如何準備計算及證明題

王 秋 夫

從71年起聯考已經決定加考40%之計算及證明題，相信不僅學生緊張，老師們之壓力也不輕，到底如何準備計算及證明題，筆者就39～70年聯考試題分析及任教多年之經驗提供同學們之參考。

(1) **作圖題方面：**

以往聯考偏重在極坐標，三角函數，絕對值函數及參數圖形之討論上。筆者認為若有出作圖題則必落在極坐標或三角函數上。

(2) **計算題方面：**

以往求值問題三角及因餘式定理之應用、級數、複數、對數及方程式根與係數關係之利用，部分分式，求面積體積諸問題較多，筆者認為要準備計算題，先應把歷屆之考題做熟，再注意特殊置換或轉化之問題，當然複數、對數及三角之數值計算較易出題。

(3) **軌跡問題：**

二次錐線及圓部分考得很多，這一類問題皆在39～56年間出現，讀者可把歷屆考題做過一遍，即可知其準備方向。最好注意各曲線之連接關係。

(4) **證明題方面：**

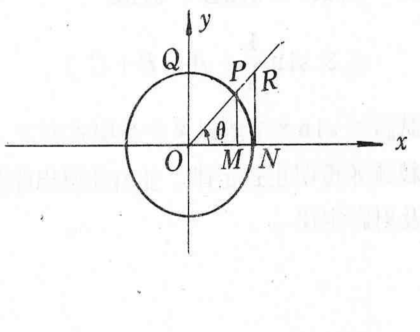
以往之考題偏重三角部份之證明，二次錐線平面幾何及複數亦考得不少。筆者以為證明題部分，要以高中學生程度所能接受之程度為宜，不要去讀超乎自己能力以上之問題，且應選擇證法只有一種的問題，準備的方法當然要先把課本較重要之定理（諸如實數有關之定理、正餘弦定律、棣莫夫定律、因數性質定理、對稱、向量、面積體積有關之定理、平面幾何之名定理及機率有關之定理。）先行複習一遍，再從數學傳播中有許多大學教授所寫之文章及各中學老師們之教學心得中，看看高中教材比較重要的幾種題材，（可從「數學傳播」第20期之目錄索引去找您欲看之資料。）若還有遺力再看徐氏基金會出版之數學趣味競試集，及凡異出版之國際數學奧林匹克競試集，及卜德楠數學競試集即可。目前坊間出版的參考書寫的都不盡理想，當然每一種之可讀性仍是存在的。筆者以為準備之方法就是把課本重要定理的來龍去脈先弄清楚，做問題時要先瞭解題意，想一想再做，未弄清題意時，不要冒然下筆，多做多想自然會融會貫通。

為了使同學練習各種計算證明題之做法，筆者特將平日收集整理之問題，提供同學們之參考。

1. 如圖所設：$\overrightarrow{NR}$為圓之切線，O為圓心，半徑為1

(1) 已知：$\triangle OMP$之面積＜扇形ONP之面積＜ONR之面積

求證：$\cos\theta < \dfrac{\sin\theta}{\theta} < \dfrac{1}{\cos\theta}$



(2) 當$\theta\to 0$時求 (A) $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}$之值

(B) $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\tan\theta}{\theta}$之值

(3) 利用(2)求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\sin\pi x)}{x}$ 及

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\left(\cos\dfrac{\pi}{2}x\right)}{x-1}$ 之值

2. (1)以數學歸納法證明：

$\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n^2} < 2-\dfrac{1}{n}$，$\forall n\geqq 2$，$n\in N$

(2) 利用上述關係，求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} k\sin\frac{1}{k}\right)\text{之值}$$

3. (A) 證明：$\tan\alpha=\cot\alpha-2\cot 2\alpha$

(B) 求 $S_n=\tan x+\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\tan\frac{x}{2^{n-1}}$ 之結果

(C) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$

4. 試證：(1) 半徑爲 r 之圓之外切正 n 邊形之面積爲

$$A=nr^2\tan\frac{\pi}{n}\text{，周長爲}$$

$$P=2nr\tan\frac{\pi}{n}$$

(2) 半徑爲 r 之圓之內接正 n 邊形之面積爲

$$B=\frac{nr^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\text{，周長爲}$$

$$P_1=2nr\sin\frac{\pi}{n}$$

(3) 利用(1)(2)求證圓之面積爲 πr^2，周長爲 $2\pi r$

5. 二圓 k_0，k_1 在直線 ℓ 之同側，切於 ℓ 且互相外切，其半徑皆爲 r_1，設切於 ℓ 且外切 k_0，k_1 之圓爲 k_2，其次切於 ℓ 且外切於 k_0，k_2 而不是 k_1 之圓，設爲 k_3，……如此繼續切於 ℓ 且外切 k_0，k_n（$n\geqq 3$）而非 k_{n-1} 之圓設爲 k_{n+1}，k_n（$n=1,2,3$……）之半徑若爲 r_n，試答下列各問題：

(1) 以 r_1，r_2 表 r_3

(2) 求無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}r_n$ 之和

6. 試證：

(1) $f(x)=\dfrac{a(\cos^4 x-\sin^4+a)}{2a\cos^2 x+a^2+1}$

$$=1-\frac{a+1}{2a\cos^2 x+a^2+1}$$

$(a>0)$

(2) $\forall x\in R$，恒有 $\dfrac{a(a-1)}{a^2+1}\leq f(x)\leq\dfrac{a}{a+1}$

(3) 求 $f(x)=\dfrac{a(a-1)}{a^2+1}$ 及 $f(x)=\dfrac{a}{a+1}$ 時 x 之值

7. 設 $a\geqq 1$，$b\geqq 1$，$ab=10$，求證：$|(\log_{10}a)\cos x+(\log_{10}b)\sin x|\leq 1$

8. 證明：$\dfrac{\sin^8 x}{8}-\dfrac{\cos^8 x}{8}-\dfrac{\sin^6 x}{3}+\dfrac{\cos^6 x}{6}+\dfrac{\sin^4 x}{4}$ 爲與 x 無關之常數。

9. $\triangle ABC$ 中求

(1) $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A$ 之值

(2) 求 $\cot^2 A+\cot^2 B+\cot^2 C$ 之最小值及此時 $\triangle ABC$ 之形狀如何？

10. 若 α，β 爲 $a\cos x+b\sin x+c=0$（$a\neq 0$，$a\neq c$）之相異二根且 $-\pi<\alpha<\pi$，$-\pi<\beta<\pi$，求

(1) $\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}$ (2) $\tan\frac{\alpha+\beta}{2}$ 之值

11. 若 α，β，γ 爲銳角三角形之三內角，求證 $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma>\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$

12. 試證：$-1\leq\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A\leq 3$

13. A，B，C，D 介於 0 到 π 之間，證明

(1) $\sin A+\sin B+\sin C+\sin D\leq 4\sin\frac{1}{4}(A+B+C+D)$

(2) $\sin A+\sin B+\sin C\leq 3\sin\frac{1}{3}(A+B+C)$

14. 試證：$\sin x$ 不能以 x 之多項式表之。

15. 敍述並證明正弦定律，並由此導出餘弦定律及射影定律。

16. 試由餘弦定律導出射影定律及正弦定律。

17. 三角形之三邊長分別爲 a，b，c 其對角爲 A，B，C，且有 $c^2y+b^2z=a^2z+c^2x=b^2x+a^2x$，試證：

$$\frac{x}{\sin 2A}=\frac{y}{\sin 2B}=\frac{z}{\sin 2C}$$

18. $\triangle ABC$ 之三頂角爲 A，B，C 其對邊依次爲 a，b，c $\triangle ABC$ 之面積爲 S，則

(1) 若 $S=\frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2)$ 成立，則

$C=$ (A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{6}$ (E) $\frac{2\pi}{3}$

(2) 若 $F=\sin A\sin B\sin C\leq$ (A)

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ (C) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (E) 於 $A=B=C$ 時 $F\leq\frac{3\sqrt{3}}{8}$

(3) 承上題 $\frac{ab+bc+ca}{S}$ 之最小值爲

(A) $\sqrt{3}$ (B) $3\sqrt{2}$ (C) $4\sqrt{3}$ (D) $5\sqrt{3}$ (E) $6\sqrt{3}$

19. 已知 $\tan 8^\circ=0.1405$，$\tan 9^\circ=0.1584$ $\tan 10^\circ=0.1763$，$n\in N$，利用

$$\tan^{-1}\frac{1}{n}-\tan^{-1}\frac{1}{n+1}=\tan^{-1}\frac{1}{n^2+n+1}$$ 估計

$$S=\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{13}+\tan^{-1}\frac{1}{21}+\tan^{-1}\frac{1}{31}+\tan^{-1}\frac{1}{43}$$

得 (A) $0<S<\frac{\pi}{6}$ (B) $0<S<\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{6}<S<\frac{\pi}{4}$ (D) $-\frac{\pi}{4}<S<0$ (E) $\frac{\pi}{12}<S<\frac{\pi}{4}$

20. 承上題令 $a_n=\tan^{-1}\frac{1}{n^2+n+1}$ $(n\in N)$ 求 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$

21. 作 $y=\sin^{-1}x\sin x$ 之圖形

22. 設 $S=\{(x,y)\mid\cos^{-1}x\geq\sin^{-1}y\}$ 求 S 之面積爲何？

23. 試在 $-2\pi\leq x\leq 2\pi$ 之範圍內，求

$$|\cos x|+\cos x=\left|\sin\frac{x}{2}\right|$$

之實根個數有幾？

24. 討論 $\cos(\sin x)$ 及 $\sin(\cos x)$ 這兩個數之大小。

25. 當 $xy<1$ 時試證：

$$\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$$

26. 證明若 $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y+\cos^{-1}z=\pi$ 則 $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$

27. 設 x，y，$z\in N$，求證：

$$\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}\right)^{x+y+z}\geq x^xy^yz^z$$

28. 設 a，b，c 爲正數，x，y，z 爲實數，求證

(1) $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}\geq\frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$

(2) $(ax+by^2+cz^2)\geq\frac{(ax+by+cz)^2}{a+b+c}$

29. 試用數學歸納法證明下列各式：（伯努利不等式），但 x_1，x_2，x_3，$\cdots\cdots x_n$ 均爲小於 1 之正數

(1) $(1-x_1)(1-x_2)\cdots\cdots(1-x_n)\geq 1-(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)$ (但 $n>1$).

(2) $\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{n}{k}\right)\geq 1-\frac{n(n+1)}{2k}$ (但 $k>n$，$n>1$)

(3) $(1+a)^n\geq 1+na$ (但 $a\geq -1$)

30. 試證：三角形的重心，外心，垂心三點共線，且頂點到垂心之距離爲外心到對邊距離之兩倍

31. 一直線截包含 $\triangle ABC$ 三邊之直線 $\overleftrightarrow{BC}$，$\overleftrightarrow{CA}$，$\overleftrightarrow{AB}$ 於異於頂之三點，D，E，F 則 $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$，其逆亦眞。

32. A，B，C 爲不共線三點，已知 $S=\{X\mid$

$\overrightarrow{AX}=\gamma\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$，$b\leq\gamma\leq a$，$d\leq S\leq c$，$a$，$b$，$c$，$d\in R\}$，則 S 之面積 $=2(a-b)(c-d)\ a\triangle ABC$

33. 設 P 爲 $\triangle ABC$ 內部一點，若 $\ell\overrightarrow{AP}+m\overrightarrow{BP}+n\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{O}$，則 $a\triangle BCP : a\triangle ACP : a\triangle ABP=\ell : m : n$

34. $\forall x$，$y\in R$，$(|x|-1)^2+(|y|-1)^2=4$，試作此方程式所表之圖形，並求此圖此之周長及其所圍區域之面積

35. 試作方程式 $x^2+y^2=|x+y|+|x-y|$ 之圖形，並求其所圍區域之面積。

36. 設 A，B，C 爲相異三點，若且唯若有三個異於 0 之常數 α，β，γ 使 $\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{O}$，其中 O 爲任意點且 $\alpha+\beta+\gamma=0$ 則 A，B，C 三點共線

37. 設橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 上一點 P_1 其短軸兩端點爲 A，B 若直線 $\overleftrightarrow{AP}$，$\overleftrightarrow{BP}$ 分別交 x 軸於 Q，R 二點，試證：

$$OQ\cdot OR=a^2$$

38. $n\in N$ 拋物線 $y=8^n x^2-2^n(2^n+1)x+1$ 在 x 軸上截出的線段長爲 ℓ_n，求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ell_n$ 之值

39. 設二圓 k_1，k_2 之圓心均在 x 軸上且相外切，其半徑爲 r_1，r_2 而 $r_1<r_2$，若 k_1，k_2 均與拋物線 $y^2=ax\ (a>0)$ 相切，證明：$r_2-r_1=a$

40. 橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$(b>a>0)$，$F$ 爲其一焦點，其對應之準線爲 L，若 P 爲橢圓上任一點，P 與長軸二端點連線分別與 L 相交於 A，B 兩點，試證：$\angle AFB=90°$

41. 試證由橢圓的兩焦點到其任一切線之距離的乘積爲一常數。

42. 試證過橢圓上任一點 P 的兩焦半弦，與過點 P 的切線成等角。

43. 自橢圓之正焦弦的一端作法線，會通過此橢圓短軸的一端，試求其離心率。

44. 已知橢圓 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 與拋物線 $y^2=2Px$ 正交，試求 a 與 b 之關係，若用 ϕ 表橢圓在交點之離心角，試證此拋物線之正焦弦等於 $2a\tan\phi\ \sin\phi$

45. 過橢圓上一點及二焦點之兩直線所成之角，爲橢圓在此點之切線所平分，試證之。

46. 自雙曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上任一點引二漸近線的平行線，求所圍成的平行四邊形面積爲何？

47. 若一直線與雙曲線及其二漸近線相交，試證介於雙曲線及漸近線的線段長相等。

48. 過雙曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上任一點 P 之切線與二漸近線所成三角形之面積爲 $|ab|$。

49. A，B，$C\in R$ 已知 $Ax^2+Bxy+Cy^2=1$ 表一雙曲線，求二漸近線及共軛雙曲線。又問此方程式可否表一拋物線？

50. 設平面上有互相垂直之二定直線，又有一定點 A，令通過 A 點之一動直線與兩定直線相交於 B，C 求線段 $\overline{BC}$ 之中點之軌跡。

51. 設平面上 $\triangle ABC$ 之底邊 $\overline{AB}$ 之位置恒不變，且 $\overline{AB}=1$，若頂點 C 依下列條件變動其位置：(A) $\tan A+\tan B=2$ (B) $\tan A-\tan B=1$ (C) $\tan A\tan B=2$，此中 A，B 表 $\triangle ABC$ 之兩角，試就其各條件分別求 C 點之軌跡。

52. 定 k 之值，使方程式

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 2-y & kx & y \\ 1+x & y & -x \end{vmatrix}=11$$

之軌跡爲(A)橢圓 (B)雙曲線 (C)當此方程式之軌跡爲圓時，其圓心與半徑爲何？

53. 設二圓 C_1：$x^2+y^2-6x-4y+9=0$ C_2：$x^2+y^2-20x+84=0$，試求兩圓的(1)二內公切線之交點，(2)內公切線方程式，(3)內公切線段長，(4)二外公切線之交點，(5)外公切線方程式，(6)外公切線段長

54. 圓 $x^2+y^2=25$ 外一點 $C(8,2)$ 向圓作二切線切點爲 A，B 則(1) $\overleftrightarrow{AB}$ 方程式，(2) $\overline{AB}$ 之長，(3) $a\square AOBC$，(4) $\triangle ABC$ 之外接圓方程式，(5) $\angle ACB$ 之度量各爲何？

55. $a>0$，方程式 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ 之圖形並

求其焦點、頂點坐標、準線方程式及正焦弦之長爲何？

56. 求等軸雙曲線 $xy=k$ （$k>0$）之貫軸及共軛軸、焦點、頂點坐標及準線方程式各爲何？

57. 求雙曲線 S：$x^2+3xy+2y^2-3x-7y-8=0$ (1) S 之對稱中心，(2) S 之兩漸近線之交角 θ（銳角）求 $\cos\theta$, (3) S 之共軛雙曲線，(4) S 之兩對稱軸，(5) $P\in S$，P 到二漸近線距離之乘積。

58. (1) 設 $Z\in C$，且 $Z=\frac{1}{4}(1+\sqrt{3}i)$，$n\in N$，求 $|Z^{n+1}-Z^n|$ 之值

(2) 承上題，滿足

$$\sum_{k=n}^{\infty}|Z^{k+1}-Z^k|<10^{-10}$$

之最小自然數 n 爲何？

59. 令 $Z=\frac{5}{14}+\frac{12}{14}i$，$S_n=1+Z+Z^2+\cdots+Z^{n-1}$，試求無窮等比級數之和 $S=1+Z+Z^2+Z^3+\cdots\cdots$ 及 $\varepsilon_n=S-S_n$

(1) (A) $|Z|>1$，(B) $\frac{1}{S}$ 在高斯平面第四象限 (C) $0.5<$（S之實數部分）<0.6，(D) $0.6<$（S的虛數部分）<0.7，(E) $0.8<|S|<0.9$

若 $|\varepsilon_n|<1/15$，n 最少是多少？記這個最小答案 $10p+q$，p，$q\in\{0,1,2,\cdots\cdots 9\}$ 則 p，q 之值爲何？

$\log 7=0.8457$，$\log 13=1.1139$

60. 敘述並證明棣莫夫定理

61. 試證：(1) $1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta$

$$=\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\cos\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

(2) $\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin n\theta$

$$=\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

62. 設 $x=\cos\alpha+i\sin\alpha$，$y=\cos\beta+i\sin\beta$，$z=\cos\gamma+i\sin\gamma$，且 $x+y+z=xyz$,試求

(1) $\cos(\alpha-\beta)+\cos(\beta-\gamma)+\cos(\gamma-\alpha)$

(2) $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\beta+\gamma)+\cos(\gamma+\alpha)$

(3) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\beta+\gamma)+\sin(\gamma+\alpha)$ 之值

63. 設 $n\in N$，而 $\theta=\frac{\pi}{n}$，令

$R=\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos 2n\theta$

$S=\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin 2n\theta$

求 R，S 之值

64. 設 α，β 爲二複數，$|\alpha|=2$，$|\beta|=1$，$|\alpha+\beta|=\sqrt{3}$

(A)將 $\frac{\alpha}{\beta}$ 用極式表之

(B)設 $n\in N$，求 $|\alpha^n-\beta^n|$ 之值

65. 設 $f:A\to B$，$g:B\to C$，若 gf 是蓋射函數，試證 g 是蓋射函數。

66. 設 $f:A\to B$, $g:B\to A$，若對任一 $x\in A$ 恒有 $g(f(x))=x$，求證 f 爲一對一，而 g 爲映成。

67. 若 $f:A\to B$，$g:B\to C$

(1)若 $gf:A\to C$ 爲 $1-1$，證明 f 必爲 $1-1$。

(2)若 $gf:A\to C$ 爲映成，證明 g 必爲映成。

68. 設 $A=\{a_1, a_2, \cdots\cdots, a_m\}$，

$B=\{b_1, b_2, \cdots\cdots b_n\}$；$m\geq n$，

集合 A 或 B 之元素均相異試證自 A 到 B 之映成函數之個數有

$n^m-C_1^n(n-1)^m+C_2^n(n-2)^m-\cdots+(-1)^r C_r^n(n-r)^m+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}C_{n-1}^n 1^m$

69. 試求 $C_0^n C_k^m+C_1^n C_{k-1}^m+\cdots+C_k^n C_0^m=?$ 其中 $0\leq k\leq m$，n

70. 設 $\alpha=\frac{1}{2}(3+\sqrt{13})$，

$\beta=\frac{1}{2}(3-\sqrt{13})$，$f(x)=\frac{\alpha^x-\beta^x}{\sqrt{13}}$

(1)試以 $f(x)$ 及 $f(x+1)$ 表出 $f(x+2)$

(2)若 $n\in N$，證明 $f(n)$ 恒爲自然數，

(3)證明 $f(3n)$ 爲 10 之倍數。

71. $\forall a, b \in R$，試證：

$$||a|-|b|| \le |a \pm b| \le |a|+|b|$$

72. 敍述並證明因式及餘式定理。

73. 設 $q \in N$，且 $q > 1$，若

(A)質數 p 及一切小於 p 之質數都不是 q 的因數

(B) $p^2 > q$，則 q 必爲質數

74. 若 $t = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$，$p_1, p_2, \cdots p_n$ 爲互異之質數，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n \in N \cup \{0\}$，則

$$n(S) = t\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{p_n}\right)$$

75. 設 $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_1} p_3^{\alpha_3} \cdots\cdots p_n^{\alpha_n}$，$\alpha_n \in N \cup \{0\}$ 而 p_i 爲相異之質數，則

(1) N 共有 $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots\cdots(\alpha_n+1)$ 個正約數

(2) N 之正約數之總和爲

$$\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1} \cdots \frac{p_n^{\alpha_n+1}-1}{p_n-1}$$

(3)不大於 N 且與 N 互質之自然數共有

$$N\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_n}\right)$$

試證之。

76. 若二圓 $x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1=0$ 與 $x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2=0$ 正交，若且唯若 $d_1d_2+e_1e_2=2(f_1+f_2)$，試證之。

77. 試證明：(1)二項式定理：

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} C_r^n x^{n-r} y^r$$

(2)多項式定理：$(x_1+x_2+\cdots+x_r)^n$

$$= \sum \frac{n!}{a!\,b!\cdots c!} x_1^a x_2^b \cdots x_r^c$$

其中 $a+b+\cdots+c=n$

78. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$，且 $A_i \cap A_j = \phi\ (i \ne j)$ 若 $p(B) > 0$，$p(A_i) > 0$，則

$$p(A_i|B) = \frac{p(B|A_i)\,p(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} p(A_j)\,p(B|A_j)}$$

試證之

79. 試證 $f(x) = \dfrac{2x}{n(n+1)}$，$x = 1, 2 \cdots\cdots n$ 爲 x 之機率函數，並求其期望值。

80. 試求二項隨機變數的期望值與變異數。

81. 設 $a, b \in N$，$S = \{a_1x+by \mid x, y \in Z\}$，$K = \{k\alpha_0 \mid k \in Z$，$\alpha_0$ 爲 S 中之最小自然數$\}$，試證

(1) $\alpha_0 = (a, b)$，(2) $S = K$

82. 設 $a, b, m, n, p, q \in Z$ 及 $ab \ne 0$

若行列式 $\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = \pm 1$

則 $(a, b) = (ma+nb, pa+qb)$

83. $a, b, c \in Z$，$(a, b) = 1$，若方程式 $ax+by=C$，有一組整數解爲 $x=h$，$y=k$，則其一切整數解可由通通 $x=h+bt$，$y=k-at$ 求得。（其中 t 表一切可能之整數）

84. 設 $a, b \in N$，$ab \ne 0$，試證

$(a+b, [a, b]) = (a, b)$

85. 試敍述並證明勘根定理。

86. $f(x)$ 爲佈於 R 之多項式，$a, b \in R$，$b \ne 0$，若 $a+bi$ 爲 $f(x)=0$ 之一根，則 $f(x)=0$ 必含有另一根爲 $a-bi$。

87. 設 $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots\cdots + a_1x + a_0 \in Q[x]$，$(n \in N$，$n \ge 2$，$a_n \ne 0)$，若 $f(x)=0$ 有一根爲 $a+\sqrt{b}$，$a, b \in Q$，$\sqrt{b}$ 爲無理數，則 $a-\sqrt{b}$ 亦爲其另一根。

88. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + k$

(1)若方程式 $f(x)=0$ 有三相異實根求 k 之範圍。

(2)若 $f(x)=0$ 有一實二虛根，求 k 之範圍

(3)若 $f(x)=0$ 有二相異正根，一負根，求 k 之範圍。

(4)若 $f(x)=0$ 有二相異負根，一正根，求 k 之範圍。

(5)若 $f(x)=0$ 有二重根，求 k 之值。

89. 設 $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0\in Z[x]$，試證：若 a_n，$f(0)$，$f(1)$ 皆爲奇數，則 $f(x)=0$ 沒有"有理根"。

90. 設 α_1，α_2，$\cdots\cdots\alpha_n$ 爲 $x^n+x+1=0$ 之 n 個根（$n\in N$，$n>2$），求
$$(\alpha_1^{n-1}+\alpha_2^{n-1}+\cdots\cdots+\alpha_n^{n-1})-(\alpha_1^n+\alpha_2^n+\cdots\cdots+\alpha_n^n)$$ 之值

91. 已知方程式
$$x=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})\cos\theta,$$
$$y=\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})\sin\theta$$
試證：(A)若 t 爲常數，則此二方程式表一橢圓。
(B)若 θ 爲常數，此二方程式表一雙曲線之一部分。
(C)此橢圓與雙曲線，有相同之焦點
(D)此橢圓與雙曲線互相正交。

92. 試證托勒密定理：圓的內接四邊形其兩對邊乘積的和等於兩對角線的乘積。

93. 設一等比數列與一調和數列之 p，q，r 項各相等而順次爲 a，b，c 求證
$$a(b-c)\log a+b(c-a)\log b+c(a-b)\log c=0$$

94. 設 a，b，$c\in R$ 方程式 $f(x)$
$$x^3+ax^2+bx+c=0$$
求(1) $f(x)=0$ 有一根爲純虛數之條件。
(2) $f(x)=0$ 有兩根互爲加法反元素之條件。
(3) $f(x)=0$ 三根成 $A.P.$ 之條件。
(4) $f(x)=0$ 三根成 $G.P.$ 之條件。

95. 設 $a^2+b^2=6ab$ 且 $a>b>c$，試證
$$\log\frac{1}{2}(a-b)=\frac{1}{2}(\log a+\log b)$$

96. 設 x，y，z 三正數成 $H.P.$ 求證
$$\log(x+z)+\log(x-2y+z)=2\log(x-z)$$，但 x，y，z 互異

97. 設 $0<A<\pi/2$，試證：
$$\log(\csc A-\cot A)=\log\sin\frac{A}{2}-\log\cos\frac{A}{2}$$

98. 設一三角形之三邊長成 $G.P.$ 且其最小邊爲1，若此三角形周界之全長爲 P，試證 $3\leq P<3+\sqrt{5}$

99. a，b，c 爲 $\triangle ABC$ 之三邊長且相異。
(A)證明 $$\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}>\frac{9}{a+b+c}$$
(B)應用(A)式再證 $$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}>3$$

100. 證明下列諸數之最大整數的性質。
(1) $[x+y]\geq[x]+[y]$
(2) $\left[\frac{[x]}{n}\right]=\left[\frac{x}{n}\right]$，$n\in Z$
(3) $[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx]$

—本文作者現任教於嘉義高中