簡易線性代數(七)

二次形與二次曲線、二次曲面

賴漢卿

從國中起就有 2 次函數：

$$f(x)=ax^2+2bx+c$$

將它寫成升冪式：

$$c+2bx+ax^2$$

則 $f(x)$ 可寫成矩陣表示：

(7.1) $$f(x)=[\,1\,,\,x\,]\begin{bmatrix} c & b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

同樣的關於 x_1, x_2 的二次齊次式也可寫成同形式：

(7.2) $$\begin{aligned} f(x_1,x_2) &= cx_1^2+2bx_1x_2+ax_2^2 \\ &= [\,x_1,\,x_2\,]\begin{bmatrix} c & b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

像這樣的 2 次形，在數學的諸方向，及應用科學上都常會遇到的。下面主要考慮的部分也是矩陣（方陣）利用二次形變成標準化的問題

§7.1 二次函數

在上一章（第六章）我們講了對稱變換（即 $A=A^t$）

$$<A\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>=<\boldsymbol{x}\,,\,A\boldsymbol{y}>;\quad A=(a_{ij}),\quad a_{ij}=a_{ji}$$

其中令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，則

(7.3) $$<A\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}>=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2+2\sum_{i\ \ j}a_{ij}x_ix_j$$

一般我們稱之爲 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 的二次形，(7.1)，(7.2) 都是 (7.3) 的特別情形。在一般空間（3 維）上若 $\boldsymbol{x}=(x\,,\,y\,,\,z)$，而

(7.4) $$A=\begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{pmatrix}$$

則

$$<A\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x}>=ax^2+by^2+cz^2+2hxy+2gzx+2fyz$$

$z=1$ 代入上式則 $<A\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x}>=0$ 爲一般平面上之二次曲線的方程式。這裡 (7.4) 的 A 是對稱矩陣，由前一章所學，我們知道可得 A 對角線化，故取特別情形

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad (\text{仍然是對稱矩陣})$$

時

$$\langle A\boldsymbol{x}\ ,\ \boldsymbol{x} \rangle = ax^2 + by^2 + cz^2$$

就是最簡單之二次形。一般取

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{時，}$$

$$\langle A\boldsymbol{x}\ ,\ \boldsymbol{x} \rangle = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$$

就是二次形的標準形。

在高中常有將二次曲線化成標準形，事實上是一種矩陣的對角線化問題。

今若 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^t$ 是關於某一正規直交基底的坐標，施以坐標變換將 $\boldsymbol{x}$ 換成新坐標 X_1，X_2，$\cdots X_n$，以 $\boldsymbol{X}$ 表示，可寫作

$$(7.5) \qquad \begin{cases} x_1 = l_{11} X_1 + l_{12} X_2 + \cdots + l_{1n} X_n \\ x_2 = l_{21} X_1 + l_{22} X_2 + \cdots + l_{2n} X_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = l_{n1} X_1 + l_{n2} X_2 + \cdots + l_{nn} X_n \end{cases}$$

該係數矩陣以 L 表示，則

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= L\boldsymbol{X} \\ \langle A\boldsymbol{x}\ ,\ \boldsymbol{x} \rangle &= \langle A(L\boldsymbol{X}),\ L\boldsymbol{X} \rangle \\ &= \langle L^t (AL) \boldsymbol{X}\ ,\ \boldsymbol{X} \rangle \\ &= \langle L^t AL\boldsymbol{X}\ ,\ \boldsymbol{X} \rangle \end{aligned}$$

故矩陣 A 的二次形，依變換 (7.4) 變化，則成爲 $L^t AL$ 的新 2 次形。如果 A 爲對稱，則不論 L 是否對稱，$L^t AL$ 恒是對稱。

因此二次形 $(Ax\,;\,x)$ 依 (7.5) 能化成簡明的問題，我們還要適當的取 P 使 $P^t AP$ 變成爲最簡單矩陣的問題就是了。

如果 L 限制爲直交矩陣，即

$$L^t = L^{-1}$$

則

$$L^{-1} AL$$

就變成很簡單的形式，例如這個矩陣成對角線矩陣，則二次形就變成只含 2 次項之和了。

先就 2 個變數之二次形來說明

§7.2 二個變數之二次形與矩陣

本節 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 爲給定的正規直交基底，給與對稱矩陣

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\quad a_{12}=a_{21}$$

爲關於 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的線性變換 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$。其坐標表示即爲

$$\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2 \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2 \end{cases}$$

此時

$$\langle A\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle=[\,x_1,\ x_2\,]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$
$$=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2$$

依上一章所學過，A的固有值所對應的固有向量，可作成新的正規直交基底$\boldsymbol{e}'_1$，$\boldsymbol{e}_2{}'$，並得基底的坐標變換爲L，此矩陣L爲直交矩陣（即$L^t=L^{-1}$）於是得關於新基底的變換$\widetilde{A}$之坐標表示：

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix}=\widetilde{A}\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix},\qquad \widetilde{A}=L\,AL^t=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

這是二個變數的二次形

$$f(\,x_1,\ x_2\,)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2$$

變成標準形爲

(7.6)　　$$f=\lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2$$

（λ_1，λ_2一定是實數已如§6.2所述）。這個圖形與λ_1，λ_2的符號有密切關係，就像高中所講的二次曲線方程式化成標準形一樣，如果f＝常數$c>0$，我們可分成

(i)　$\lambda_1=\lambda_2$時，表示一個圓。

(ii)　$\lambda_1\neq\lambda_2$且都是正時，表示一橢圓。

(iii)　λ_1與λ_2符號相反時，表示一雙曲線。

(iv)　$\lambda_2=0$（或$\lambda_1=0$）時，都表示直線。

不過這個情形f若非常數，則$f=x_1^2$相當於單變數之二次形，此時就是一拋物線。

如果上述諸情形，f不是常數，則(7.6)表示：f是兩個變數的函數，它所表現的圖形爲空間的曲面，此時

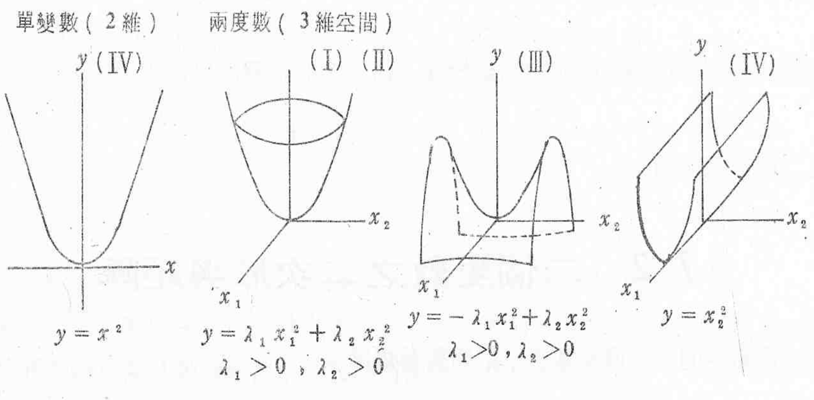
(i)　$\lambda_1=\lambda_2$爲橢圓拋物面，平行於（x_1，x_2）平面之截線爲圓。

(ii)　$\lambda_1\neq\lambda_2$且都是正，也是橢圓拋物面，不過平行於（x_1，x_2）之平面截線爲橢圓。

(iii)　$\lambda_1\cdot\lambda_2<0$爲雙曲拋物面

(iv)　就是　$f=x_1^2$　或　$f=x_2^2$，前者爲單變數的拋物線，後者爲拋物柱面。

請參照下圖：



例1　試將二次形

$$f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2$$

化成標準形

解：$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$，其固有方程式為 $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$

所以 $\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = 9$，即 $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$，而新二次形為

$$f = x_1'^2 + 9x_2'^2$$

如果欲求標準形的新基底，則解聯立方程式

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{a}_1 = 0$$

即如
$$\begin{cases} (5-\lambda)l + 4m = 0 \\ 4l + (5-\lambda)m = 0 \end{cases}$$

以 $\lambda = \lambda_1 = 1$ 及 $\lambda = \lambda_2 = 9$ 代入解之，並將其解正規化乃得一新基底向量：

$$\boldsymbol{e}_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \boldsymbol{e}_2' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

於是 $\boldsymbol{x} = L^t\boldsymbol{x}'$ 為

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_1' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_2' \\ x_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}x_1' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_2' \end{cases}, \quad L = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

如果將上式直接代入 $f(x_1, x_2)$ 也一樣可得標準形。

註：依變換 $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ 的固有向量所定義的直線稱為原二次形的**主軸**。

例2　試將二次曲線

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9$$

標準化，試問此表示什麼曲線？

解：如例1得

$$\widetilde{x}_1^2 + 9\widetilde{x}_2^2 = 9 \qquad 即 \quad \frac{\widetilde{x}_1^2}{9} + \frac{\widetilde{x}_2^2}{1} = 1$$

表示一 x_1x_2 平面上的橢圓。其主軸方向是由固有值1與9所對應的固有向量的方向，如前例所求得主軸的單位向量為

$$\boldsymbol{e}_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \boldsymbol{e}_2' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

如果不求主軸方向，只需求標準形，則題目變成很單純，即只要求出變換的固有值馬上便能寫出變換後的標準形來。

在二次形之標準形的係數 λ_1，λ_2 稱為該形的**特徵值**（那是原來的固有值，故有的人稱固有值為特徵值）蓋由 λ_1，λ_2 可顯出二次形的特性來，如同例1前所說明的。

當 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 時，二次形有一組互為垂直之主軸。

當 $\lambda_1 = \lambda_2$ 時，任何直線都可選做主軸。

當我們對於特徵值有所認識之後，就可決定此形所取之值的上、下限。例如二次形依某正規直交基

底給成

$$f = a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2$$

時，可取適當的正規直交基底，使之變成（標準形）

$$f = \lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \lambda_2 \tilde{x}_2^2$$

若 $\lambda_1 \leq \lambda_2$ ，則

$$\lambda_1 (\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2) \leq \lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \lambda_2 \tilde{x}_2^2 \leq \lambda_2 (\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2)$$

因 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 及 $\tilde{\boldsymbol{e}}_1$, $\tilde{\boldsymbol{e}}_2$ 都是正規直交基底，所以 $\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 = x_1^2 + x_2^2$

故

$$\lambda_1 (x_1^2 + x_2^2) \leq f \leq \lambda_2 (x_1^2 + x_2^2) \tag{7.7}$$

若 $\tilde{x}_2 = 0$，則 f 之值與其下限一致，若 $\tilde{x}_1 = 0$，則 f 之值與其上限一致。

在單位圓 $x_1^2 + x_2^2 = 1$ 上(7.7)就變成特別單純：

$$\lambda_1 \leq f \leq \lambda_2$$

換句話說特徵值是二次形在單位圓上的上限與下限。

若 $\lambda_1 > 0$ ，$\lambda_2 > 0$ ，則 f 恒取正，此時二次形稱爲**正定符號**。

若 $\lambda_1 < 0$ ，$\lambda_2 < 0$ ，則 f 恒取負，此時二次形稱爲**負定符號**。

在正定或負定二次形中 λ_1 ，λ_2 都是正或都是負。

如果 $\lambda_2 > \lambda_1 \geqslant 0$ ，則二次形稱爲**正半定符號**（positive semidefinite）

如果 $0 \geqslant \lambda_2 > \lambda_1$ ，則二次形稱爲**負半定符號**（negative semidefinite）

例3　$x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2$ 是正值二次形，由固有方程式

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

求得特徵值　　$\lambda_1 = \dfrac{1}{2}$，　$\lambda_2 = \dfrac{3}{2}$

故在單位圓　$x_1^2 + x_2^2 = 1$　上

$$\frac{1}{2} \leqslant x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 \leqslant \frac{3}{2}$$

§7.3　三變數的二次形與矩陣

下面我們來考慮3個變數的二次形，由(7.3)

$$f = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + 2a_{23} x_2 x_3 \tag{7.8}$$

下面要討論的大都與二變數的情形平行。設 x_1, x_2, x_3 是關於正規直交基底 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 的坐標系，即點 $M(x_1, x_2, x_3)$ 考慮向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐標，而 f 就是在空間之點 $M(x_1, x_2, x_3)$ 的二次形的值。(7.8) 可以寫作

$$\begin{aligned} f = x_1 &(a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3) \\ &+ x_2 (a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3) \\ &+ x_3 (a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3) \end{aligned}$$

但　$a_{12}=a_{21}$ ，$a_{13}=a_{31}$ ，$a_{23}=a_{32}$ 則

$$f=(x_1,\ x_2,\ x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$=\boldsymbol{x}\cdot A\boldsymbol{x}$$

$$=\langle \boldsymbol{x}\ ,\ A\boldsymbol{x}\rangle$$

這個變換的矩陣A是對稱矩陣。設λ_1，λ_2，λ_3爲其固有值（特徵值），我們已知道存在3個互相垂直之固有向量對應於此固有值。將此三個固有向量正規化後做爲新基底$\widetilde{\boldsymbol{e}}_1$，$\widetilde{\boldsymbol{e}}_2$，$\widetilde{\boldsymbol{e}}_3$，則關於新基底的二次形之矩陣爲對角線矩陣

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

此時2次形的標準形爲

$$f=\lambda_1\,\widetilde{x}_1^{\,2}+\lambda_2\,\widetilde{x}_2^{\,2}+\lambda_3\,\widetilde{x}_3^{\,2}$$

λ_1，λ_2，λ_3 爲A的固有值，也稱爲**二次形的特徵值**。固有向量對應於λ_1，λ_2，λ_3 是決定二次形的主軸。

要將二次形變成標準形，就是將原基底變成爲在二次形的互相垂直之主軸的基底，這個新基底的求法如前已講過數次了，我們不預備重複太多。

如果λ_1，λ_2，λ_3 都不相等，則二次形的主軸必定兩兩互相垂直 。

若$\lambda_1\neq\lambda_2=\lambda_3$ ，則λ_1對應唯一的主軸，而$\lambda_2=\lambda_3$所對應的主軸有無限多，都與第一主軸垂直，因此只要取其中互相垂直之一組直線與第一主軸構成一正規直交系便得 。

若$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$，則任何正規直交系都是$\lambda x_1^2+\lambda x_2^2+\lambda x_3^2$ 的主軸（$\lambda=\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$）。

例4　試將下面二次形標準化

$$f=7x_1^2+6x_2^2+5x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$$

解：所給之二次形的矩陣爲

$$A=\begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$ （這是第六章例2的矩陣）

此矩陣的固有值爲 $\lambda_1=3$ ，$\lambda_2=6$ ，$\lambda_3=9$ ，如上一章例2求得之新基底爲

$$\boldsymbol{i}=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right),\quad \boldsymbol{j}=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right),\quad \boldsymbol{k}=\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$$

故關於新基底的二次形之標準形爲

$$f=3\widetilde{x}_1^{\,2}+6\widetilde{x}_2^{\,2}+9\widetilde{x}_3^{\,2}$$

註：本例只求標準形，則不需求此新基底 。

如一般空間的坐標以（x ，y ，z）表示，(7.8)之f=常數c ，則所表示的二次形

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xy+2a_{23}yz=c$$

是一個二次曲面 。此時曲面標準化的問題就是將上式左邊的二次形標準化，也就是要將曲面的主軸變成正規直交基底$\boldsymbol{i}$ ，$\boldsymbol{j}$ ，$\boldsymbol{k}$ 。

例5 二次方程式

$$7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz=18$$

是定義一曲面，試將上式標準化，並試看出表示的曲面是什麼？

解： A 如例 4 ，其固有值爲 $\lambda_1=3$ ，$\lambda_2=6$ ，$\lambda_3=9$ 。所求新坐標基底爲例 4 的 $\boldsymbol{i}$ ，$\boldsymbol{j}$ ，$\boldsymbol{k}$ ，因此坐標變換爲

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{3}\tilde{x}+\dfrac{2}{3}\tilde{y}-\dfrac{2}{3}\tilde{z} \\[2ex] y=\dfrac{2}{3}\tilde{x}+\dfrac{1}{3}\tilde{y}+\dfrac{2}{3}\tilde{z} \\[2ex] z=\dfrac{2}{3}\tilde{x}-\dfrac{2}{3}\tilde{y}-\dfrac{1}{3}\tilde{z} \end{cases}$$

曲面的標準形爲：

$$3\tilde{x}^2+6\tilde{y}^2+9\tilde{z}^2=18\ ,$$

即

$$\frac{\tilde{x}^2}{6}+\frac{\tilde{y}^2}{3}+\frac{\tilde{z}^2}{2}=1\ ,$$

這是表示一橢圓面。

因在三變數之二次形的特徵方程式，即表現之矩陣 A 的固有方程式，是一次式，其解有時很麻煩，但若只想知曲面的形狀，則由 λ_1 ，λ_2 ，λ_3 的符號可決定，要知此符號，則只需用下面 Descarte 的符號法則便容易知曉。

Descarte 的符號法則

實數 $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ 之符號變化之個數是說由十變一或由一變十的個數，但遇到 0 則略而越過去，例如

$$1\quad 3\quad 0\quad -1\quad 3\quad 5\quad -6\quad 2\quad 4$$

之符號變化個數爲 4 。

Descarte定理 實係數方程式之正根個數與其係數之符號變化的個數相等，或比此個數少偶數個，但重根的個數算其重複度（證明略）。

舉個例來說明，設

$$f(\lambda)=\lambda^3-18\lambda^2+99\lambda-162=0$$

其係數之符號變化有 3 個，故正根的個數爲 3 或 $3-2=1$ ，又 $f(-\lambda)=-\lambda^3-18\lambda^2-99\lambda-162=0$ 之符號變化個數爲 0 ，故 $f(\lambda)=0$ 沒有負根。這樣便可斷定 $f(\lambda)=0$ 之實根都是正根。

例6 試決定 k 之值使二次形

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+k(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)$$

之值爲正。

解： 此二次形的固有方程式爲

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & \dfrac{k}{2} & \dfrac{k}{2} \\ \dfrac{k}{2} & 1-\lambda & \dfrac{k}{2} \\ \dfrac{k}{2} & \dfrac{k}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

即
$$f(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + \frac{3}{4}(4-k^2)\lambda - \frac{1}{4}(k^3 - 3k^2 + 4) = 0$$

爲使這個方程式有 3 個正根，可利用 Descarte 的定理得

$$4 - k^2 > 0 \text{，} \quad k^2 - 3k^2 + 4 > 0$$

於是得 $-1 < k < 2$ 這是所求二次形爲正的充要條件。

§7.4 一般二次形

本節我們講更一般的二次形，若 n 個變數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 之二次同次多項式，則稱之爲**二次形**。這種二次形可寫成下面正方形之圖樣來着想則更易於理解：

$$\begin{aligned} & f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ & = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_1x_n \\ & \quad + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_2x_n \\ & \quad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \quad + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots\cdots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

$a_{ij}x_ix_j$ 與 $a_{ji}x_jx_i$ 等屬同類項，表同樣的係數，則二次形與對稱矩陣結起緣來，這種二次形以變數 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^t$ 來考慮，則以 $\boldsymbol{x}$ 及其轉置 $\boldsymbol{x}^t$ 表出時

$$\begin{aligned} & f(x_1, \cdots, x_n) \\ & = x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) \\ & \quad + x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n) \\ & \quad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \quad + x_n(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n) \\ & = (x_1, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ & = \boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} = \langle \boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x} \rangle = \langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \end{aligned}$$

這種二次形在數學及其他應用科學上扮演著很重要的角色，例如整數論或結晶學，則以 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 等爲整數所表示的二次形。從解析幾何（目前高中大概講爲坐標幾何）的觀點來說，在物理的力學，能量的運動系都用二次形來表廣義的速度。其他如分析學中之多變數函數考慮用一次函數來逼近時之誤差，或多變數函數之極大與極小問題，二次形的理論乃甚有效用。這種二次形的係數爲實數時，依實數線性變換可變形爲標準形

$$a_1\tilde{x}_1^2 + a_2\tilde{x}_2^2 + \cdots + a_{11}\tilde{x}_{11}^2 \tag{7.9}$$

雖然一般可求固有值來進行變換，但 $n \geqq 3$ 時因固有方程式爲 n 次，在實際求解往往會發生困難。不過以直接說明也可以證明變化成 (7.9) 的可能性。

爲此設 $a_{11} \neq 0$ 並不失一般性。如果 $a_{11}=0$，則對角線上之某 $a^{kk} \neq 0$，也可更換變數的號碼：$x_1 = x_k'$，$x_k = x_1'$ 其他 $x_i = x_i'$ 則可使 $a_{11}' \neq 0$。要是對角線各元素爲0，則至少有一非對角線之元素不爲0，設爲 $a_{12} \neq 0$，此時可設

$$\begin{cases} x_1 = x_1' \\ x_2 = x_1' + x_2' \end{cases}$$

其餘

$$x_k = x_k' \quad (k = 3, 4, \cdots,)$$

則原二次形也可變成 $x_1'^2$ 的係數不爲0。

故當 $a_{11} \neq 0$ 不失一般性時，先作含 x_1 平方項如：

$$\begin{aligned} f &= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n \right)^2 \\ &\quad - a_{11}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n \right)^2 \\ &\quad + a_{22} x_2^2 + \cdots + a_{2n} x_2 x_n \\ &\quad + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\quad + a_{n2} x_n x_2 + \cdots + a_{nn} x_n^2 \\ &\equiv a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n \right)^2 \\ &\quad + f_1(x_2, \cdots, x_n) \end{aligned}$$

則 $f_1(x_2, \cdots, x_n)$ 爲含 $n-1$ 變數的二次形。於此令（變數變換）

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \cdots + \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} x_n \\ x_2' = x_2 \\ \cdots\cdots \\ x_n' = x_n \end{cases}$$

則二次形變成

$$a_{11} x_1'^2 + f_1(x_2', \cdots, x_n')$$

再來對 $f_1(x_2', \cdots, x_n')$ 施以如同 f 的方法，就逐漸減少變數之個數，至最後便得2次形之標準形爲(7.9)之形式。

例7　$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 x_2 + 3x_1 x_3 - x_2 x_3$　爲二次形，令

$x_1 = y_1$，　$x_2 = y_1 + y_2$，　$x_3 = y_3$　代入 f 中得

$$\begin{aligned} f &= 2y_1(y_1 + y_2) + 3y_1 y_2 - (y_1 + y_2) y_3 \\ &= 2y_1^2 + 2y_1 y_2 + 2y_1 y_3 - y_2 y_3 \\ &= 2\left(y_1 + \frac{1}{2} y_2 + \frac{1}{2} y_3 \right)^2 - \frac{1}{2} y_2^2 - \frac{1}{2} y_3^2 - 2y_2 y_3 \\ &= 2\left(y_1 + \frac{1}{2} y_2 + \frac{1}{2} y_3 \right)^2 - \frac{1}{2}(y_2 + 2y_3)^2 + \frac{3}{2} y_3^2 \\ &= 2\widetilde{x}_1^2 - \frac{1}{2}\widetilde{x}_2^2 + \frac{3}{2}\widetilde{x}_3^2 \end{aligned}$$

此時因

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}_1 &= y_1 + \frac{1}{2} y_2 + \frac{1}{2} y_3 = + \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2 + \frac{1}{2} x_3 \\
\tilde{x}_2 &= \qquad\ \ y_2 + 2y_3 = - \quad x_1 + \quad x_2 + \ 2x_3 \\
\tilde{x}_3 &= \qquad\qquad\quad y_3 = \qquad\qquad\qquad\quad x_3
\end{aligned}
$$

故也可求得正則變換爲

$$
\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
$$

或

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix}
$$

例8　化下面二次形爲標準形

$$
x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 + \frac{2}{3} x_4^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4
$$

解：

$$
\begin{aligned}
\text{給與式} &= (x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4) \\
&\quad + x_2^2 - 2x_3^2 + \frac{2}{3} x_4^2 + 2x_2x_3 + 2x_2x_3 \\
&= (x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4)^2 - (-2x_2 + x_3 - x_4)^2 \\
&\quad + x_2^2 - 2x_3^2 + \frac{2}{3} x_4^2 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 \\
&= (x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4)^2 \\
&\quad + (-3x_2^2 - 3x_3^2 - \frac{1}{3} x_4^2 + 6x_2x_3 + 2x_3x_4 - 2x_2x_4) \\
&= (x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4)^2 - 3 (x_2 - x_3 + \frac{1}{3} x_4)^2 \\
&\quad + 3 (-x_3 + \frac{1}{3} x_4)^2 - 3x_3^2 - \frac{1}{3} x_4^2 + 2x_3x_4 \\
&= (x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4)^2 - 3 (x_2 - x_3 + \frac{1}{3} x_4)^2 \\
&= \tilde{x}_1^2 - 3\tilde{x}_2^2
\end{aligned}
$$

在上面二次形變成標準形時，在過程中所選之變數變換顯然是任意的，這種任意性從平方式逐次分離以前，變數可用任意正則變換行之也可以知道。但不管此任意性，在標準化後的結果，與所取變數變換無關，其正項與負項的個數屬一定（也就是係數可能有此不同，但所表形態相同）也就是下面定理。

定理 7.1　實係數二次形依實數正則一次變換變成標準形時，其結果的正項與負項之個數爲一定。

證明 設二次形寫作 $f=X^t Ax$，A的秩為r，若f由二個實正則變換S與T變成標準形：

$$X=SY, \qquad X=TZ$$

所得結果為

$$f=\begin{cases} a_1y_1^2+a_2y_2^2+\cdots+a_py_p^2-a_{p+1}y_{p+1}^2-\cdots-a_ry_r^2 \\ b_1z_1^2+b_2z_2^2+\cdots+b_qz_q^2-b_{q+1}z_{q+1}^2-\cdots-b_rz_r^2 \end{cases}$$

其中 a_i，b_i 都是正數，則我們應該證明

$$p=q$$

如設$p<q$（$q<p$也是一樣），則發生矛盾。

這個證明省略了，我們只要知道雖然得出的標準形，其係數有異，不過它們都是表等價的二次形即可。

又如二個變數或三個變數之二次形一樣有所謂正定符號的二次形，即對不為0之變數作用時，二次形之數恒取正的特徵。這種性質有下面定理。

定理 7.2 二次形 $\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x}>0$ 的充要條件是存在一正則矩陣S使 $A=S^tS$，S^t 表S的轉置

證明 因二次形可用一正則變換P使之變成標準形，則A經過適當的變形可得對角線形

$$\widetilde{A}=P^tAP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$為$A$的固有值。若二次形為正，則$\lambda_i>0$，$=1,2,\cdots,n$，於是令

$$R=\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix},$$

則 $P^tAP=R^tR=\widetilde{A}$

於是

$$A=(P^t)^{-1}R^tRP^{-1}=(RP^{-1})^t(RP^{-1})\equiv S^tS。$$

反之若 $A=S^tS$，$|S|\neq 0$，則

$$\boldsymbol{x}^tA\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^tS^tS\boldsymbol{x}=(S\boldsymbol{x})^t(S\boldsymbol{x})=|S\boldsymbol{x}|^2>0$$

故 $\boldsymbol{x}^tA\boldsymbol{x}$ 為正值。

如前所討論，可得下面定理

定理 7.3 一般二次形之變換矩陣的秩為r時，經適當的直交變換可得

$$\boldsymbol{x}^tA\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^tP^tAP\boldsymbol{y}=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$$

但λ_i（$i=1,2,\cdots,r$）為A的固有值。

例9 若二次形 $\boldsymbol{x}^tA\boldsymbol{x}$ 為完全平方，則A的秩為1，即rank $A=1$

證明

$$\boldsymbol{x}^tA\boldsymbol{x}=(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n)^2$$
$$\equiv y_1^2$$
$$y_i=a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

則
$$\boldsymbol{x}^tA\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^tB\boldsymbol{y}=y_1^2+0y_2^2+\cdots+0y_n^2$$

故
$$\text{rank } B=\text{rank } A=1。$$

例10 二次形 $\boldsymbol{x}^tA\boldsymbol{x}$ 若能分解成一次式之積，則rank $A\leq 2$

證明

$$\boldsymbol{x}^tA\boldsymbol{x}=(a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n)(a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n)$$
$$\equiv y_1y_2$$

此處

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n\ , \qquad (\ i=1\ ,\ 2\ ,\cdots,\ n\ )$$

則

$$2\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} = 2y_1 y_2 = \boldsymbol{y}^t \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^t B\boldsymbol{y}$$

於是 $\text{rank } B = \text{rank } A = 2$

但要是兩因式相等，即爲完全平方的情形，此時

$$\text{rank } A = 1\ , \quad \text{故} \quad \text{rank } A \leqslant 2$$

例3 若 $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$，則二次形 $\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x}$ 的最大值爲 A 之固有值之最大者，最小值爲 A 之固有值的最小者，試證明之。

證明 因在適當的直交變換 P 下，$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ 而

$$\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^t P^t AP\boldsymbol{y} = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

因 P 爲直交矩陣，所以 $|\boldsymbol{x}|^2 = |\boldsymbol{y}|^2 = 1$ 故

$$\text{Min}\ (\ \lambda_i\ ) \leqslant \boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} \leqslant \text{Max}\ (\ \lambda_i\ )$$

練習問題

1. 求二次形 $(\ A\boldsymbol{x}\ ,\ \boldsymbol{x}\ ) = 2yz + 2zx + 2xy$ 的標準形

   答：$-\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 + 2\tilde{y}^2$

2. 試求二次形

   $x^2 + y^2 - 3z^2 + 6xy + 4xz + 4yz$

   的直交變換（即坐標變換），將此形標準化。

3. 試問下面二次形是否爲正值形式

   (1) $5x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_2 - 4x_2x_3$

   (2) $3x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_2 - 4x_2x_3$

4. 試將下面各題之曲線或曲面標準化

   (1) $x^2 - 6xy + y^2 + 4 = 0$

   (2) $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2yz + 4zx - 2xy = 1$

   (3) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4xy - 4yz + 2 = 0$

   (4) $2x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xy = 1$

5. 若 $x^2 + y^2 = 1$，試求二次形 $5x^2 + 4xy + 2y^2$ 的最大值以及所對應的固有向量。

6. 若 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$，求二次形 $x^2 + 2xy - y^2 + 2z^2$ 的最大值，並求其對應的固有向量。

7. 試問下面二次形是否爲正值

   (1) $3x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 2yz - 2zx$

   (2) $x^2 + 2y^2 + 8yz + 12zx + 12xy$

8. 若對稱方陣 A 爲正定符號，則 A^{-1} 以及 $|A|$ 的餘因式所成之矩陣 $adj\ A$ 也都是正定符號，試證明之。

註：此處 $adj\ A$ 之元素 A_{ij} 爲 a_{ij} 在 $|A|$ 之餘因式，也有稱作餘因式矩陣，一般爲

$$adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

略　　解

2. 固有值　$\lambda_1 = 5$，$\lambda_2 = -2$，$\lambda_3 = -4$

對應的固有向量正規化得

$$\widetilde{e}_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad \widetilde{e}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$\widetilde{e}_3 = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{4}{3\sqrt{2}}\right)$$

$$\widetilde{A} = LAL^t = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

坐標變換

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{3}X + \dfrac{1}{\sqrt{2}}Y + \dfrac{1}{3\sqrt{2}}Z \\ y = \dfrac{2}{3}X - \dfrac{1}{\sqrt{2}}Y + \dfrac{1}{3\sqrt{2}}Z \\ z = \dfrac{1}{3} \qquad\qquad\quad - \dfrac{4}{3\sqrt{2}}Z \end{cases}$$

二次形之標準形為 $5X^2 - 2Y^2 - 4Z^2$

3. (1)　$|A-\lambda I| = -\lambda^3 + 10\lambda^2 - 11\lambda + 1 = 0$　有 3 個變號，故無負根，二次形為正定符號

(2)　$|A-\lambda I| = -\lambda^3 + 9\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$　，有 2 個變號，故非正定符號。

4. (1)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{bmatrix}, \quad 2\widetilde{x}^2 - \widetilde{y}^2 = -2$$

(2)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -2 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \\ \widetilde{z} \end{bmatrix}, \quad 3\widetilde{y}^2 + 6\widetilde{z}^2 = 1$$

(3)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \\ \widetilde{z} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{x}^2 - 2\widetilde{y}^2 - 5\widetilde{z}^2 = 2$$

(4)
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix}, \quad \tilde{x}^2 + 3\tilde{y}^2 + 4\tilde{z}^2 = 1$$

5. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$，　$|A - \lambda I| = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$，　$\lambda = 6, 1$

最大值爲6，對應之固有向量爲解

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad 與 \quad x^2 + y^2 = 1$$

得 $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ 及 $\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$

6.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

固有值爲2，$\pm\sqrt{2}$，最大值爲2，固有向量爲解

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad 與 \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

得　$(0, 0, \pm 1)$

7.

(1)
$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 10\lambda^2 + 29\lambda - 25 = 0$$

λ不能爲負，故固有方程式之根爲正，二次形爲正定符號。

(2)
$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 6 & 6 \\ 6 & 2-\lambda & 4 \\ 6 & 4 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 3\lambda^2 - 86\lambda - 200 = 0$$

顯然有負根，二次形非正定符號。

8. A若爲正定符號，則存在 $|S| \neq 0$，$A = S^t S$

$$A = S^t S \Rightarrow A^{-1} = (S^t S)^{-1} = S^{-1}(S^t)^{-1} = T^t T, \qquad |T| \neq 0$$

故 $\boldsymbol{x}^t A^{-1} \boldsymbol{x}$ 爲正定符號。

又 $adj\, A = |A| A^{-1}$，但$A^{-1} = T^t T$，故

$$adj\, A = |A|^n T^t T = (|A|^{\frac{n}{2}} T)^t (|A|^{\frac{n}{2}} T)$$

故依定理7.3，$adj\, A$也是正定符號。

（本文作者現為清大數學系教授）