討 論 類

初等微積分裡極限的計算法

王 湘 君

初學微積分的人，在計算一個函數於某點的極限時，如遇到函數在該點沒有定義或者在該點的左右兩邊定義不同，這時就感到困難了。這篇小文的目的是提供教學上的工具，來幫助學生克服這些困難，而且與 ϵ 和 δ 的極限定義及證明有直接和自然的關聯。

下面是一些例子，藉著這些例子來說明我們的工具。

(1) 給定 $f(x)=\begin{cases} x^2 & , x\neq 2 \\ 0 & , x=2 \end{cases}$，試計算 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

儘管一再提醒同學，是計算 x 靠近 2 時 $f(x)$ 的值，而不是 $x=2$，但仍有人會認為其極限值是 0。下面的研討方式可使同學明瞭其極限確實是 4。

既然我們要求函數 x 靠近 2 的極限值，我們可考慮 $f(2+u)$，當 u 是一個非常小的正數或負數，但 $u\neq 0$

$f(2+u)=(2+u)^2=4+4u+u^2$

當 u 愈來愈小時，很明顯地 $f(2+u)$ 就愈靠近 4。

(2) 給定 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，$x\neq 1$，試計算 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

解這個問題有個很特殊的方式就是用 $x-1$ 去除，於是 $f(x)=x+1$，當 $x\neq 1$。這種方法學生會感到很奇怪，為什麼當初不定義函數為 $f(x)=x+1$，以避免 $\dfrac{0}{0}$ 的不定形式？而用我們的方法就不需以 $x-1$ 去除。我們只要算一算 $f(1+u)$，u 是很小的數。

$$f(1+u)=\frac{(1+u)^2-1}{1+u-1}=2+u$$

當 u 愈來愈小時，很明顯地 $f(1+u)\to 2$。

這個方法的好處是不需要知道分母是分子的因式，而且也顯示不出這個問題是故意巧妙設計的。

這種研討方式，尤其求單邊的極限，以及函數在某點的左右兩邊定義不同特別有價值。下面就是個好例子。

(3) 給定 $f(x)=\dfrac{[x]-x}{x}$，$x\neq 0$，試計算 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

（$[x]$ 表不大於 x 的最大整數）

為了計算右極限，我們算 $f(0+u)$，u 是很小的正數。

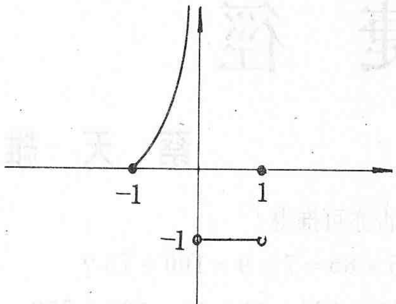
$$f(0+u)=\frac{[0+u]-(0+u)}{0+u}=\frac{-u}{u}=-1$$

這裏有個很重要的事實，u 是一個非常小的數，但不是 0，所以其極限值為 -1。我們再計算左極限，我們考慮 $f(0-u)$，u 仍是一個很小的正數。

$$f(0-u)=\frac{[0-u]-(0-u)}{0-u}=\frac{-1+u}{-u}=\frac{1}{u}-1$$

當 u 愈來愈小時，$f(0-u)$ 無限地增加，故極限不存在。

請看圖



當我們想要求 $f(x)$ 在某一數 k 的左右極限值時，只要計算 $f(k-u)$ 及 $f(k+u)$，u 是很小的正數。

(4) 給定 $f(x)=\begin{cases} x^2+4, & x<2 \\ x^3, & x\geq 2 \end{cases}$

試計算 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$。$u$ 是很小的正數。

$$f(2+u)=(2+u)^3$$
$$=8+12u+16u^2+u^3 \text{ 且}$$
$$f(2-u)=(2-u)^2+4$$
$$=8-4u+u^2$$

當 $u\to 0$，$f(2+u)$ 及 $f(2-u)$ 都趨近 8。

(5) 給定 $f(x)=\left(\dfrac{1}{x-5}\right)^{[x-5]}$ $x\neq 5$，

試計算 $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)$

這個問題總被同學認為是較難的，而我們研討的方法顯得容易多了，我們只要考慮 $f(5+u)$，u 是很小的正數。

$$f(5+u)=\left(\frac{1}{5+u-5}\right)^{[5+u-5]}$$
$$=\left(\frac{1}{u}\right)^0=1$$

故 $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=1$

$$f(5-u)=\left(\frac{1}{5-u-5}\right)^{[5-u-5]}$$
$$=\left(-\frac{1}{u}\right)^{-1}=-u$$

故 $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=0$

總結這個方法，就是欲求 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 時，只要考慮 $f(a+u)$，u 是很小的數，看一看 $u\to 0$ 時，$f(a+u)$ 趨近於何數，欲求單邊極限時，就考慮 $f(a+u)$ 或 $f(a-u)$，此時 u 是很小的正數。

我們也可以說這方法是用 $\lim\limits_{u\to 0} f(a+u)$ 來取代 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$。

這方法除了提供學生直接計算極限值外，它還有下面其他許多好處。

1. **它提供關於 ε 和 δ 證明的另外形式。**如例 4

   當 $0<u<1$，

   $|f(2+u)-8|=|12u+6u^2+u^3|$
   $=|u|\,|12+6u+u^2|<19|u|$

   $|f(2-u)-8|=|-4u+u^2|$
   $=|u|\,|-4+u|<4|u|$

   設 $0<u<\delta<1$

   則 $|f(2\pm u)-8|<19\delta$

   故對任一 $\varepsilon>0$，

   我們取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{19}$，這樣可滿足

   $0<|x-2|<\delta \Rightarrow |f(x)-8|<\varepsilon$

2. **它可以幫助學生打好基礎，學習導函數。**因為計算 $f(a+u)$ 的方法可以應用到計算 $[f(a+u)-f(a)]/u$，u 是很小的數。

3. **它也可以幫助學生學習在不連續點的積分。**譬如，$f(x)$ 在 $x=b$ 不連續，我們考慮

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx$$
$$=\lim_{u\to 0}\int_a^{b-u} f(x)\,dx$$

〔參考資料〕：*Mathematics Teacher*

—本文作者任教於師大附中