_1)}$。且不論那一情形發生均有$\dfrac{A_{n+1}B_{n+1}}{B_{n+1}A_1}=-\dfrac{m_1}{m_{n+1}}$成立。故，補助定理 2 的所有條件均成立。故，依補助定理 2，B_1，B_2，B_3，……，B_{n+1} 諸點在一個（$n-1$）維的平直下空間中。

反之，假設B_1，B_2，……，B_{n+1} 在一個（$n-1$）維的平直下空間 E^{n-1} 中，我們想證明(35)式成立。如上述我們可適當地決定在點A_1，A_2，……，A_{n+1} 處的質點的質量m_1，m_2，……，m_{n+1} 使B_1，……，B_n 可表成如上所寫出來的形狀。我們想證明 B_{n+1} 也可表成上述的形狀。假設 B_{n+1} 不可能表成上述的形狀，則可找出一正數m_1'使$\overrightarrow{B_{n+1}}=\dfrac{(m_{n+1}\overrightarrow{A_{n+1}}+m_1'\overrightarrow{A_1})}{(m_{n+1}+m_1')}$ 或 $\overrightarrow{B_{n+1}}=\dfrac{(m_{n+1}\overrightarrow{A_{n+1}}-m_1'\overrightarrow{A_1})}{(m_{n+1}-m_1')}$，$m_1'<m_{n+1}$ 或 $\overrightarrow{B_{n+1}}=\dfrac{(m_1'\overrightarrow{A_1}-m_{n+1}\overrightarrow{A_{n+1}})}{(m_1'-m_{n+1})}$，$m_{n+1}<m_1'$中之一成立。因為其討論方法相同，故我們不妨假設最後一個表法成立。此時我們可得例如下列的一組式子：

$$(63)\quad \begin{cases} (m_1-m_2)\overrightarrow{B_1}=m_1\overrightarrow{A_1}-m_2\overrightarrow{A_2} \\ (m_2+m_3)\overrightarrow{B_2}=m_2\overrightarrow{A_2}+m_3\overrightarrow{A_3} \\ (m_4-m_3)\overrightarrow{B_3}=m_4\overrightarrow{A_4}-m_3\overrightarrow{A_3} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (m_n-m_{n+1})\overrightarrow{B_n}=m_n\overrightarrow{A_n}-m_{n+1}\overrightarrow{A_{n+1}} \\ (m_1'-m_{n+1})\overrightarrow{B_{n+1}}=m_1'\overrightarrow{A_1}-m_{n+1}\overrightarrow{A_{n+1}} \end{cases}$$

由此組的第一及第二式消去 $\overrightarrow{A_2}$ 可得

$$(64)\quad (m_1-m_2)\overrightarrow{B_1}+(m_2+m_3)\overrightarrow{B_2}=m_1\overrightarrow{A_1}+m_3\overrightarrow{A_3}$$

由(63)組第三式和(64)式消去 $\overrightarrow{A_3}$ 可得

$$(65)\quad (m_1-m_2)\overrightarrow{B_1}+(m_2+m_3)\overrightarrow{B_2}+(m_4-m_3)\overrightarrow{B_3}=m_1\overrightarrow{A_1}+m_4\overrightarrow{A_4}$$

注意：經每一消去操作後所得的式子的左邊之係數和與右邊的係數和相等。例如，在(64)及(65)式有下列關係：

$$(66)\quad (m_1-m_2)+(m_2+m_3)=m_1+m_3$$

$$(67)\quad (m_1-m_2)+(m_2+m_3)+(m_4-m_3)=m_1+m_4$$

如此繼續下去逐次消去 A_4，A_5，……，A_{n+1} ，則最後可得下列形狀的式子：

$$(68)\quad l_1\overrightarrow{B_1}+l_2\overrightarrow{B_2}+\cdots\cdots+l_n\overrightarrow{B_n}+l_{n+1}\overrightarrow{B_{n+1}}=(m_1'\pm m_1)\overrightarrow{A_1}$$

此處

$$(69)\quad l_1+l_2+\cdots\cdots+l_n+l_{n+1}=m_1'+m_1$$

或

$$(70)\quad l_1+l_2+\cdots\cdots+l_n+l_{n+1}=m_1'-m_1$$

設(70)式成立。又設 $m_1'-m_1\neq 0$。則得

$$l_1\overrightarrow{B_1}+l_2\overrightarrow{B_2}+\cdots\cdots+l_n\overrightarrow{B_n}+l_{n+1}\overrightarrow{B_{n+1}}=(m_1'-m_1)\overrightarrow{A_1}$$
$$-(l_1+l_2+\cdots\cdots+l_n+l_{n+1})\overrightarrow{B_1}=(m_1'-m_1)\overrightarrow{B_1}$$

把此二式邊邊相減，則得

$$(71)\quad l_2(\overrightarrow{B_2}-\overrightarrow{B_1})+\cdots\cdots+l_{n+1}(\overrightarrow{B_{n+1}}-\overrightarrow{B_n})=(m_1'-m_1)(\overrightarrow{A_1}-\overrightarrow{B_1})$$

(71)式表示點 A_1 在 B_1，B_2，……，B_{n+1} 所在的 E^{n-1} 上。 A_1B_2 在 E^{n-1} 上故 A_2 亦在 E^{n-1} 上。如此繼續下去，得知 A_3，……，A_{n+1} 均在此 E^{n-1} 上。此與我們的假設不合。故 $m_1'=m_1$ 必須成立。即 B_{n+1} 可表成 $B_{n+1}=\dfrac{(m_{n+1}\overrightarrow{A_{n+1}}+m_1\overrightarrow{A_1})}{(m_{n+1}+m_1)}$ 或 $\overrightarrow{B_{n+1}}=\dfrac{(m_{n+1}\overrightarrow{A_{n+1}}-m_1\overrightarrow{A_1})}{(m_{n+1}-m_1)}$ ，抑或 $\overrightarrow{B_{n+1}}=\dfrac{(m_1\overrightarrow{A_1}-m_{n+1}\overrightarrow{A_{n+1}})}{(m_1-m_{n+1})}$ 之形狀。

其次，我們想證明如果 B_1，B_2，……，B_{n+1} 在一個 E^{n-1} 上，則所有 B 點中必有偶數個 B 點爲內分點。如果假設有奇數個爲內分點，則在補助定理 2 之證明後面的注意我們已知了必有一點 A_{i_0} 可表成(68)式之形狀，並且其二邊的係數之和相等。故能與上面同樣證明 A_{i_0} 必在包含 B_1，……，B_{n+1} 的 E^{n-1} 上。因之，所有的 A 點均在 E^{n-1} 上。此與我們的假設不合。因之 B 點中必有偶數個是內外點。這樣子，補助定理 2 之所有條件均成立。故依補助定理 2 ，(35)式必須成立。

（本文作者為本所研究員）