問題類

高一、二暑假作業

觀念指正

羅 添 壽

每當筆者於課堂上將命題“設$P(x_1, y_1)$為圓$x^2+y^2+dx+ey+f=0$外一點，則過P點向圓所作之切線長為$\sqrt{x_1^2+y_1^2+dx_1+ey_1+f_1}$”證明過後，即問“求過$P(6, 4)$至圓$4x^2+4y^2-8x+16y-5=0$所引之切線長為______”幾乎每年的學生皆異口同聲的答所求為$\sqrt{4\times 6^2+4\times 4^2-8\times 6+16\times 4-5}=\sqrt{219}$，少有學生能再思考自己所算之答案在理論上，觀念上是否有誤，因此給予筆者感觸良多，自己每年總希望能很快的將一些在觀念上容易犯錯之試題整理成章，但總未能如願，故拖延至今才動筆。雖這是一篇很平凡的文章，然對學生們的不熟定義，錯用定理，硬代公式，只求解答，不討論其結果是否存在，是否嚴密的學習方法，却有很大的啓示作用，相信此篇文章能帶給你（妳）們在今後能有正確的學習方法。例，文章中高二部份第23題有很多學生們皆用此法（參考書亦如此），少有學生們去討論其解法是否正確，誠之。

命題內容：

① 將各校月考、期考、模擬考、參考書及筆者（或與同事們）所發現同學們在觀念上、思考上容易犯錯之處，利用試題指正之，今整理成章供學生們研習，以為借鏡，教師們亦可參考之，以利教學。

② 筆者將高一、高二部份分開，以利學生們的研習。

編寫方式：

筆者將每一試題之答案寫出，供讀者參考，讀者自己檢查解題過程中是否有誤，若有則加以指正，以收學習之效，謝謝。

<例>求過$P(6, 4)$至圓$4x^2+4y^2-8x+16y-5=0$所引之切線長為______。

解 由命題知所求為$\sqrt{4\times 6^2+4\times 4^2-8\times 6+16\times 4-5}=\sqrt{219}$ （×）

理由 ∵ 圓必先化為 $x^2+y^2-2x+4y-5/4=0$始可代入 得

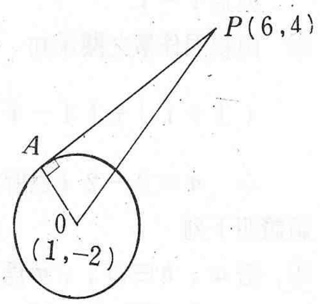
$$\sqrt{6^2+4^2-2\times 6+4\times 4-\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{219}}{2}$$

另解為 先求圓心$(1, -2)$，$r=\frac{1}{2}\sqrt{4+16+5}=\frac{5}{2}$

則 $PA^2=PO^2-OA^2$

$$\Rightarrow PA^2=5^2+6^2-(\frac{5}{2})^2=\frac{219}{4}$$

$\therefore PA=\frac{\sqrt{219}}{2}$為所求



高一部份

1. 設 a，b，c，d 爲異於 0 之實數，且 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{d}{a}$ 求 $\dfrac{a-2b+3c-4d}{a+2b+3c+4d}$ 之值。

解 由加此性質知

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{a}=\frac{a+b+c+d}{b+c+d+a}=1$$

$\therefore\ a=b$，$b=c$，$c=d$，$d=a$

故 $a=b=c=d$

$$\therefore\ \frac{a-2b+3c-4d}{a+2b+3c+4d}=-\frac{1}{5}$$

＜類題＞設 a，b，c 爲異於 0 之實數，且

$$\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}=k,$$

求 k 之值。

解 $\because\ \dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{c+a}=\dfrac{c}{a+b}$

$=\dfrac{a+b+c}{2(a+b+c)}$

$=k$（加此性質）

$\therefore\ k=\dfrac{1}{2}$

2. 若 $x^2+6x+(4-k)=0$，$(k\in R)$ 之一根爲 $3+\sqrt{2}$，求 k 之值。

解 $\because$ $3-\sqrt{2}$ 亦爲方程式之一根

$\therefore$ 根與係數之關係知

$(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})=4-k$

$\Rightarrow k=-3$ 爲所求

3. 已知 $(1-i)x^2-ax+(1+i)=0$ 之一根爲 $1+i$，求 a 之值。

解 ① 由二次方程式之複數根成對出現知另一根爲 $1-i$

② 由根與係數之關係知

$$(1+i)+(1-i)=\frac{a}{1-i}$$

$\therefore\ a=2-2i$ 爲所求。

註 請證明下列

① 若 a，$b\in Q$，$\sqrt{m}$ 爲無理數，證明 $a+b\sqrt{m}=0$，則 $a=b=0$。

利用此關係式，證明“有理係數二次方程式若有 $\alpha+\beta\sqrt{m}$ 之根必有 $\alpha-\beta\sqrt{m}$ 之根”其中 α，$\beta\in Q$，$\sqrt{m}$ 爲無理數。

② 若 α，$\beta\in R$，證明 $\alpha+\beta i=0$，則 $\alpha=\beta=0$。

利用此關係式證明“$f(x)=ax^2+bx+c\in R[x]$，若 $f(x)=0$ 有 $\alpha+\beta i$ 之根必有 $\alpha-\beta i$ 之根”其中 α，$\beta\in R$。

4. ① $x>0$，$y>0$，求 $(x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$ 之極小值。

② $x>0$，$y>0$，求 $(x+2y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}\right)$ 之極小值。

解 ① $\because\ x+y\geq 2\sqrt{xy}$ ……………… (1)

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\geq 2\sqrt{\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{y}}$ ………… (2)

$(1)\times(2)\Rightarrow (x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\geq 4$

$\therefore$ 極小值爲 4

② $\because\ x+2y\geq 2\sqrt{2xy}$ ………… (3)

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}\geq 2\sqrt{\dfrac{2}{xy}}$ ………… (4)

$(3)\times(4)\Rightarrow (x+2y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}\right)\geq 8$

$\therefore$ 極小值爲 8

註 此種試題，因各校教師會強調之，故觀念上錯誤機會較少，然筆者還是希望同學們不可再犯錯。

5. 設 x，y，$z\in R$，且 $x^2+y^2+z^2\neq 0$，求 $\dfrac{2x-3y+4z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 之最大值及最小值，並求當時 x，y，z 間之關係。

解 由柯西不等式知：

$(x^2+y^2+z^2)(2^2+(-3)^2+4^2)$

$\geq (2x+(-3)\cdot y+4\cdot z)^2$

$\Rightarrow 29(x^2+y^2+z^2)$

$\geq (2x-3y+4z)^2$

$\Rightarrow \dfrac{(2x-3y+4z)^2}{x^2+y^2+z^2}\leq 29$

$$\Rightarrow -\sqrt{29} \le \frac{2x-3y+4z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \le \sqrt{29}$$

∴　最大值為 $\sqrt{29}$，最小值為 $-\sqrt{29}$

並當 $\frac{x}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{4}=k$ ($k \neq 0$) 時有極值

∴　$x=2k$，$y=-3k$，$z=4k$

(1)　當 $k>0$ 時

$$\frac{2x-3y+4z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{4k+9k+16k}{\sqrt{4k^2+9k^2+16k^2}} = \frac{29k}{\sqrt{29}k} = \sqrt{29}$$

(2)　當 $k<0$ 時

$$\frac{2x-3y+4z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{29k}{\sqrt{29}\cdot(-k)} = -\sqrt{29}$$

類題　設 x，$y \in R$，求 $\frac{x+2y+3}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$ 之極值。

解　由柯西不等式知

$$(x^2+y^2+1)(1^2+2^2+3^2) \ge (x+2y+3)^2$$

$$\Rightarrow 14(x^2+y^2+1) \ge (x+2y+3)^2$$

$$\Rightarrow \frac{(x+2y+3)^2}{x^2+y^2+1} \le 14$$

$$\Rightarrow \frac{(x+2y+3)^2}{(\sqrt{x^2+y^2+1})^2} \le (\sqrt{14})^2$$

$$\Rightarrow -\sqrt{14} \le \frac{x+2y+3}{\sqrt{x^2+y^2+1}} \le \sqrt{14}$$

∴　其最大值為 $\sqrt{14}$，最小值為 $-\sqrt{14}$

6.　$(a+b)x+(2a-3b)<0$ 之解集合為 $\{x \mid x<-\frac{1}{3}\}$，求

①　a，b 之關係式。

②　求 $(a-3b)x+(b-2a)<0$ 之解集合。

解　①　∵　$3x+1<0$ 與 $(a+b)x+(2a-3b)<0$ 同義

∴　$\frac{a+b}{3}=\frac{2a-3b}{1}=k$ 成立

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=3k \\ 2a-3b=k \end{cases} \text{聯立得} \begin{cases} a=2k \\ b=k \end{cases}$$

故　$a=2b$ 為所求

②　由 $a=2k$，$b=k$ 代入

$(a-3b)x+(b-2a)<0$ 中

得　$-kx-3k<0$

$\Rightarrow -k(x+3)<0$

$\Rightarrow k(x+3)>0$

$$\begin{cases} ①\ 當 k>0 \Rightarrow x>-3 \\ ②\ 當 k<0 \Rightarrow x+3<0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x<-3$ 為所求

類題　$ax^2+bx+c>0$ 之解集合為 $\{x \mid -\frac{2}{3}<x<\frac{5}{4}\}$　求

①　$bx^2-ax+c>0$ 之解集合

②　$2ax^2+cx+b \le 0$ 之解集合

註　正確答案

①　R

②　$\{x \mid \frac{5-\sqrt{193}}{24}<x<\frac{5+\sqrt{193}}{24}\}$

7.　設 a，b，$c \in R^+$，求證

$$\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$$

證　由公式

$$\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_u}{n} \ge \sqrt[n]{a_1a_2\cdots\cdots a_n}$$

其中 $a_i \in R^+$，$i=1$，$2\cdots\cdots n$

知當 $n=3$ 時　$\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$　成立

8.　設 $a \in R$，$a \neq 2$，求解 $ax+3>2x+a$

解　∵　$(a-2)x>(a-3)$

①　當 $a>2$ 時　$x>\frac{a-3}{a-2}$

②　當 $a<2$ 時　$x<\frac{a-3}{a-2}$

故所求為　$x>\frac{a-3}{a-2}$　或　$x<\frac{a-3}{a-2}$

9.　數學委員會共有會員300人，今欲互選出主席團5人，依票數最多之前5名為當選，設每人一人一票且只可選一人（當然可選自己，且不可廢票）那麼，如想穩獲當選，則至

少需得多少票？

解 設至少 x 票

則 $x > \frac{300}{5}$ ∴ x 爲61票

10. 求 $y = x + \frac{1}{x+1}$ 之範圍，其中 $x \in R$

解 $y = (x+1) + \frac{1}{(x+1)} - 1$

$\geq 2 \cdot \sqrt{(x+1) \cdot \frac{1}{x+1}} - 1$

$\Rightarrow y \geq 1$

類題 設 $x \geq 0$，求

$\frac{2x^2 + 5x + 10}{x+2}$ 之最小值

提示 5

11. 利用不等式

$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}}$

$< 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$，估計

$S = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots\cdots + \frac{1}{\sqrt{100}}$

於兩連續整數之間。

解 將 $n = 1, 2, \cdots\cdots 100$ 代入已知條件得

$2(\sqrt{2} - 1) < 1 < 2(1 - 0)$

$2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) < \frac{1}{\sqrt{2}} < 2(\sqrt{2} - 1)$

$2(\sqrt{4} - \sqrt{3}) < \frac{1}{\sqrt{3}} < 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$2(\sqrt{101} - \sqrt{100})$

$< \frac{1}{\sqrt{100}} < 2(\sqrt{100} - \sqrt{99})$

以上各式相加得

$2(\sqrt{101} - 1) < S < 2(\sqrt{100})$

$\Rightarrow 2 \times 9, \cdots\cdots < S < 20$

$\Rightarrow 18.\cdots\cdots < S < 20$ ∴ $19 < S < 20$

12. 求解 $\frac{1}{x^2 - 3x + 4} > \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$

解 ∵ $x^2 - 5x + 6 > x^2 - 3x + 4$

$\Rightarrow 2x < 2$

$\Rightarrow x < 1$

13. 求 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 4^n} =$ ______ 。

解 $\lim_{n\to\infty} (3^n + 4^n)^{\frac{1}{n}} = (\infty + \infty)^{\frac{1}{\infty}} = \infty^0$

$= 1$ 爲所求

類題 設 $a_n = (3^{\frac{1}{n}} + 4^{\frac{1}{n}})^n$，求 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 收斂或發散，若收斂求其值。

解 $\lim_{n\to\infty} (3^{\frac{1}{n}} + 4^{\frac{1}{n}})^n = (3^{\frac{1}{\infty}} + 4^{\frac{1}{\infty}})$

$= (3^0 + 4^0)^\infty = 2^\infty = \infty$

14. 求 $\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 4 + 7 + \cdots\cdots + (3n-2)}{n^2}$

解 由 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$，則

$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$

$= \alpha + \beta$ 知

$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 4 + 7 + \cdots\cdots + (3n-2)}{n^2}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} + \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n^2} + \cdots\cdots + \lim_{n\to\infty} \frac{3n-2}{n^2}$

$= 0 + 0 + \cdots\cdots + 0 = 0$

15. 無窮數列 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots a_n \cdots\cdots$ 若已知首 n 項之和 S_n 爲 $n^2 + n + 1$，令

$T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}$，求 T 。

解 $a_1 = S_1 = 3$，$a_n = S_n - S_{n-1}$，$n \geq 2$

$\Rightarrow a_n = (n^2 + n + 1) - [(n-1)^2 + (n-1) + 1] = 2n$

∵ $\frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}} = \frac{1}{2n \cdot 2(n+1)}$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

$T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right]$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=4\cdot 1=\frac{1}{4}$

16. $a_1=2$，$a_n=\frac{a_{n-1}+1}{a_{n-1}-1}$，$n=2$，$3$，…

求 $\lim_{n\to\infty} a_n=$？

解 ∵ $\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{(\lim_{n\to\infty} a_{n-1})+1}{(\lim_{n\to\infty} a_{n-1})-1}$

令 $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} a_{n-1}=\alpha$

則 $\alpha=\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\Rightarrow\alpha=1\pm\sqrt{2}$

∵ $a_1=2>0$，$a_2=3$，

∴ $a_n>0$ ∴ $\alpha=1+\sqrt{2}$

類題 設 $a_1=1$，$a_{n+1}=2/a_n$，

$n=1$，2，3，4……。

求 $\lim_{n\to\infty} a_n=$？

提示 $\langle a_n\rangle$為振動數列。

17. 設數列 a 之定義為 $a(n)=p\cdot n+q^n+r$，式中 p，q，r 均為常數，求

$\sum_{k=1}^{n} a_k$ 之值。

解 $\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}(pk+q^k+r)$

$=p\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}q^k+\sum_{k=1}^{n}r$

$=p\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{q(q^n-1)}{q-1}+nr$

18. 設 $100^x-10^{x+1}+a=0$ 之二根均為正數求實數 a 之範圍。

解 ∵ $(10^x)^2-10\cdot 10^x+a=0$

令 $10^x=t>0$

$\Rightarrow$ $t^2-10t+a=0$ 有兩正根

∴ $\triangle=100-4a\geq 0$……………………①

又兩根之積 $a>0$……………………………②

由①②得 $0<a\leq 25$

19. 求解 $\log(7-9x)^2-\log(3x-4)^2=2$。

解 $2\log(7-9x)-2\log(3x-4)=2$

$\Rightarrow\log\left(\frac{7-9x}{3x-4}\right)=1$

$\Rightarrow\frac{7-9x}{3x-4}=10\Rightarrow x=\frac{47}{39}$

類題 （67年聯考）

設 x，y 為任意實數，則下列何者兩端均有意義且相等：

(A) $\log_{10}x^2y^2=2\log_{10}(xy)$

(B) $\log_{10}x^2y^2=\log_{10}x^2+\log_{10}y^2$

(C) $\log_{10}\frac{x}{y}=\log_{10}x-\log_{10}y$

(D) $\log_{10}(x^2+y^2)=\log_{10}x^2+\log_{10}y^2$

(E) 以上皆非

20. 設有一 x 之方程式 $(\log_2 x)+b+(c\log_x 2)=0$，老羅解之，將 b 看錯得二根為 $1/4$，$1/8$，老王將 c 看錯得二根為 $1/2$，64，求 b，c。

解 ∵ $(\log_2 x)^2+b\log_2 x+c=0$ 得二次方程式

∵ 老羅看錯 b，故 $c=\frac{1}{4}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{32}$

老王看錯 c，故 $\frac{1}{2}+64=-b$

∴ $b=-64\frac{1}{2}$

21. 求解 $2\log_x a=\log a$（a 為常數），

解 $2\frac{\log a}{\log x}=\log a$

∴ $(2-\log x)\log a=0$

$\Rightarrow$ $x=10^2=100$

22. 設 2^a，5^b，10^x 成 G，P 且公比為 $1/2$，求 x 之值。

解 由 $\frac{10^x}{5^b}=\frac{5^b}{2^a}=\frac{1}{2}$ 取對數得

$\log\frac{10^x}{5^b}=\log\frac{5^b}{2^a}=\log\frac{1}{2}$

$\Rightarrow\begin{cases}x\log 10-b\log 5=-\log 2\\ b\log 5-a\log 2=-\log 2\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}(x-b)\log 5=-(x+1)\log 2 & ①\\ b\log 5=(a-1)\log 2 & ……②\end{cases}$

$\frac{①}{②}$ $\frac{x-b}{b}=\frac{-(x+1)}{a-1}$

$\Rightarrow x=\frac{ab-2b}{a+b-1}$

類題 求 $\frac{1}{(1+x)(1+ax)}+\frac{a}{(1+ax)(1+a^2x)}+\cdots+\frac{a^{n-1}}{(1+a^{n-1}x)(1+a^nx)}$ 之和。

正解 ① 若 $a\neq 1$

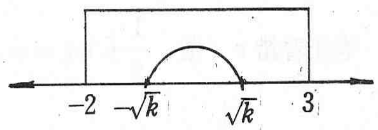
$\Rightarrow S=\frac{1}{1-a}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{a^n}{1+a^nx}\right)$

② 若 $a=1$ $\Rightarrow S=\frac{n}{(1+x)^2}$

23. $x^2\leq k$ 是 $x^2-x-6\leq 0$ 之充分條件，求 k 之範圍。

解 設 $A=\{x\mid -\sqrt{k}\leq x\leq\sqrt{k},\ x\in R\}$

$B=\{x\mid -2\leq x\leq 3,\ x\in R\}$



依題意知 $A\subset B$

$\sqrt{k}\leq 3\Rightarrow k\leq 9$ ……………………①

∴ $-\sqrt{k}\geq -2\Rightarrow\sqrt{k}\leq 2\Rightarrow k\leq 4$ …②

取交集知 $k\leq 4$

24. 求解不等式 $2^x-2^{-x}<2$

解 令 $2^x=t\Rightarrow t-\frac{1}{t}<2$

$\Rightarrow t^2-2t-1<0$

$\Rightarrow 1-\sqrt{2}<t<1+\sqrt{2}$

但 $2^x=t>0$ ∴ $0<t<1+\sqrt{2}$

∴ $0<2^x<1+\sqrt{2}$

∴ $0<x<\log_2(1+\sqrt{2})$ 爲所求。

高二部份

1. 求解 $\begin{cases}5x-2y=10 & \cdots\cdots① \\ 3x-4y>-8 & \cdots\cdots②\end{cases}$

解 $5x-2y=10$ 得 $y=\frac{5x-10}{2}$ 代入②

$\Rightarrow 3x-2(5x-10)>-8$

$\Rightarrow x<4$ ……………………………③

又由①得 $x=\frac{2y+10}{5}$ 代入②

$\Rightarrow\frac{3(2y+10)}{5}-4y>-8$

$\Rightarrow y<5$ ……………………………④

故所求爲 $x<4$ 且 $y<5$

類題 求解 $\begin{cases}x^2+y^2<25 \\ x+y=5\end{cases}$

答案 ① $\begin{cases}0<x<5 \\ 0<y<5\end{cases}$ ② $\begin{cases}0<x<5 \\ y=5-x\end{cases}$

③ $\begin{cases}0<y<5 \\ y=5-x\end{cases}$

此三組答案何組正確

2. 求解 $\sin\theta+\cos\theta=1$，$\theta\in R$

解 ∵ $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1$

$\Rightarrow 1+2\sin\theta\cos\theta=1$

∴ $2\sin\theta\cdot\cos\theta=0$

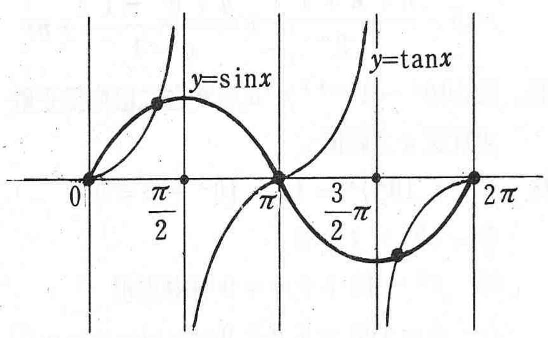
$\Rightarrow\sin\theta=0$ 或 $\cos\theta=0$

(1) 當 $\sin\theta=0\Rightarrow\theta=n\pi$

(2) 當 $\cos\theta=0\Rightarrow\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}$ 爲所求

3. 於 $0\leq x\leq 2\pi$ 中求 $y=\sin x$ 與 $y=\tan x$ 之共同解。

解 由圖解知共有5交點，共有5組解。



4. 設 $\sin\theta$，$\cos\theta$ 爲 x 之方程式 $x^2-ax+a=0$ 之二根，求 a 値。

解 由根與係數間之關係知

$\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=a & \cdots\cdots① \\ \sin\theta\cdot\cos\theta=a & \cdots\cdots②\end{cases}$

由①^2 $-2\times$②$\Rightarrow 1=a^2-2a$

$\Rightarrow a^2-2a-1=0$

$\Rightarrow a=1\pm\sqrt{2}$ 爲所求

5. 設 $f(x)=3\sin^2x+4\csc^2x$，有意義求 $f(x)$之最小值。

解 $\because$ $\sin^2x>0$，$\csc^2x>0$

$\therefore$ 由算術平均數≧幾何平均數知

$3\sin^2x+4\csc^2x$

$\geq 2\sqrt{3\sin^2x\cdot 4\csc^2x}=4\sqrt{3}$

$\therefore$ $f(x)$之最小值爲 $4\sqrt{3}$

6. 求證 $\tan\frac{x}{4}=\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{1+\cos\frac{x}{2}}$

$\frac{x}{4}\neq\frac{\pi}{2}+n\pi$，$n\in Z$，$0<x<4\pi$

解 右邊 $=\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\frac{x}{2}}}{\sqrt{(1+\cos\frac{x}{2})^2}}$

$=\sqrt{\dfrac{1-\cos\frac{x}{2}}{1+\cos\frac{x}{2}}}=\tan\dfrac{x/2}{2}$

$=\tan\frac{x}{4}=$ 左邊

類題 求證 $\cot\frac{x}{4}=\dfrac{1+\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$

7. 設 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，且

$\sin\alpha=\frac{13}{14}$，$\sin\beta=\frac{11}{14}$，求 $\alpha+\beta$之值

解 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，$\sin\alpha=\frac{13}{14}$，

$\Rightarrow\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-(\frac{13}{14})^2}$

$=\frac{3\sqrt{3}}{14}$

$\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{1-(\frac{11}{14})^2}$

$=\frac{5\sqrt{3}}{14}$

又 $\sin(\alpha+\beta)$

$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$=\frac{13}{14}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{14}+\frac{3\sqrt{3}}{14}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{14}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}$

但 $0<\alpha+\beta<\pi$

$\therefore$ $\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$ 或 $\alpha+\beta=\frac{2}{3}\pi$

8. 求解 $\sin^{-1}x=\cos^{-1}x$

解 令 $\sin^{-1}x=\cos^{-1}x=\theta$

$\Rightarrow\sin\theta=\cos\theta=x$

$\because$ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\therefore$ $x^2+x^2=1\Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

9. 令 $\cos^{-1}x=\beta$，求 $\cos^{-1}(2x^2-1)$ $=$ ________。

解 $\because$ $\cos^{-1}x=\beta\Rightarrow\cos\beta=x$

$\therefore$ $2x^2-1=2\cos^2\beta-1=\cos2\beta$

$\therefore$ 原式 $=\cos^{-1}(\cos2\beta)=2\beta$

10. 設 α，β爲方程式 $\sin x-\sqrt{3}\cos x=1$ $(0\leq x<2\pi)$之二根，求 $\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}$之值。

解 令 $\tan\frac{x}{2}=t$ 則

$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$

$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

將此代入原方程式得

$\frac{2t}{1+t^2}-\sqrt{3}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}=1$

$\therefore$ $2t-\sqrt{3}(1-t^2)=t^2+1$

$\therefore$ $(\sqrt{3}-1)t^2+2t-(\sqrt{3}+1)$ $=0$

設其兩根爲 t_1，t_2

則 $t_1+t_2=-\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}=-(\sqrt{3+1})$

令 $t_1=\tan\dfrac{\alpha}{2}$，$t_2=\tan\dfrac{\beta}{2}$，

則 $\tan\dfrac{\alpha}{2}+\tan\dfrac{\beta}{2}=-(\sqrt{3+1})$

11. 設 $0°<x<y<360°$，求解

$$\begin{cases}\sin(x+y)=\sin x+\sin y & \cdots① \\ \cos(x+y)=\cos x+\cos y & \cdots②\end{cases}$$

解 $①^2+②^2\Rightarrow 1$

$$=2+2(\cos x\cos y+\sin x\sin y)$$

$$\Rightarrow\cos(y-x)=-\frac{1}{2}$$

$\because\ 0°<x<y<360°$

$\therefore\ y-x=120°,\ 240°$ ……………③

由①

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

$$=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

（注意不可將 $\sin\dfrac{x+y}{2}$ 約掉）

$$\Rightarrow\sin\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x+y}{2}-\cos\frac{x-y}{2}\right)=0$$

$$\Rightarrow-2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{x+y}{2}=0$$

但 $0°<x<y<360°$

$$\Rightarrow 0°<\frac{x}{2}<\frac{y}{2}<180°$$

$$\therefore\ \sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{y}{2}\neq 0$$

$$\therefore\ \sin\frac{x+y}{2}=0\Rightarrow\frac{x+y}{2}=180°$$

$\Rightarrow x+y=360°$ ……………………④

由③④得 $\begin{cases}x=120°\\ y=240°\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=60°\\ y=300°\end{cases}$

為所求。

12. 求證 $\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$

解 如圖所示

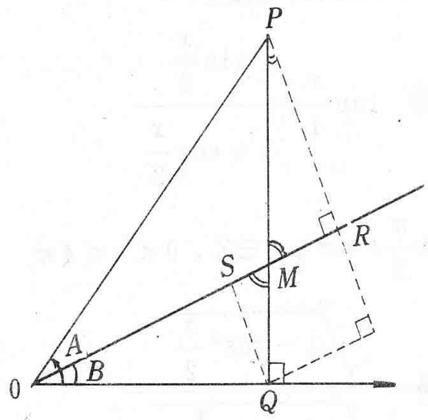
$$\cos(A-B)=\frac{OR}{OP}=\frac{OS+SR}{OP}$$

$$=\frac{OS}{OP}+\frac{SR}{OP}$$

$$=\frac{OQ}{OP}\times\frac{OS}{OQ}+\frac{PQ}{OP}\times\frac{SR}{PQ}$$

$$=\cos A\cdot\cos B+\sin A\cdot\sin B$$

（$\because\angle MPR=\angle MOQ=\angle B$ 之故）



13 求解 $\tan^{-1}2x+\tan^{-1}3x=\dfrac{\pi}{4}$

解 $\because\ \tan(\tan^{-1}2x+\tan^{-1}3x)=\tan\dfrac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow\frac{(\tan\tan^{-1}2x)+(\tan\tan^{-1}3x)}{1-(\tan\tan^{-1}2x)(\tan\tan^{-1}3x)}=1$$

$$\Rightarrow\frac{2x+3x}{1-6x^2}=1\Rightarrow 6x^2+5x-1=0$$

$\Rightarrow x=\dfrac{1}{6}$ 或 $x=-1$ 為所求

14. 設 $\triangle ABC$ 之底邊 $AB=2c$，且 $\cot A+(a+1)\cot B=b$，求頂點 C 之軌跡方程式（a，b，c 為定點）。

解 取 AB 為 x 軸，AB 之中垂線為 y 軸

如圖 $A(-c,0)$，$B(c,0)$

設 $c(x,y)$

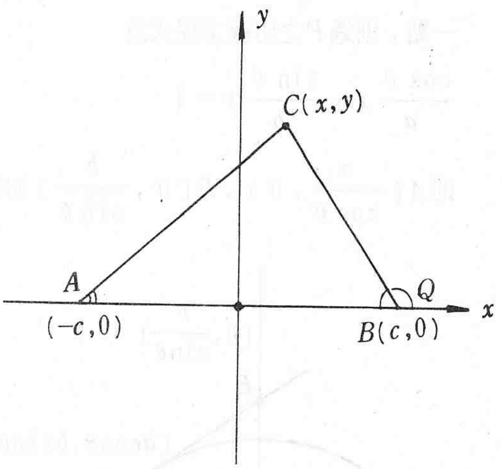
由 $\tan A=\dfrac{y-0}{x+c}\Rightarrow\cot A=\dfrac{x+c}{y}$

又 $\tan B=\dfrac{y}{x-c}\Rightarrow\cot B=\dfrac{x-c}{y}$

代入 $\cot A+(a+1)\cot B=b$ 中得

$$\frac{x+c}{y}+(a+1)\cdot\frac{x-c}{y}=b$$

$\Rightarrow(a+2)x-by-ac=0$



15. 平面上三相異直線：L_1 ：$4x+y=4$ ，L_2 ：$mx+y=0$ ，L_3 ：$2x-3my=4$ 不能圍成三角形，求m之值。

解 依題意知 $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 4 \\ m & 1 & 0 \\ 2 & -3m & 4 \end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow m=-1$ or $\dfrac{2}{3}$

16. 求過定點$A(3,6)$且與$x^2+y^2-2x-6y+6=0$相切之直線方程式。

解 圓心為$(1,3)$，$r=2$

令所求為

$y-6=m(x-3)$

$\Rightarrow mx-y+(6-3m)=0$

由相切知 $2=\dfrac{|m-3+6-3m|}{\sqrt{m^2+1}}$

$\Rightarrow 4m^2+4=4m^2-12m+9$

$\Rightarrow 12m=5\Rightarrow m=\dfrac{5}{12}$

故所求為

$y-6=\dfrac{5}{12}(x-3)$

$\Rightarrow 5x-12y+57=0$

17. (66年聯考)在(X,Y)座標平面上，△為以$(0,0)$，$(1,0)$，$(0,1)$為頂點的三角形，在△的周界上，函數$f(x,y)=x^3+y^3-3xy$之最大值為M，最小值為m，則(A)$M=1$，$m=-\dfrac{1}{2}$ (B)$M=1$，$m=0$ (C)$M=3$，$m=-3$ (D)$M=1$，$m=-\dfrac{25}{27}$ (E)$M=+\infty$，$m=-\infty$

解 將$(0,0)$，$(1,0)$，$(0,1)$代入$f(x,y)$中得$f(0,0)=0$，$f(1,0)=1$，$f(0,1)=1$

$\therefore$ $M=1$，$m=0$ 答(B)

18. 設$S=\{(x,y)\mid 1\le x+y\le 3,\ 1\le 2x+y\le 5\}$若$A=\{3x+y\mid(x,y)\in S\}$求$A$之最大值與最小值________。

解 令 $1\le x+y\le 3$ ……………………①

$1\le 2x+y\le 5$ ……………………②

由②－①$\Rightarrow -2\le x\le 4$ ……………………③

由①－③$\Rightarrow -3\le y\le 5$ ……………………④

3③＋④$\Rightarrow -9\le 3x+y\le 17$

$\therefore$ 最大值為9，最小值為－1。

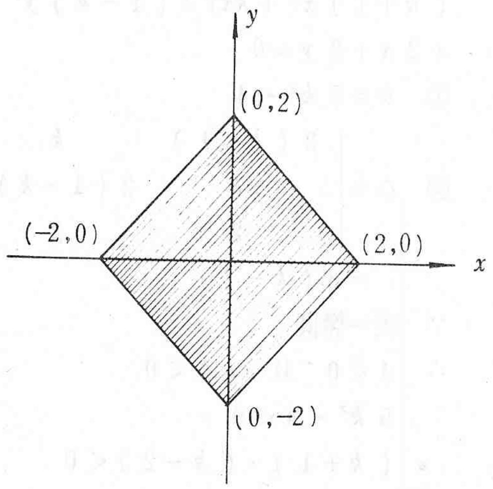
19. 不等式$\log_2(|x|+|y|-2)\le 1$所圍成區域之面積為________並圖解之。

解 $\because$ $\log_2(|x|+|y|-2)\le 1$

$\therefore$ $|x|+|y|-2\le 2$

$\Rightarrow |x|+|y|\le 4$

面積為 $4\times(\dfrac{1}{2}\times 4\times 4)=32$



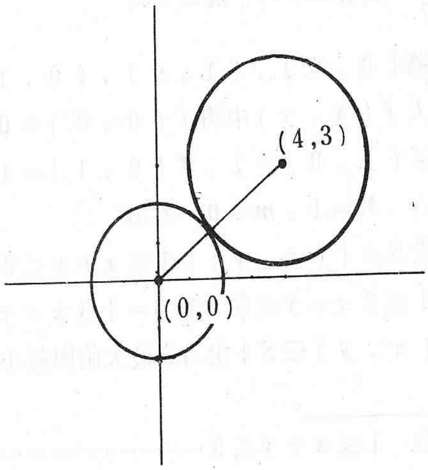
20. 求以點$(4,3)$為圓心而與圓$x^2+y^2=4$相切之圓方程式________。

解　如圖所示令所求圓之半徑爲 r

$r+2=\sqrt{(4-0)^2+(3-0)^2}$

$\therefore\ r=3$

$\therefore\ (x-4)^2+(y-3)^2=9$ 爲所求



21. 過點 (2 , 1) 對雙曲線 $2x^2-3y^2=6$ 的切線方程式爲何？

解　令所求爲　$y=mx\pm\sqrt{3m^2-2}$

$\because$ 過 (2 , 1)

$\therefore\ 1=2m\pm\sqrt{3m^2-2}$

$\Rightarrow m^2+4m+3=0\Rightarrow m=1$ 或 3

故所求爲　$y=x\pm1$ 或 $y=3x\pm5$

22. 若 $f(x,y)=x^2+y^2+2x+2y+k(x^2+xy-y^2)=0$ 表一橢圓，求 k 之範圍。

解　化原式爲

$(k+1)x^2+kxy+(1-k)y^2+2x+2y=0$

① $\delta=5k^2-4$

② $\triangle=\begin{vmatrix}2(k+1) & k & 2\\ k & 2(1-k) & 2\\ 2 & 2 & 0\end{vmatrix}$

$=8(k-2)$

$\because$ 表一橢圓

$\therefore\ \delta<0$　且　$a\triangle<0$

$5k^2-4<0$

$(k+1)\cdot(k-2)<0$

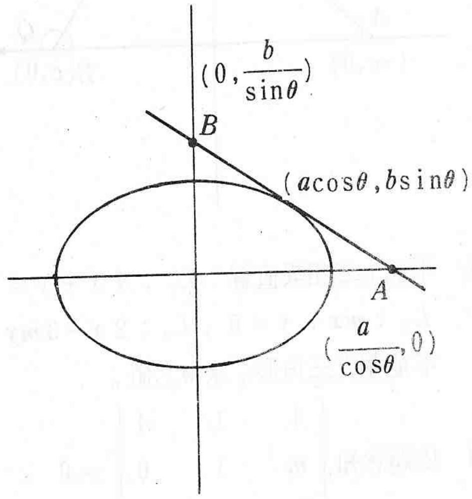
$\Rightarrow -\dfrac{2}{\sqrt5}<k<\dfrac{2}{\sqrt5}$　爲所求

23. 設直線 L : $y=mx+k$, $m\neq0$ 與橢圓 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 相切 ($a>b>0$), 求 L 被二座標軸所截取線段長之最小值爲 。

解　設 $P(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ 爲橢圓上之一點，則過 P 之切線方程式爲

$$\frac{\cos\theta}{a}x+\frac{\sin\theta}{b}y=1$$

則 $A\left(\dfrac{a}{\cos\theta},0\right)$, $B\left(0,\dfrac{b}{\sin\theta}\right)$ 如圖



$$\therefore\ AB=\sqrt{\left(\frac{a}{\cos\theta}\right)^2+\left(\frac{b}{\sin\theta}\right)^2}$$

但 $\left(\dfrac{a}{\cos\theta}\right)^2+\left(\dfrac{b}{\sin\theta}\right)^2$

$\geq 2\cdot\sqrt{\dfrac{4a^2b^2}{(2\sin\theta\cos\theta)^2}}$

$\therefore\ \left(\dfrac{a}{\cos\theta}\right)^2+\left(\dfrac{b}{\sin\theta}\right)^2$

$\geq 4ab\cdot\sqrt{\dfrac{1}{(\sin2\theta)^2}}$

$=\dfrac{4ab}{|\sin2\theta|}$

$\therefore\ \left(\dfrac{a}{\cos\theta}\right)^2+\left(\dfrac{b}{\sin\theta}\right)^2$

$\geq\dfrac{4ab}{|\sin2\theta|}\geq4ab$

當 $|\sin2\theta|=1$ 時等號成立

$\therefore\ AB\geq\sqrt{4ab}$ 即 AB 之最小值爲 $2\sqrt{ab}$ 。

指 正

高一部份指正

1. （×）

正解 令 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{a}=k$

即 $\begin{cases} a=bk \cdots\cdots ① \\ b=ck \cdots\cdots ② \\ c=dk \cdots\cdots ③ \\ d=ak \cdots\cdots ④ \end{cases}$

④代入③$\Rightarrow c=ak^2 \cdots\cdots ⑤$

⑤代入②$\Rightarrow b=ak^3 \cdots\cdots ⑥$

⑥代入①$\Rightarrow a=ak^4 \cdots\cdots ⑦$

$\because\ a\neq 0\ \therefore\ k^4=1\ \therefore\ k=\pm 1$

（$\because\ k\in R$之故）

討論 (1) 當 $k=1$時

④⑤⑥得 $a=b=c=d$

$\therefore\ \frac{a-2b+3c-4d}{a+2b+3c+4d}=\frac{1}{5}$

(2) 當 $k=-1$時

由④⑤⑥得

$b=-a$，$c=a$，$d=-a$代入所求

得 $\frac{a-2b+3c-4d}{a+2b+3c+4d}$

$=\frac{a-2(-a)+3a-4(-a)}{a+2(-a)+3a+4(-a)}$

$=-5$

故所求為$\frac{1}{5}$或-5。

類題 （×）

正解 $\because\ k=\frac{a+b+c}{2(a+b+c)}$ 必須加上討論

① 當$a+b+c\neq 0$ 則$k=\frac{1}{2}$為所求

② 當$a+b+c=0$

則k之值不可由加此定理求之

$\because\ k=\frac{a}{b+c}=\frac{a}{-a}=-1$

（$\because\ a\neq 0$且$b+c=-a$之故）

$\therefore$ 由上知 $k=\frac{1}{2}$或-1

2. （×）

定理 $f(x)\in Q[x]$，若$f(x)=0$有$x=a+b\sqrt{m}$之根，則$x=a-b\sqrt{m}$亦為其根。其中a，$b\in Q$，$\sqrt{m}$為無理數。

正解 令 $\alpha=3+\sqrt{2}$，另一根為β

$\Rightarrow \alpha+\beta=-6\ \therefore\ 3+\sqrt{2}+\beta=-6$

$\therefore\ \beta=-9-\sqrt{2}$

$\therefore\ \alpha\cdot\beta=(3+\sqrt{2})(-9-\sqrt{2})$

$=4-k$

$\therefore\ -29-12\sqrt{2}=4-k$

$\therefore\ k=33+12\sqrt{2}$為所求

3. （×）

定理 $f(x)\in R[x]$，若$f(x)=0$有$x=\alpha+\beta i$，α，$\beta\in R$之根，則$x=\alpha-\beta i$亦為其根。

正解 設另一根為β，則

$(1-i)\cdot\beta=1+i\Rightarrow\beta=\frac{1+i}{1-i}=i$

$\therefore\ (1+i)+i=a$

$\Rightarrow a=1+2i$為所求

註之證明

註①證 令 $f(x)=ax^2+bx+c=0$

$\because\ f(\alpha+\beta\sqrt{m})=0$

$\Rightarrow a(\alpha+\beta\sqrt{m})^2$

$+b(\alpha+\beta\sqrt{m})+c=0$

$\Rightarrow (a\alpha^2+a\beta^2m+b\alpha+c)$

$+(2\alpha\beta a+b\beta)\sqrt{m}=0$

$\therefore \begin{cases} a\alpha^2+a\beta^2m+b\alpha+c=0 \\ 2\alpha\beta a+b\beta=0 \end{cases} \cdots ①$

又 $f(\alpha-\beta\sqrt{m})$

$=a(\alpha-\beta\sqrt{m})^2$

$+b(\alpha-\beta\sqrt{m}+c)$

$=(a\alpha^2+a\beta^2m+b\alpha+c)$

$-(2\alpha\beta a+b\beta)\sqrt{m}$

$=0-0\sqrt{m}$（由①式得）

$=0$

$\therefore\ \alpha-\beta\sqrt{m}$亦事$f(x)=0$之一根

註2之證明學生們自習，（亦可用共軛複數之性質證明之）

4. ① ○

② ×

① 省略

② ②錯誤之理由如下：

$\because\ x+2y\geq 2\sqrt{2xy}$

當$x=2y$時等號成立

$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\geq 2\sqrt{\frac{2}{xy}}$

當 $\frac{1}{x}=\frac{2}{y}\Rightarrow y=2x$時等號成立

欲使$(x+2y)(\frac{1}{x}+\frac{2}{y})\geq 8$有極小值8必上兩式等號同時成立，然

$\begin{cases}x=2y\\ y=2x\end{cases}\Rightarrow x=4x$

$\Rightarrow 1=4$（矛盾）

正解 (2) $\because\ (x+2y)(\frac{1}{x}+\frac{2}{y})$

$=5+\frac{2x}{y}+\frac{2y}{x}$

$\geq 5+2\sqrt{\frac{2x}{y}\cdot\frac{2y}{x}}$

$\therefore\ (x+2y)(\frac{1}{x}+\frac{2}{y})\geq 9$

當 $\frac{2x}{y}=\frac{2y}{x}$

即$x=y$時有極小值9

5. （○）

類題 （×）

理由 $\because$ 最小值不存在，故解法有誤。

$\because$ 當 $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{1}{3}$

即 $x=\frac{1}{3}$，$y=\frac{2}{3}$時等號成立

然此時 $\sqrt{\frac{x+2y+3}{x^2+y^2+1}}=\sqrt{14}$之故

6. （×）

理由 $\because$ $3x+1<0$與$(a+b)x+(2a-3b)<0$同義

$\therefore\ \frac{a+b}{3}=\frac{2a-3b}{1}$且$a+b$與3同號，即$a+b>0$

由上得 $a=2b$ 且 $a+b>0$

故 $a>0$，$b>0$

（why? 學生自行舉例即可知）

$\therefore$ $k>0$ 故所求爲 $x>-3$

7. （×）

理由 ① 此種試題是要證明定理成立，故不可視定理先成立後，再令$n=3$。

② 倘先證

$\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}$

$\geq\sqrt[n]{a_1, a_2\cdots\cdots a_n}$,

$a_i\in R^+$，$i=1, 2\cdots\cdots n$

再令$n=3$亦可

正解 令 $a, b, c, d\in R^+$

$\because\ \frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\Rightarrow a+b\geq 2\sqrt{ab}\cdots$①

$\frac{c+d}{2}\geq\sqrt{cd}\Rightarrow c+d\geq 2\sqrt{cd}\cdots$②

又 $\frac{(a+b)+(c+d)}{2}$

$\geq\sqrt{(a+b)(c+d)}$

$\geq\sqrt{4\sqrt{abcd}}$ （由①②知）

$\Rightarrow\frac{a+b+c+d}{2}\geq 2\sqrt[4]{abcd}$

$\Rightarrow\frac{a+b+c+d}{4}\geq\sqrt[4]{abcd}\cdots\cdots$③

令 $d=\frac{a+b+c}{3}$代入③

$\Rightarrow d\geq\sqrt[4]{abcd}\Rightarrow d^4\geq abcd$

$\Rightarrow d^3\geq abc\Rightarrow d\geq\sqrt[3]{abc}$

$\therefore\ \frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$ 爲所求

8. （×）

理由 ① 有文字需討論之試題，答案不可合併寫。

<例>解法中若$a=3$，則所求爲$x>0$或$x<0$此種寫法不正確，必書爲

$a=3$ 時所求爲 $x>0$ 。

② 所求答必書爲

$$\begin{cases} ① \text{ 當 } a>2 \text{ 時 } \quad x>\dfrac{a-3}{a-2} \\ ② \text{ 當 } a<2 \text{ 時 } \quad x<\dfrac{a-3}{a-2} \end{cases}$$

9.　(×)

理由　只要落選票總和少於 x 即可

故該爲　$300-5x<x$

$\Rightarrow x>\dfrac{300}{6}\Rightarrow x\geq 51$

$\therefore$　至少爲 51 票

10.　(×)

理由　必須 $(x+1)>0$ 解法才正確

正解　解法 1

① 當 $x>-1$ 時　$y\geq 1$

② 當 $x<-1$ 時　$-(x+1)>0$

$\therefore\ -(x+1)+\dfrac{1}{-(x+1)}$

$\geq 2\cdot\sqrt{-(x+1)\cdot\dfrac{1}{-(x+1)}}$

$\therefore\ -(x+1)+\dfrac{1}{-(x+1)}\geq 2$

$\therefore\ (x+1)+\dfrac{1}{x+1}\leq -2$

$\therefore\ y\leq -3$

故所求爲 $\begin{cases}\text{當 } x>-1 \text{ 時}\quad y\geq 1\\ \text{當 } x<-1 \text{ 時}\quad y\leq -3\end{cases}$

解法 2

令　$y=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$

$\Rightarrow x^2+(1-y)x+(1-y)=0\quad x\in R$

$\therefore\ \triangle=(1-y)^2-4(1-y)\geq 0$

$\Rightarrow(1-y)(1-y-4)\geq 0$

$\Rightarrow(y-1)(y+3)\geq 0$

$\therefore\ y\geq 1$ 或 $y\leq -3$ 爲所求

11.　(×)

理由　① 由解法中得 $18\ldots\cdots<S<20$

未必得 $19<S<20$ (why)

② 倘改寫 $18<S<20$ 亦不滿足，S 在兩連續整數之間。

正解　將 $n=2$, $3\cdots\cdots100$ 代入已知條件得

$2(\sqrt{3}-\sqrt{2})<\dfrac{1}{\sqrt{2}}<(\sqrt{2}-1)$

$2(\sqrt{4}-\sqrt{3})<\dfrac{1}{\sqrt{3}}<(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$2(\sqrt{101}-\sqrt{100})<\dfrac{1}{\sqrt{100}}$

$<2(\sqrt{100}-\sqrt{99})$

以上各式相加得

$2(\sqrt{101}-\sqrt{2})<S-1$

$<2(\sqrt{100}-1)$

$\therefore\ 2(\sqrt{101}-\sqrt{2})+1<S$

$<18+1$

$\Rightarrow 18,\cdots\cdots S<19$

$\therefore\ 18<S<19$ 爲所求

12.　(×)

理由　x^2-3x+4 , x^2-5x+6

未知是否爲正

正解　$\because\ \dfrac{1}{x^2+3x-4}-\dfrac{1}{x^2-5x+6}>0$

$\Rightarrow\dfrac{1}{(x-1)(x+4)}$

$-\dfrac{1}{(x-2)(x-3)}>0$

$\Rightarrow\dfrac{x^2-5x+6-x^2-3x+4}{(x-1)(x-2)(x-3)(x+4)}$

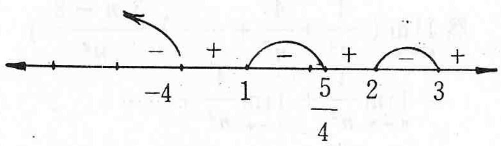
>0

$\Rightarrow\dfrac{-8x+10}{(x-1)(x-2)(x-3)(x+4)}$

>0

$\Rightarrow\dfrac{4x-5}{(x-1)(x-2)(x-3)(x+4)}$

<0



所求爲　$2<x<3$　或　$x<\frac{5}{4}$

或　$x<-4$

13（×）

理由　① $\because \lim\limits_{n\to\infty} r^n=\begin{cases}\text{收斂 當}-1<r\leq 1\\ \text{發散 當}r>1\text{或}r\leq -1\end{cases}$

② $a^0=1$，但 $a\in R$，$a\neq 0$，$\infty^0=1$ 無意義

正解　$\because \lim\limits_{n\to\infty}(3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(4^n\left[\left(\frac{3}{4}\right)^n+1\right]\right)^{\frac{1}{n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}4\left[\left(\frac{3}{4}\right)^n+1\right]^{\frac{1}{n}}$

$=4\times(0+1)^0=4$

類題　$a_n=\left(4^{\frac{1}{n}}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{n}}+1\right]\right)^n$

$=4\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{n}}+1\right]^n$

又　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(\frac{3}{4}\right)^0=1$

$\therefore$ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

$=\lim\limits_{n\to\infty}4\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{n}}+1\right]^n$

$=4\times(1+1)^\infty$

$\therefore$ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 爲發散

14.（×）

理由　若 $\langle a_n\rangle,\langle b_n\rangle\cdots\cdots\langle \ell_n\rangle$ 均收斂

則 $\lim\limits_{n\to\infty}(\underbrace{a_n+b_n+\cdots\cdots+\ell_n}_{\text{有限多個}})$

$=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n+\cdots\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\ell_n$ ①

上式各極限均存在

然 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^2}+\cdots\cdots+\frac{3n-2}{n^2}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}+\cdots\cdots$

$+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-2}{n^2}$（不存在）

因 $n\to\infty$ 表共有無限多項之故

正解　$\because$ $1+4+7+\cdots\cdots+(3n-2)$

$=\sum\limits_{k=1}^{n}(3k-2)$

$=3\sum\limits_{k=1}^{n}k-\sum\limits_{k=1}^{n}2$

$=3\cdot\frac{n(n+1)}{2}-2n$

$=\frac{3n^2-n}{2}$

$\therefore$ 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{3n^2-n}{2}}{n^2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-n}{2n^2}=\frac{3}{2}$

15（×）

理由　此題要注意首項 a_1 之用法，此題 $a_n=S_n-S_{n-1}$，$n\geq 2$

正解　$\because$ $T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k\cdot a_{k+1}}$

$=\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}$

$=\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$

$=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$

$=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)$

$\therefore$ $T=\lim\limits_{n\to\infty}T_n=\frac{1}{12}+\frac{1}{8}=\frac{5}{24}$ 爲所求

16.（×）

理由　若 $\langle a_n\rangle$ 不是收斂，則不可用 $\alpha=\frac{\alpha+1}{\alpha-1}$

求之。

正解 ∵ $n=2 \Rightarrow a_2=3$

$n=3 \Rightarrow a_3=2$

$n=4 \Rightarrow a_4=3$

∴ 此數列爲｛2，3，2，3……｝振動數列

∴ $\langle a_n \rangle$爲發散數列

17. （×）

理由 等比級數

$$\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1}=\begin{cases}\dfrac{a(1-r^n)}{1-r} & 當\ r\neq 1\\ na & 當\ r=1\end{cases}$$

故此題該討論q之性質，如下：

① 若$q\neq 1$，則

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=p\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{q(q^n-1)}{q-1}+nr$$

② 若 $q=1$，則

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=p\cdot\frac{n(n+1)}{2}+nq+nr=p\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n(q+r)$$

18. （×）

理由 $10^x=t>1$，非$t>0$，∵ $x>0$，

∴ $10^x>1$，其解法改爲如下：

$x^2-10t+a=0$之兩根皆大於1，

設兩根爲α，β，則

$\triangle=100-4a\geq 0\Rightarrow a\leq 25$ ………①

又$(\alpha-1)+(\beta-1)>0$

$\Rightarrow \alpha+\beta>2$成立

$(\alpha-1)(\beta-1)>0$

$\Rightarrow \alpha\beta-(\alpha+\beta)+1>0$

∴ $a-10+1>0\Rightarrow a>9$ ………②

由①②知 $9<a\leq 25$

19. （×）

理由 ∵ $\log a^2=2\log|a|$

＜例＞$\log(-2)^2=2\log|-2|$

正解 原式改爲

$2\log|7-9x|-2\log|3x-4|=2$

$\Rightarrow \log\left|\dfrac{7-9x}{3x-4}\right|=1$

$\Rightarrow \left|\dfrac{7-9x}{3x-4}\right|=10$

① 當 $\dfrac{7-9x}{3x-4}>0$

即 $\dfrac{7}{9}<x<\dfrac{4}{3}$時

$\dfrac{7-9x}{3x-4}=10\Rightarrow x=\dfrac{47}{39}$（合）

② 當 $\dfrac{7-9x}{3x-4}<0$

即 $x>\dfrac{4}{3}$ 或 $x<\dfrac{7}{9}$時

$-\dfrac{7-9x}{3x-4}=10\Rightarrow x=\dfrac{11}{7}$（合）

∴ $x=\dfrac{11}{7}$，$\dfrac{49}{39}$爲所求

20. （×）

正解 ∵ $(\log_2 x)^2+b\log_2 x+c=0$

老羅看錯b得

$c=\log_2\dfrac{1}{4}\times\log_2\dfrac{1}{8}$

$=(-2)\times(-3)=6$

老王看錯a得

$-b=\log_2\dfrac{1}{2}+\log_2 64$

$=-1+6=5\Rightarrow b=-5$

∴ $b=-5$，$c=6$爲所求

21. （×）

理由 此種問題要注意討論

∵ $(2-\log x)\cdot\log a=0$

① 若 $\log a=0$ 即 $a=1$

則 $x>0$，$x\neq 1$爲所求

② 若 $\log a\neq 0\Rightarrow x=100$

22. （×）

理由 解法中

$$\begin{cases} ① \text{ 若 } a \neq 1 \text{ 且 } b \neq 0 \\ \quad \text{則 } x = \dfrac{ab-2b}{a+b-1} \\ ② \text{ 若 } a = 1 \text{ 則 } b = 0 \text{ 此時} \\ \quad 10^x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \log\dfrac{1}{2} \text{為所求} \end{cases}$$

23.　(×)

理由　此題必須討論

① $k<0$ 則 $A=\phi$ ∴ $A\subset B$ 成立

② 當 $k\geq 0$ 則如解法所述得 $k\leq 4$

∴ $0\leq k\leq 4$

取①，②之聯集得 $k\leq 4$

24.　(×)

理由　$2^x>0$ 對 $\forall\, x\in R$ 成立

∴ 在 $0<2^x<1+\sqrt{2}$ 中

考慮 $2^x<1+\sqrt{2}$ 即可

∴ $x<\log_2(1+\sqrt{2})$ 為所求

高二部份

1.　(×)

理由　∵ $x<4$，$y<5$ 為所求時，

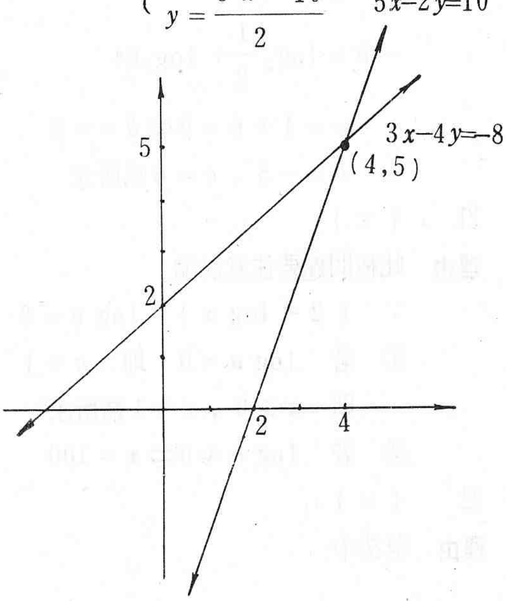
吾人取 $x=-10$，$y=0$ 代入不合

正解　由①得 $y=\dfrac{5x-10}{2}$ 代入②

$\Rightarrow 3x-2(5x-10)>-8$

$\Rightarrow x<4$

故所求為 $\begin{cases} x<4 \\ y=\dfrac{5x-10}{2} \end{cases}$



另解亦可　由①得 $x=\dfrac{2y+10}{5}$ 代入②

$\Rightarrow 3\cdot\dfrac{(2y+10)}{5}-4y>-8$

$\Rightarrow y<5$ 故

$\begin{cases} y<5 \\ x=\dfrac{2y+10}{5} \end{cases}$ 為所求

類題　(2)，(3)才為所求。

2.　(×)

理由　∵ 若 $0\leq\theta<2\pi$ 時

所求可為 $\theta=0$，π，$\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{2}\pi$，然

$$\begin{cases} \theta=\pi \text{時，} \\ \sin\pi+\cos\pi=0+(-1)\neq 1 \\ \theta=\dfrac{3}{2}\pi \text{時，} \\ \sin\dfrac{3}{2}\pi+\cos\dfrac{3}{2}\pi=-1+0\neq 1 \end{cases}$$

故　$\theta=n\pi$ 或 $n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 非所求

正解　∵ $\sin\theta+\cos\theta=1$

∴ $\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)$

$=1$

$\Rightarrow\ \cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow\ \theta-\dfrac{\pi}{4}=2n\pi\pm\dfrac{\pi}{4}$

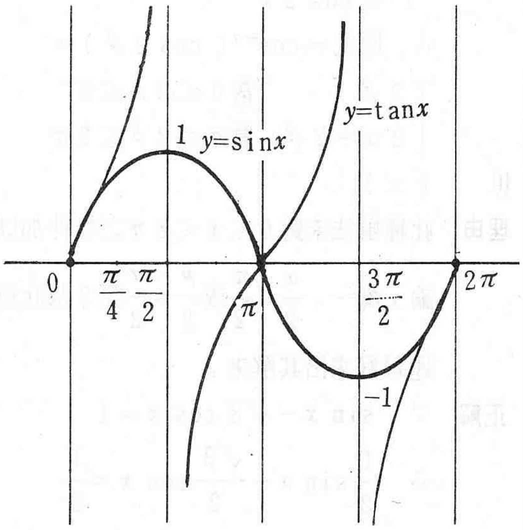
$\Rightarrow\ \theta=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 或 $\theta=2n\pi$ 為所求

註　此種試題若直接平方會有增根，請特別注意驗算過程。

3.　(×)

理由　此乃圖形畫不正確之結果。

正解　圖形僅於 $x=0$，π，2π 有交點，故共3組解。



另解 $\because\ \sin x=\tan x$

$\Rightarrow\ \sin x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$

$\Rightarrow\ \sin x(\cos x-1)=0$

$\Rightarrow\ \sin x=0$ 或 $\cos x=1$

$\Rightarrow\ x=0$，π，2π 共三組解

4. (×)

理由 $\because\ \sin\theta+\cos\theta=a$ 又

$-\sqrt{2}\le\sin\theta+\cos\theta\le\sqrt{2}$

$\Rightarrow -\sqrt{2}\le a\le\sqrt{2}$ …………………… ①

又 $\sin\theta\cos\theta=a$

$\Rightarrow\ \dfrac{1}{2}\sin 2\theta=a$

$\Rightarrow\ \sin 2\theta=2a$

$\Rightarrow\ |2a|\le 1$

$\Rightarrow\ -\dfrac{1}{2}\le a\le\dfrac{1}{2}$ …………………… ②

由①②知 $-\dfrac{1}{2}\le a\le\dfrac{1}{2}$

故 $a=1+\sqrt{2}$ 不合

故所求為 $a=1-\sqrt{2}$

5. (×)

理由 $\because\ f(x)$ 之最小值 $4\sqrt{3}$ 成立必

$3\sin^2x=4\csc^2x$

然 $\begin{cases}\sin^2x\le 1\Rightarrow 3\sin^2x\le 3\\ \csc^2x\ge 1\Rightarrow 4\csc^2x\ge 4\end{cases}$

不可能相等，故 $4\sqrt{3}$ 非所求。

正解 $\because\ f(x)=3(\sin^2x+\csc^2x)+\csc^2x$

$\ge 3\cdot 2\cdot\sqrt{\sin^2x\cdot\csc^2x}+\csc^2x$

$\therefore\ f(x)\ge 6+\csc^2x$

又 $\csc^2x\ge 1$

$\therefore\ f(x)\ge 6+1$

$\therefore\ f(x)$ 之極小值為 7

討論 欲使極小值存在必

$\sin^2x=\csc^2x$ 且 $\csc^2x=1$

$\because\ x=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 能滿足上兩式

故極小值 7 存在。

6. (×)

正解 ① 若 $0<x<2\pi$

$\Rightarrow 0<\dfrac{x}{2}<\pi$，$0<\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\pi}{2}$

$\sin\dfrac{x}{2}=+\sqrt{1-\cos^2\dfrac{x}{2}}$

右邊 $=\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\dfrac{x}{2}}}{\sqrt{(1+\cos\dfrac{x}{2})^2}}$

$=\sqrt{\dfrac{1-\cos\dfrac{x}{2}}{1+\cos\dfrac{x}{2}}}$

$=\tan\dfrac{x}{4}=$ 左邊

公式：$\tan\dfrac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$

若 $2\pi<x<4\pi$

$\Rightarrow \pi<\dfrac{x}{2}<2\pi$，$\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{x}{4}<\pi$

$\therefore\ \sin\dfrac{x}{2}=-\sqrt{1-\cos^2\dfrac{x}{2}}$

$\therefore$ 右邊 $=\dfrac{-\sqrt{1-\cos^2\dfrac{x}{2}}}{\sqrt{(1+\cos\dfrac{x}{2})^2}}$

$$= -\sqrt{\frac{1-\cos\frac{x}{2}}{1+\cos\frac{x}{2}}}$$

$$= -(-\tan\frac{x}{4})$$

$$= \tan\frac{x}{4} = \text{左邊}$$

∴ 原題得證

另解 右邊 $= \dfrac{2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}}{2\cos^2\frac{x}{4}} = \dfrac{\sin\frac{x}{4}}{\cos\frac{x}{4}}$

$= \tan\frac{x}{4} =$ 左邊（此法較快）

7. （×）

理由 $\because \sin(\alpha+\beta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} > 0$

又 $\cos(\alpha+\beta)$

$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$= \dfrac{3\sqrt{3}}{14}\cdot\dfrac{5\sqrt{3}}{14} - \dfrac{13}{14}\times\dfrac{11}{14}$

$= -\dfrac{1}{2} < 0$

$\therefore \dfrac{\pi}{2} < \alpha+\beta < \pi$

$\therefore \alpha+\beta = \dfrac{2}{3}\pi$ 爲所求

8. （×）

正解 $\because \sin^{-1}x = \cos^{-1}x \Rightarrow 0 < x < 1$

令 $\sin^{-1}x = \cos^{-1}x = \theta$

$\Rightarrow \sin\theta = \cos\theta = x$

$\because 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

但 $x > 0$ ∴ $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 爲所求

9. （×）

理由 $\cos^{-1}\cos\theta = \theta$，$0 \le \theta \le \pi$ 之故

正解 $\because \cos^{-1}x = \beta \Rightarrow \cos\beta = x$

但 $0 \le \beta \le \pi$

又 $2x^2 - 1 = 2\cos^2\beta - 1 =$

$= \cos 2\beta$

∴ 原式 $= \cos^{-1}(\cos 2\beta) =$

$$\begin{cases} 2\beta & \text{當 } 0 \le 2\beta \le \pi \\ 2\pi - 2\beta & \text{當 } \pi \le 2\beta \le 2\pi \end{cases}$$

10. （×）

理由 此種解法未對 $0 \le x < 2\pi$ 之條件加以討論，萬一，$\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\pi}{2}$ 或 $\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{\pi}{2}$ 呢？故此種試題最好求出其解來。

正解 $\because \sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$

$\therefore \dfrac{1}{2}\sin x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \sin(x - \dfrac{\pi}{3}) = \dfrac{1}{2}$

$\because 0 \le x < 2\pi$

$\therefore x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5}{6}\pi$

$\therefore x = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{7}{6}\pi$

令 $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, $\beta = \dfrac{7}{6}\pi$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan\frac{\alpha}{2} = \tan\frac{\pi}{4} = 1 \\ \tan\frac{\beta}{2} = \tan\frac{7}{12}\pi = -(2+\sqrt{3}) \end{cases}$$

$\therefore \tan\dfrac{\alpha}{2} + \tan\dfrac{\beta}{2} = -(\sqrt{3}+1)$

爲所求

11. （×）

理由 ① 解題過程中若立即將等式兩邊平方，則會產生增根，故必將所得之解代入驗算。

② 今將 $\begin{cases} x = 120° \\ y = 240° \end{cases}$ 代入②中 得

$$\begin{cases} \cos(x+y) = \cos 360° = 1 \\ \cos x + \cos y \end{cases}$$

$= \cos 120° + \cos 240°$

$= -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = -1$

$\because 1 \neq -1$ 故不合

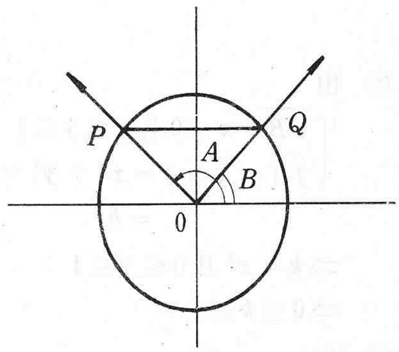
再將 $x = 60°$，$y = 300°$ 代入驗算

（省略）合所求。

12. （×）

理由 此種證明不能代表一般性，因 A，B 未必均為銳角之故。

正解 作一單位圓，以 x 軸正向為始邊，如圖，則 $P(\cos A, \sin A)$，$Q(\cos B, \sin B)$



① 當 $A-B \neq n\pi$，$n \in Z$，則

$$
\begin{aligned}
PQ^2 &= (\cos A-\cos B)^2+(\sin A-\sin B)^2\\
&= \cos^2 A+\cos^2 B+\sin^2 A+\sin^2 B-2(\cos A\cos B+\sin A\sin B)\\
&= 2-2(\cos A\cos B+\sin A\sin B)
\end{aligned}
$$

又由餘弦定律知

$$
\begin{aligned}
PQ^2 &= OP^2+OQ^2-2\,OP\,OQ\cos(A-B)\\
&= 2-2\cos(A-B)
\end{aligned}
$$

$\therefore \cos(A-B) = \cos A\cos B+\sin A\sin B$

② 當 $A-B = n\pi$，$n \in Z$，則 $Q-O-P$ 不能由餘弦定律求得

$\therefore \cos(A-B) = \cos n\pi = \pm 1$ 又

$\cos A\cos B+\sin A\sin B = \cos(n\pi+B)\cos B + \sin(n\pi+B)\sin B$ ……(*)

(1) 當 n 為偶數，則 $\cos A\cos B+\sin A\sin B = 1$

(2) 當 n 為奇數，則 $\cos A\cos B+\sin A\sin B = -1$

亦成立

13 （×）

理由 $\because$ 令 $\tan^{-1}2x = \alpha \Rightarrow \tan\alpha = 2x$

但 $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

$\tan^{-1}3x = \beta \Rightarrow \tan\beta = 3x$

但 $-\dfrac{\pi}{2} < \beta < \dfrac{\pi}{2}$

當 $x>0$ 則 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$

當 $x<0$

則 $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<0$，$-\dfrac{\pi}{2}<\beta<0$

$\therefore \tan^{-1}2x+\tan^{-1}3x<0$

$\therefore x=-1$ 不合 故 $x=\dfrac{1}{6}$ 為所求

14. （×）

理由 ① 必須討論 $y \neq 0$，若 $y=0$，則 A，B，C 三點共線不能構成三角形。

② $\tan B = \tan(\pi-\theta) = -\tan\theta$

$= -\dfrac{y}{x-c} \Rightarrow \cot B = \dfrac{c-x}{y}$

$\therefore \cot A = \dfrac{x+c}{y}$，$\cot B = \dfrac{c-x}{y}$

代入 $\cot A+(a+1)\cot B = b$ 中得

$\dfrac{x+c}{y}+(a+1)\cdot\dfrac{c-x}{y} = b$

$\Rightarrow ax+by = (a+2)c$

但 $y \neq 0$ 為所求

15. （×）

理由 ① 設
$$
\begin{aligned}
L_1 &: a_1x+b_1y+c_1=0\\
L_2 &: a_2x+b_2y+c_2=0\\
L_3 &: a_3x+b_3y+c_3=0
\end{aligned}
$$

三直線相異且兩兩不平行，則共點之充要條件為

$$
\triangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0
$$

② 若相異三直線不能圍成一三角形，則三線共點或三直線至少有二直線平行。

正解 ① 若三線相交於一點，則

$$
\begin{vmatrix} 4 & 1 & 4 \\ m & 1 & 0 \\ 2 & -3m & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow m=-1
$$

或 $\frac{2}{3}$

② 若三直線皆平行，則

$-4=m=\frac{2}{3m}$ （不合）

③ 若 $L_1 /\!/ L_2 \Rightarrow -4=-m$

$\Rightarrow m=4$（合）

若 $L_1 /\!/ L_3 \Rightarrow -4=\frac{2}{3m} \Rightarrow m=-\frac{1}{6}$

代入 L_3 得 $2x-\frac{y}{2}=4$（合）

若 $L_2 /\!/ L_3 \Rightarrow -m=\frac{2}{3m}$

$\Rightarrow 3m^2+2=0$（不合）

故所求 m 值爲 -1，$\frac{2}{3}$，4，$-\frac{1}{6}$

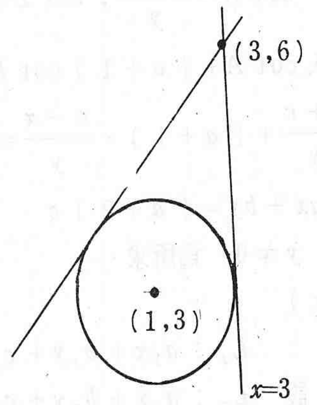
16. （×）

理由 圓外一點向圓所作之切線恰有二條

故所求爲

$5x-12y+57=0$ 或 $x=3$

（無斜率）



17. （×）

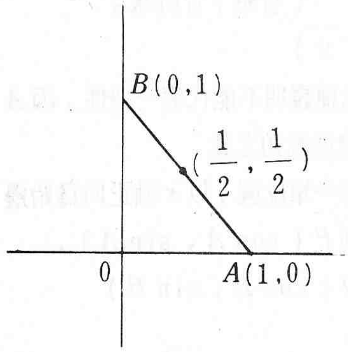
理由 此種非線性規劃之試題，故不可代入頂點求之。

正解 ① 由

$$\begin{cases} \overline{OA}: y=0 \text{ 且 } 0\le x\le 1 \\ f(x,y)=x^3+y^3-3xy=k \end{cases}$$

$\Rightarrow k=x^3$ 且 $0\le x\le 1$

$\Rightarrow 0\le k\le 1$



② 由

$$\begin{cases} \overline{OB}: x=0 \text{ 且 } 0\le y\le 1 \\ f(x,y)=x^3+y^3-3xy=k \end{cases}$$

$\Rightarrow k=x^3$ 且 $0\le y\le 1$

$\Rightarrow 0\le k\le 1$

③ 由

$$\begin{cases} \overline{AB}: x+y=1 \text{ 且 } 0\le x\le 1 \\ \qquad 0\le y\le 1 \\ f(x,y)=x^3+y^3-3xy=k \end{cases}$$

$\Rightarrow k=x^3+(1-x)^3-3x(1-x)$

$=6\left[x^2-x+\frac{1}{4}\right]-\frac{1}{2}$

$=6\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$

當 $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$ 時

k 之最小值爲 $-\frac{1}{2}$

當 $x=1$，$y=0$ 或 $x=0$，$y=1$

得 k 之最大值爲1

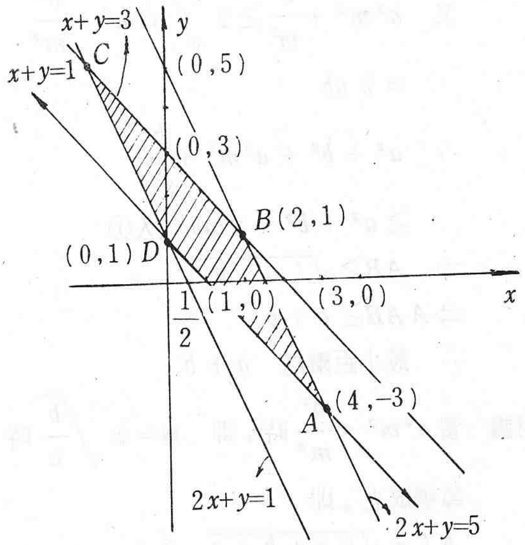
∴ 原式由①，②，③得

$M=1$，$m=-\frac{1}{2}$

18. （×）

理由 ① 此乃線性規劃之問題。

② 線性規劃之最大、最小值必落在區域之端點上。



正解 如圖所求爲平行四邊形▱$ABCD$區域

$A(4,-3)$，$B(2,1)$

$C(-2,5)$，$D(0,1)$

	$3x+y$
$(4,-3)$	$+9 \longrightarrow M$
$(2,1)$	7
$(-2,5)$	$-1 \longrightarrow m$
$(0,1)$	1

故所求爲

當 $x=4$，$y=-3$ 時有 $M=9$

當 $x=-2$，$y=5$ 時有 $m=-1$

19. (×)

理由 由 $\log_2 x \leq 1 \Rightarrow x \leq 2$

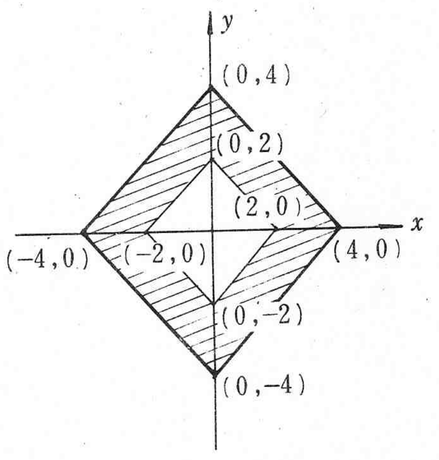
且 $x>0 \Rightarrow 0<x\leq 2$

故 $\log_2(|x|+|y|-2) \leq 1$

$\Rightarrow 0<|x|+|y|-2\leq 2$

$\Rightarrow 2<|x|+|y|\leq 4$

環形區域



所求面積爲

$4\times(\frac{1}{2}\times 4\times 4)-4\times(\frac{1}{2}\times 2\times 2)$

$=32-8=24$

20. (×)

理由 外切：$(x-4)^2+(y-3)^2=9$

或兩圓內切時則所求爲

$(x-4)^2+(y-3)^2=49$

21. (×)

理由 過 $(2,1)$ 向雙曲線所作之切線恰有2條，不可能有4條，在

$1=2m\pm\sqrt{3m^2-2}$ 求 m 時有增根。

正解 令所求爲 $y-1=m(x-2)$

代入 $2x^2-3y^2=6$ 中，得

$2x^2-3[mx+(1-2m)]^2=6$

$\Rightarrow(2-3m^2)x^2-6(m-2m^2)x$

$+(-12m^2+12m-9)=0$

∵ 相切

∴ $\triangle=36(m-2m^2)^2-4(2-3m^2)\cdot(-3)(4m^2-4m+3)=0$

$\Rightarrow m^2-4m+3=0$

$\Rightarrow m=1$ 或 $m=3$

∴ 所求爲

$y-1=x-2\Rightarrow x-y-1=0$

或 $y-1=3(x-2)$

$\Rightarrow 3x-y-5=0$ 爲所求

22. (×)

理由 當 $k=0$ 時，$f(x,y)=x^2+y^2+2x+2y=0$ 表一圓，故 $k=0$ 去掉

所求爲 $-\frac{2}{\sqrt{5}}<k<\frac{2}{\sqrt{5}}$，$k\neq 0$ 始爲所求。

23. (×)

理由 ∵ 當 $|\sin 2\theta|=1$

AB 最小值爲 $2\sqrt{ab}$ 此式錯誤

∵ $|\sin 2\theta|=1$ 中，

$2\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}$ ∴ $\theta=\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$

但當 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 時，得

$$\frac{a^2}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}+\frac{b^2}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}\geq 4\ ab$$

$\Rightarrow 2\ a^2+2\ b^2\geq 4\ ab$

$\Rightarrow (\ a-b\ )^2\geq 0$

即　$a=b$ 與 $a>b$ 矛盾

正解　令 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 之切線方程式為

$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ 交二座標軸

於　$B(\ 0\ ,\ \pm\sqrt{a^2m^2+b^2}\ )$，

$A(\ \mp\sqrt{a^2m^2+b^2}\ /\ m\ ,\ 0\ )$

則 $AB=\sqrt{\dfrac{a^2m^2+b^2}{m^2}+a^2m^2+b^2}$

$=\sqrt{a^2+b^2+a^2m^2+\dfrac{b^2}{m^2}}$ ①

又　$a^2m^2+\dfrac{b^2}{m^2}\geq 2\sqrt{a^2m^2\cdot\dfrac{b^2}{m^2}}$

$=2\ ab$

$\therefore$　$a^2+b^2+a^2m^2+\dfrac{b^2}{m^2}$

$\geq a^2+b^2+2\ ab$ 代入①

$\Rightarrow$　$AB\geq\sqrt{(\ a+b\ )^2}$

$\Rightarrow A\ AB\geq a+b$

$\therefore$　最小距離為　$a+b$

討論　當 $a^2m^2=\dfrac{b^2}{m^2}$ 時，即　$m=\pm\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ 時

等號成立。即

$A(\ \pm\sqrt{(\ a+b\ )\ a}\ ,\ 0\ )$，

$B(\ 0\ ,\ \pm\sqrt{b\ (\ a+b\ )}\ )$ 共4組解

（註）此題亦可由柯西不等式解之。

—本文作者現任教於台南新化高中