富蘭克林方陣

林 克 瀛

在安德魯(Andrews)的名著「魔方陣與立方體」(Magic squares and cubes,一九一七出版,一九六〇由Dover 公司發行廉價的普及本)第三章中介紹一種兩百多年前美國政治家富蘭克林(Franklin)所發現的方陣,具有許多特殊的性質,但並不是魔方陣,因對角線上各數之和與每排上各數之和不同。班森(Benson)和賈可貝(Jacoby)在「魔方陣新探」(New recreations with magic squares)一書也有介紹。筆者現在把這兩本書中有關富蘭克林方陣的資料翻譯出來以供有興趣的讀者參考。

在一七六九年在英國倫敦出版的「富蘭克林與哲學有關的信函和論文集」中列出兩個分別是八和十六階的方陣,現在通稱類似的方陣爲富蘭克林方陣,其中八階方陣如圖一所示,這個方陣具有下列四個特點:

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

圖一

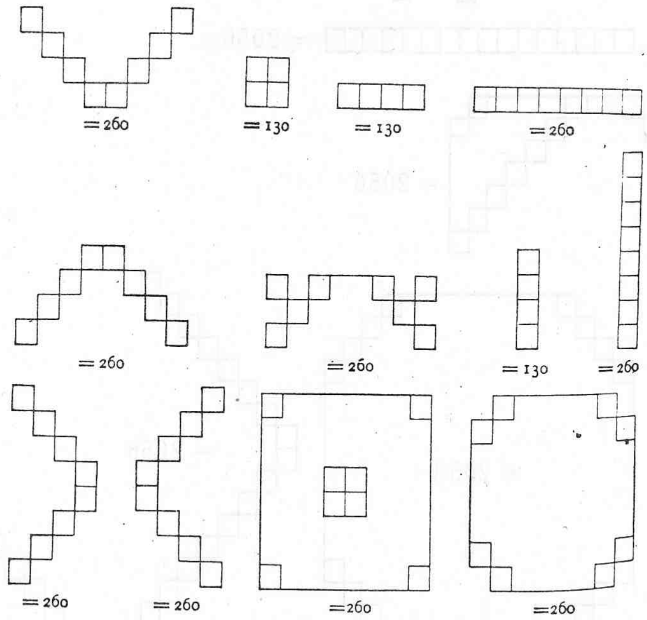
一、沿水平或垂直方向每一排八個數之和爲260,而且每一排又可平分爲兩段,每段四個數之和爲130。

二、如圖一中虛線所示,和對角線平行先由左下向右上方(如圖由16 到10)再轉向由左上朝右下(如圖由23 到17),線上八個數之和爲260。同理和這條虛線平行(向上或下挪移數格,並在想像中把上下兩條邊黏起來)的線上八個數字之和也是260。將圖一任意旋轉九十或一百八十度後(例如順時針轉九十度)仍具有這種性質。

三、圖一中任何一個二階小方陣中四個數之和必爲130。例如圖中以實線圍成的方陣中28 + 37 + 38 + 27 = 130。若將方陣上下及左右黏成來仍有這種性質,例如52 + 61 + 16 + 1 = 130。

四、圖一中方陣內任意作一偶數階的正方形,角上四數之和必爲130,如圖中以圓圈圈出的四個數之和爲61 + 20 + 6 + 43 = 130 。將方陣上下或左右相連亦然。

這些及其他有趣的性質也可以用圖二表示出來。



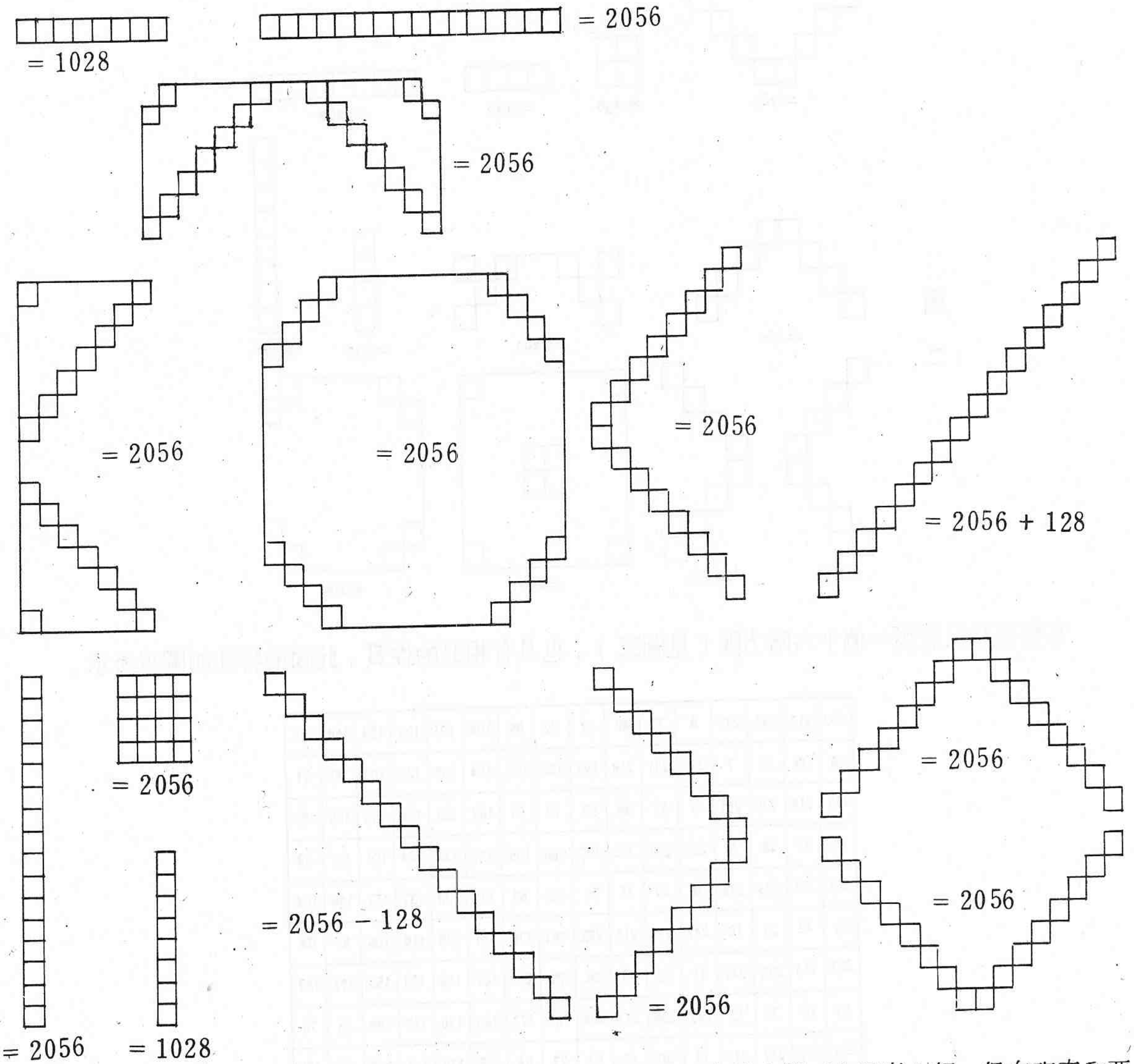
圖二

富蘭克林又發現一個十六階方陣（見圖三），也具有相似的性質，此圖的特性如圖四所示。

200	217	232	249	8	25	40	57	72	89	104	121	136	153	168	185
58	39	26	7	250	231	218	199	186	167	154	135	122	103	90	71
198	219	230	251	6	27	38	59	70	91	102	123	134	155	166	187
60	37	28	5	252	229	220	197	188	165	156	133	124	101	92	69
201	216	233	248	9	24	41	56	73	88	105	120	137	152	169	184
55	42	23	10	247	234	215	202	183	170	151	138	119	106	87	74
203	214	235	246	11	22	43	54	75	86	107	118	139	150	171	182
53	44	21	12	245	236	213	204	181	172	149	140	117	108	85	76
205	212	237	244	13	20	45	52	77	84	109	116	141	148	173	180
51	46	19	14	243	238	211	206	179	174	147	142	115	110	83	78
207	210	239	242	15	18	47	50	79	82	111	114	143	146	175	178
49	48	17	16	241	240	209	208	177	176	145	144	113	112	81	80
196	221	228	253	4	29	36	61	68	93	100	125	132	157	164	189
62	35	30	3	254	227	222	195	190	163	158	131	126	99	94	67
194	223	226	255	2	31	34	63	66	95	98	127	130	159	162	191
64	33	32	1	256	225	224	193	192	161	160	129	128	97	96	65

圖三

圖　四



在安德魯的書中介紹了一種富蘭克林方陣的一般排列法，由於太繁不在這裏介紹，但在班森和賈可貝的書中提到另一種十分巧妙又簡便的新方法介紹如下。

第一步（以八階方陣爲例，餘類推），先把由1到64 依序由左到右一行行寫下，如圖五所示。並把圖中虛線上的數字代以互補之數（指兩數之和爲65 ）。如此所得爲一個八階對稱魔方陣，如圖六所示。

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

圖　五

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

圖　六

第二步，把圖六的右半倒轉，得圖七。即把第5和8以及6和7兩直行互換，可得一新的魔方陣，但不再是對稱方陣。再把圖七的下半倒轉，得圖八，此圖不但是一魔方陣，而且是循環魔方陣。（關於各種魔方陣之定義，請參閱筆者在數播第四卷第五期的魔方陣一文，循環魔方陣又稱爲鬼方陣。）

圖 七

64	2	3	61	57	7	6	60
9	55	54	12	16	50	51	13
17	47	46	20	24	42	43	21
40	26	27	37	33	31	30	36
32	34	35	29	25	39	38	28
41	23	22	44	48	18	19	45
49	15	14	52	56	10	11	53
8	58	59	5	1	63	62	4

圖 八

64	2	3	61	57	7	6	60
9	55	54	12	16	50	51	13
17	47	46	20	24	42	43	21
40	26	27	37	33	31	30	36
8	58	59	5	1	63	62	4
49	15	14	52	56	10	11	53
41	23	22	44	48	18	19	45
32	34	35	29	25	39	38	28

把第二步略加修改後可得一富蘭克林方陣。把圖六各直行依次序 16834752 重排後得圖九，此圖本身不是魔方陣，但把它的橫排同法處理後可得圖十。此圖為一十分巧妙的魔方陣，並滿足下列性質:

64	6	57	3	61	7	60	2
9	51	16	54	12	50	13	55
17	43	24	46	20	42	21	47
40	30	33	27	37	31	36	26
32	38	25	35	29	39	28	34
41	19	48	22	44	18	45	23
49	11	56	14	52	10	53	15
8	62	1	59	5	63	4	58

圖 九

64	6	57	3	61	7	60	2
41	19	48	22	44	18	45	23
8	62	1	59	5	63	4	58
17	43	24	46	20	42	21	47
40	30	33	27	37	31	36	26
49	11	56	14	52	10	53	15
32	38	25	35	29	39	28	34
9	51	16	54	12	50	13	55

圖 十

一、它滿足以上所述的四個富蘭克林方陣之性質。

二、它本身又是循環魔方陣（ pandiagonal magic square ）。

三、如圖十所示圖中四個小的四階方陣都是循環的！

請注意富蘭克林原來設計的方陣並非魔方陣，安德魯一書所載的方法也有同樣的缺點。所以上述的方法可稱為排出了富蘭克林循環魔方陣，超越了古人的成就。

本文作者現任職於清大物理系