關於西巴(Ceva)定理及關聯的定理

許 振 榮

最近Ross Honsberger在TYCMJ第十卷第四册中於“Geometry Via Physics”一文提到很久以前大家就知道的應用「物理的概念」於幾何的證明。又在數學傳播第四卷第四期中亦有何景國先生的「質心之向量的解釋及其在數學上的應用」中也討論相似的問題。我們想提示：用質心的想法不但可方便地利用來證明很多幾何上的問題，亦可用與證明西瓦和孟氏（Menelans）定理同樣的方法來求得這些定理的某種類似定理和推廣定理。在本文我們先討論西巴定理及其類似定理，在第二才討論孟氏定理及其推廣。

爲了這樣的目的，我們先做下面的準備：設有一系各有質量m_1，m_2，……，m_k 的質點分別散在點A_1，A_2，……，A_k處，則這一系質點的質量中心（點）X可以其位置向量$\vec{X}$表示如下：

(1) $$\vec{X}=\frac{m_1\vec{A}_1+m_2\vec{A}_2+\cdots\cdots+m_k\vec{A}_k}{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_k}$$

此處$\vec{A}_i$，$i=1$，……，k爲點A_i之位置向量。

對於$k=2$時，分別有質量m_1，m_2的質點在A_1，A_2則其質量中心爲

(2) $$\vec{X}=\frac{m_1\vec{A}_1+m_2\vec{A}_2}{m_1+m_2}$$

另一方面，此點X爲在線段A_1A_2上把此線段分成爲比$\dfrac{m_2}{m_1}$的內分點，即

(3) $$\frac{A_1X}{XA_2}=\frac{m_2}{m_1}$$

現在，假設居在二點A_1和X，而且分別有質量m_1和m的二質點的質量中心爲A_2，則

(4) $$\vec{A}_2=\frac{m_1\vec{A}_1+m\vec{X}}{m_1+m}$$

若設$m_2=m_1+m$爲在點A_2處的質點之質量，則$m_2>m_1$，而由(4)式可得

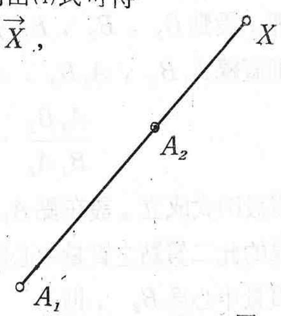
$$m_2\vec{A}_2=m_1\vec{A}_1+(m_2-m_1)\vec{X},$$

故

(5) $$\vec{X}=\frac{m_2\vec{A}_2-m_1\vec{A}_1}{m_2-m_1}$$

此式表式：X爲把線段A_1A_2分成$\dfrac{m_2}{m_1}$之比的外分點，即

(6) $$\frac{A_1X}{XA_2}=-\frac{m_2}{m_1}$$



第一圖

此處異方向的線段以不同符號表之。這樣的點X叫做在A_1A_2方向的延長上。

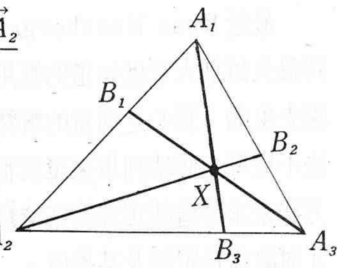
I.西瓦定理

由上述的準備我們先來證明下列的補助定理：

補助定理Ⅰ. 設在一三角形之頂點A_1，A_2，A_3處各有質量m_1，m_2，m_3的質點。又設B_1，B_2，B_3分別爲在邊A_1A_2，A_2A_3，A_3A_1 之二端頂點處的質點之質量中心，則A_1B_2，A_2B_3，A_3B_1交於一點X，其爲在A_1，A_2，A_3處的三質點之質量中心。並且下式成立：

(7)
$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\frac{A_3B_3}{B_3A_1}=1$$

證明 由補助定理的假設可得：



(8)
$$\vec{B}_2=\frac{m_2\vec{A}_2+m_3\vec{A}_3}{m_2+m_3},\ \vec{B}_3=\frac{m_3\vec{A}_3+m_1\vec{A}_1}{m_3+m_1},\ \vec{B}_1=\frac{m_1\vec{A}_1+m_2\vec{A}_2}{m_1+m_2}$$

且

(9)
$$\vec{X}=\frac{m_1\vec{A}_1+m_2\vec{A}_2+m_3\vec{A}_3}{m_1+m_2+m_3}=\frac{m_1\vec{A}_1+(m_2+m_3)\vec{B}_2}{m_1+(m_2+m_3)}$$
$$=\frac{m_2\vec{A}_2+(m_3+m_1)\vec{B}_3}{m_2+(m_3+m_1)}=\frac{m_3\vec{A}_3+(m_1+m_2)\vec{B}_1}{m_3+(m_1+m_2)}$$

此式表示：X爲在A處有質量m_1 的質點和在B_2 處有質量(m_2+m_3)的質點所成的質點系之質量中心。故A_1B_2X 爲共線。同理A_2B_3X 爲共線，且A_3B_1X 亦爲共線。即A_1B_2，A_2B_3，A_3B_1交於一點X，此點爲在A_1，A_2，A_3處的三質點之質量中心。又由(8)式可得

(10)
$$\frac{A_3B_2}{B_2A_2}=\frac{m_2}{m_3},\ \frac{A_1B_3}{B_3A_3}=\frac{m_3}{m_1},\ \frac{A_2B_1}{B_1A_1}=\frac{m_1}{m_2}$$

故

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\frac{A_3B_3}{B_3A_1}=\frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{m_3}{m_2}\cdot\frac{m_1}{m_3}=1$$

注意：很顯然，此補助定理可推廣爲下列命題：

設$A_1A_2A_3A_4$爲一四面體，在其各頂點有質量分別爲m_1，m_2，m_3，m_4 的一質點。又設在A_2，A_3，A_4處的質點的質量中心爲X_1，在A_1，A_3，A_4處的質點的質量中心爲X_2，在A_1，A_2，A_4 處的質點之質量中心爲X_3，在A_1，A_2，A_3處的質點的質量中心爲X_4，則A_1X_1，A_2X_2，A_3X_3，A_4X_4 交於同一點X，X爲在A_1，A_2，A_3，A_4 處的四質點所成的質點系之質量中心。

現在我們可用上述的補助定理Ⅰ來證明下列西瓦定理：

西瓦定理，設點B_1，B_2，B_3分別在三角形$A_1A_2A_3$(即$\triangle A_1A_2A_3$)之邊A_1A_2，A_2A_3，A_3A_1上，則直線A_1B_2，A_2B_3，A_3B_1 交於同--點之充要條件爲下式之成立：

(7)
$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\frac{A_3B_3}{B_3A_1}=1$$

證明：假設(7)式成立。設在點A_1處的質點有質量m_1。選在點A_2 處的質點的質量m_2 使在A_1，A_2 處的此二質點之質量中心爲B_1。其次選在點A_3 處的質點之質量m_3 使在A_1，A_3 處的二質點之質量中心爲B_3，則

(8′)
$$\vec{B}_3=\frac{m_3\vec{A}_3+m_1\vec{A}_1}{m_3+m_1},\ \vec{B}_1=\frac{m_1\vec{A}_1+m_2\vec{A}_2}{m_1+m_2}$$

故可得

(10′)
$$\frac{A_1B_3}{B_3A_3}=\frac{m_3}{m_1},\ \frac{A_2B_1}{B_1A_1}=\frac{m_1}{m_2}$$

代入(10′)之二式於(7)式中，得

(10″) $$\frac{A_2B_2}{B_2A_3}=\frac{m_3}{m_2}$$

即

(8″) $$\vec{B_2}=\frac{m_2\vec{A_2}+m_3\vec{A_3}}{m_2+m_3}$$

故B_2爲在A_2，A_3 處的二質點之質量中心。因之，依補助定理Ⅰ，得知A_1B_2，A_2B_3，A_3B_1爲共點。

反之，假設A_1B_2，A_2B_3，A_3B_1 爲共點。如上選在A_1，A_2，A_3處的三質點之質量m_1，m_2，m_3使B_1 爲在A_1，A_2處的二質點之質量中心，B_3 爲在A_3，A_1處的二質點之質量中心。此時(8′)式成立。設X爲在三點A_1，A_2，A_3處的三質點之質量中心，則如上

(9′) $$\vec{X}=\frac{m_1\vec{A_1}+m_2\vec{A_2}+m_3\vec{A_3}}{m_1+m_2+m_3}=\frac{m_2\vec{A_2}+(m_3+m_1)\vec{B_3}}{m_2+(m_3+m_1)}=\frac{m_3\vec{A_3}+(m_1+m_2)\vec{B_1}}{m_3+(m_1+m_2)}$$

故A_2B_3，A_3B_1 之交點爲X。由(9′)可得

(11) $$\frac{m_2\vec{A_2}+m_3\vec{A_3}}{m_2+m_3}=\frac{(m_1+m_2+m_3)\vec{X}-m_1\vec{A_1}}{(m_1+m_2+m_3)-m_1}$$

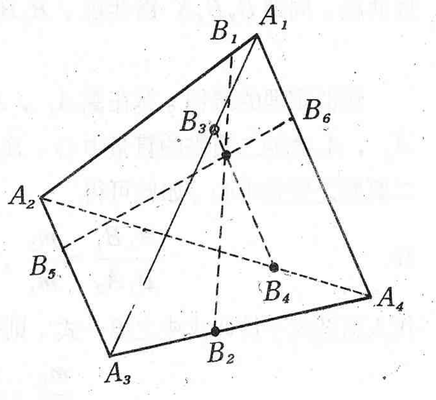
此式表示：其左邊所表示的點爲直線A_2A_3與直線A_1X 之交點，即爲點B_2。即(8″)式成立。故依補助定理Ⅰ，(7)式成立。

Ⅱ.與西瓦定理類似的一定理

從上述補助定理Ⅰ和西巴定理之證明，我們可以推想下列類似命題成立之可能性：

類似定理。設A_1，A_2，A_3，A_4 爲在空間中(即不在同一平面上)的四點(故爲一四面體之頂點)。又設B_1，B_2，B_3，B_4，B_5，B_6 分別爲此四面體的稜A_1A_2，A_3A_4，A_1A_3，A_2A_4，A_2A_3，A_1A_4 上的點。則三直線B_1B_2，B_3B_4，B_5B_6 交於一點之充要條件爲下列三式之成立：

(12) $$\begin{cases}\dfrac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\dfrac{B_2A_5}{B_5A_3}\cdot\dfrac{A_3B_2}{B_2A_4}\cdot\dfrac{A_4B_6}{B_6A_1}=1\\[2ex]\dfrac{A_1B_3}{B_3A_3}\cdot\dfrac{A_3B_5}{B_5A_2}\cdot\dfrac{A_2B_4}{B_4A_4}\cdot\dfrac{A_4B_6}{B_6A_1}=1\\[2ex]\dfrac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\dfrac{A_2B_4}{B_4A_4}\cdot\dfrac{A_4B_2}{B_2A_3}\cdot\dfrac{A_3B_3}{B_3A_1}=1\end{cases}$$



和上面同樣我們先來證明下列補助定理：

補助定理Ⅱ：設在一四面體的頂點A_1，A_2，A_3，A_4 各有質量m_1，m_2，m_3，m_4 的質點。又設B_1 爲在A_1，A_2 處的二質點之質量中心，B_2 爲在A_3，A_4處的二質點之質量中心，B_3 爲在A_1，A_3 處的二質點之質量中心，B_4 爲在A_2，A_4處的二質點之質量中心，B_5 爲在A_2，A_3處的二質點之質量中心，B_6 爲在A_1，A_4處的二質點之質量中心，則B_1B_2，B_3B_4，B_5B_6 爲共點，且(12)之三式成立。

證明　由補助定理Ⅱ的假設可得

(13) $$\begin{cases}\vec{B_1}=\dfrac{m_1\vec{A_1}+m_2\vec{A_2}}{m_1+m_2},\ \vec{B_2}=\dfrac{m_3\vec{A_3}+m_4\vec{A_4}}{m_3+m_4},\ \vec{B_3}=\dfrac{m_1\vec{A_1}+m_3\vec{A_3}}{m_1+m_3}\\[2ex]\vec{B_4}=\dfrac{m_2\vec{A_2}+m_4\vec{A_4}}{m_2+m_4},\ \vec{B_5}=\dfrac{m_2\vec{A_2}+m_3\vec{A_3}}{m_2+m_3},\ \vec{B_6}=\dfrac{m_1\vec{A_1}+m_4\vec{A_4}}{m_1+m_4}\end{cases}$$

由這些諸式又可得

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{A_2B_1}{B_1A_1}=\dfrac{m_1}{m_2}, & \dfrac{A_4B_2}{B_2A_3}=\dfrac{m_3}{m_4}, & \dfrac{A_3B_3}{B_3A_1}=\dfrac{m_1}{m_3}, \\[2ex] \dfrac{A_4B_4}{B_4A_2}=\dfrac{m_2}{m_4}, & \dfrac{A_3A_5}{B_5A_2}=\dfrac{m_2}{m_3}, & \dfrac{A_4B_6}{B_6A_1}=\dfrac{m_1}{m_4} \end{cases}$$

代入這些式子於(12)之三式左邊可得

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_5}{B_5A_3}\cdot\frac{A_3B_2}{B_2A_4}\cdot\frac{A_4B_6}{B_6A_1}=\frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{m_3}{m_2}\cdot\frac{m_4}{m_3}\cdot\frac{m_1}{m_4}=1$$

$$\frac{A_1B_3}{B_3A_3}\cdot\frac{A_3B_5}{B_5A_2}\cdot\frac{A_2B_4}{B_4A_4}\cdot\frac{A_4B_6}{B_6A_1}=\frac{m_3}{m_1}\cdot\frac{m_2}{m_3}\cdot\frac{m_4}{m_2}\cdot\frac{m_1}{m_4}=1$$

$$\frac{A_1B_1}{B_1B_2}\cdot\frac{A_2B_4}{B_4A_4}\cdot\frac{A_4B_2}{B_2A_3}\cdot\frac{A_3B_3}{B_3A_1}=\frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{m_4}{m_2}\cdot\frac{m_3}{m_4}\cdot\frac{m_1}{m_3}=1$$

即(12)之三式成立。其次假設在 A_1，A_2，A_3，A_4 處的四質點之質量中心為 X，則

$$(15)\quad \vec{X}=\frac{m_1\vec{A}_1+m_2\vec{A}_2+m_3\vec{A}_3+m_4\vec{A}_4}{m_1+m_2+m_3+m_4}$$

現在，由(13)之諸式可得

$$\begin{aligned} m_1\vec{A}_1+m_2\vec{A}_2+m_3\vec{A}_3+m_4\vec{A}_4 &= (m_1+m_2)\vec{B}_1+(m_3+m_4)\vec{B}_2 \\ &= (m_1+m_3)\vec{B}_3+(m_2+m_4)\vec{B}_4=(m_2+m_3)\vec{B}_5+(m_1+m_4)\vec{B}_6 \end{aligned}$$

故(15)式的 $\vec{X}$ 亦可表成下列形狀：

$$(16)\quad \vec{X}=\frac{(m_1+m_2)\vec{B}_1+(m_3+m_4)\vec{B}_2}{(m_1+m_2)+(m_3+m_4)}=\frac{(m_1+m_3)\vec{B}_3+(m_2+m_4)\vec{B}_4}{(m_1+m_3)+(m_2+m_4)}$$

$$=\frac{(m_2+m_3)\vec{B}_5+(m_1+m_4)\vec{B}_6}{(m_2+m_3)+(m_1+m_4)}$$

即 X 為在 B_1，B_2 處的分別有質量 (m_1+m_2)，(m_3+m_4) 的二質點之質量中心。故 B_1B_2X 為共線。同理 B_3B_4X 為共線，B_5B_6X 亦為共線。故 B_1B_2，B_3B_4．B_5B_6 相交於點 X。

類似定理的證明。選在點 A_1，A_2，A_3，A_4 處的質點的質量 m_1，m_2，m_3，m_4 使 B_1 為在 A_1，A_2 處的二質點的質量中心，B_5 為在 A_2，A_3 處的二質點之質量中心，B_2 為在 A_3，A_4 處的二質點之質量中心。如此可得

$$(17)\quad \frac{A_1B_1}{B_1A_2}=\frac{m_2}{m_1},\quad \frac{A_2B_5}{B_5A_3}=\frac{m_3}{m_2},\quad \frac{A_3B_2}{B_2A_4}=\frac{m_4}{m_3}$$

代入這些式子於(12)式中之第一式，則得

$$\frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{m_3}{m_2}\cdot\frac{m_4}{m_3}\cdot\frac{A_4B_6}{B_6A_1}=1$$

故得

$$(18)\quad \frac{A_4B_6}{B_6A_1}=\frac{m_1}{m_4}$$

即點 B_6 為在 A_1，A_4 處的二質點之質量中心。代入(18)式和(17)之諸式於(12)之第二和第三兩式可得

$$\frac{A_1B_3}{B_3A_3}\cdot\frac{m_2}{m_3}\cdot\frac{A_2B_4}{B_4A_4}\cdot\frac{m_1}{m_4}=1$$

$$\frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{A_2B_4}{B_4A_4}\cdot\frac{m_3}{m_4}\cdot\frac{A_3B_3}{B_3A_1}=1$$

由此可得

$$(19)\quad \begin{cases} \dfrac{A_1B_3}{B_3A_3}\cdot\dfrac{A_2B_4}{B_4A_4}=\dfrac{m_3m_4}{m_1m_2} \\[2ex] \dfrac{A_2B_4}{B_4A_4}\cdot\dfrac{A_3B_3}{B_3A_1}=\dfrac{m_1m_4}{m_2m_3} \end{cases}$$

把(19)之兩式邊邊相乘可得

$$\left(\frac{A_2B_4}{B_4A_4}\right)^2=\left(\frac{m_4}{m_2}\right)^2$$

故

$$(20)\quad \frac{A_2B_4}{B_4A_4}=\frac{m_4}{m_2}$$

從(19)之第一式和(20)式可得

$$(21)\quad \frac{A_1B_3}{B_3A_3}=\frac{m_3}{m_1}$$

即B_4 爲在A_2 ，A_4處的二質點之質量中心，B_3 爲在A_1 ，A_3處的二質點之質量中心。故依補助定理Ⅱ得知B_1B_2 ，B_3B_4 ，B_5B_6 爲共點。

反之，假設B_1B_2 ，B_3B_4 ，B_5B_6 交於一點X。我們想證明(12)之三式成立。先注意：B_6 在B_5X 上，故B_6 爲平面$B_5B_1B_2$與直線A_1A_4 之交點。B_3 在B_4X 上，而B_4 在A_2A_4 上，故B_3 爲平面XA_2A_4 與直線A_1A_3 之交點。同理，B_4 爲平面XA_1A_3與直線A_2A_4 之交點。現在和上面一樣地先適當地選在點A_1 ，A_2 ，A_3 ，A_4 處的質點之質量m_1 ，m_2 ，m_3 ，m_4 使B_1 爲在A_1A_2 處的二質點之質量中心，B_5 爲在點A_2 ，A_3處的二質點之質量中心，B_2 爲在A_3 ，A_4處的二質點之質量中心。又設X' 爲在點A_1 ，A_2 ，A_3 ，A_4 處的四質點之質量中心。則

$$(22)\quad \vec{B}_1=\frac{m_1\vec{A}_1+m_2\vec{A}_2}{m_1+m_2},\ \vec{B}_2=\frac{m_3\vec{A}_3+m_4\vec{A}_4}{m_3+m_4},\ \vec{B}_5=\frac{m_2\vec{A}_2+m_3\vec{A}_3}{m_2+m_3}$$

$$(23)\quad \vec{X}'=\frac{m_1\vec{A}_1+m_2\vec{A}_2+m_3\vec{A}_3+m_4\vec{A}_4}{m_1+m_2+m_3+m_4}=\frac{(m_1+m_2)\vec{B}_1+(m_3+m_4)\vec{B}_2}{(m_1+m_2)+(m_3+m_4)}$$

(23)表示點X' 亦在直線B_1B_2 上。現在從(22)和(23)可得

$$(24)\quad \frac{m_1\vec{A}_1+m_4\vec{A}_4}{m_1+m_4}=\frac{(m_1+m_2+m_3+m_4)\vec{X}'-(m_2+m_3)\vec{B}_5}{(m_1+m_2+m_3+m_4)-(m_2+m_3)}.$$

故(24)之左邊所表的點在直線B_5X' 上（故在平面$B_5B_1B_2$上），亦在直線A_1A_4 上，故此點爲平面$B_5B_1B_2$和直線A_1A_4 之交點，故爲點B_6 。因之

$$(25)\quad \vec{B}_6=\frac{m_1\vec{A}_1+m_4\vec{A}_4}{m_1+m_4}$$

故X' 亦爲B_1B_2 和B_5B_6 之交點，即$X=X'$ 。設B_3'爲在A_1 ，A_3處的二質點之質量中心，B_4'爲在A_2 ，A_4處的二質點之質量中心。則

$$(26)\quad \vec{B}_3{}'=\frac{m_1\vec{A}_1+m_3\vec{A}_3}{m_1+m_3},\ \vec{B}_4{}'=\frac{m_2\vec{A}_2+m_4\vec{A}_4}{m_2+m_4}$$

故點$X=X'$ 亦可表成下列形狀：

$$(27)\quad \vec{X}=\frac{(m_1+m_3)\vec{B}_3{}'+(m_2+m_4)\vec{B}_4{}'}{(m_1+m_3)+(m_2+m_4)}$$

故 $B_3'XB_4'$ 爲共線。即 B_3' 爲平面 XA_2A_4 與直線 A_1A_3 之交點，B_4' 爲平面 XA_1A_3 與直線 A_2A_4 之交點。因之，$B_3=B_3'$，$B_4=B_4'$。故依補助定理Ⅱ，⑿之三式成立。

Ⅲ.擴張的西瓦定理

如果如在開頭所說的在一直線上異方向的線段之長度以不同的符號表之，則在西瓦定理中，我們亦可考慮幾個 B 點在三角形 $A_1A_2A_3$ 之邊之延長上的情形，而可得下列的定理：

擴張的西瓦定理。設點 B_1，B_2，B_3 分別在△$A_1A_2A_3$之邊 A_1A_2，A_2A_3，A_3A_1 上或在其延長上，則 A_1B_2，A_2B_3，A_3B_1 爲共點或爲平行之充要條件爲下式之成立：

(7) $$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\frac{A_3B_3}{B_3A_1}=1$$

注意：把西瓦定理陳述爲這樣形狀是相當有意思的。因爲，很多在平面幾何中已知的定理亦可視爲這樣陳述的擴張的西瓦定理之特殊情形。例如，傍心定理亦可視爲擴張的西瓦定理之一特殊例。

要證明擴張的西瓦定理，我們需要下列補助定理：

補助定理Ⅲ. 設三角形 $A_1A_2A_3$ 之邊 A_1A_2，A_2A_3，A_3A_1 上或其延長上分別有一點 B_1，B_2，B_3 存在滿足條件：

⑴ B_1，B_2，B_3 三點均在邊上（即爲內分點），或有一點在邊上（即爲內分點），其外二點在邊之延長上（即爲外分點）。

⑵在點 A_1，A_2，A_3 及 B_1，B_2，B_3 均有一質點存在滿足下列的性質：即若點 B_k 在邊 A_iA_j 上，則 B_k 爲在 A_i，A_j處的二質點之質量中心。若 B_k 爲在邊 A_iA_j 方向之延長上，則 A_j 爲在 A_i 處和在 B_k 處的二質點之質量中心。

在上列二條件⑴，⑵之下，A_1B_2，A_2B_3，A_3B_1 爲共點或爲平行，並且下式成立：

(7) $$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\frac{A_3B_3}{B_3A_1}=1$$

證明 B_1，B_2，B_3 三點均爲內外點時，已在上面證明過，所以，我們只要討論有二個外分點和一個內分點之情形。此時不妨假設 B_1 和 B_3 爲外分點。依條件⑵，設在點 A_1，A_2，A_3 處的質點之質量分別爲 m_1，m_2，m_3。現在 B_1 和 B_3 在邊 A_1A_2，A_3A_1 之延長上之情形有下列各種：

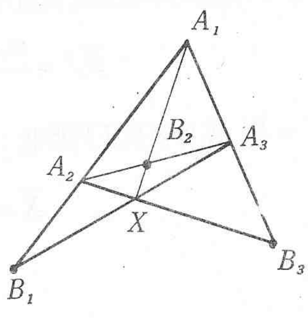
(i) B_1 在 A_1A_2 方向之延長上（$m_1<m_2$），B_3 在 A_1A_3 方向之延長上（$m_1<m_3$）。

(ii) B_1 在 A_1A_2 方向之延長上（$m_1<m_2$），B_3 在 A_3A_1 方向之延長上（$m_3<m_1$）。

(iii) B_1 在 A_2A_1 方向之延長上（$m_2<m_1$），B_3 在 A_1A_3 方向之延長上（$m_1<m_3$）。

(iv) B_1 在 A_2A_1 方向之延長上（$m_2<m_1$），B_3 在 A_3A_1 方向之延長上（$m_3<m_1$）。

(i) （$m_1<m_2$，$m_1<m_3$），現在，依條件⑵之假定下，在(i)之情形可得下列各點之位置向量：



(28) $$\vec{B}_1=\frac{m_2\vec{A}_2-m_1\vec{A}_1}{m_2-m_1},\quad \vec{B}_3=\frac{m_3\vec{A}_3-m_1\vec{A}_1}{m_3-m_1}$$

(29) $$\vec{B}_2=\frac{m_2\vec{A}_2+m_3\vec{A}_3}{m_2+m_3}$$

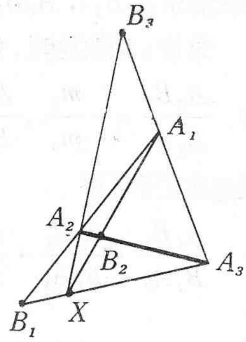
此時考慮下列位置向量所表示的點 X：

(30) $$\vec{X}=\frac{m_2\vec{A}_2+m_3\vec{A}_3-m_1\vec{A}_1}{m_2+m_3-m_1}=\frac{(m_2+m_3)\vec{B}_2-m_1\vec{A}_1}{(m_2+m_3)-m_1}$$

$$=\frac{(m_2-m_1)\vec{B}_1+m_3\vec{A}_3}{(m_2-m_1)+m_3}=\frac{(m_3-m_1)\vec{B}_3+m_2\vec{A}_2}{(m_3-m_1)+m_2}$$

(30)式表示：A_1B_2，A_2B_3，A_3B_1 交於點 X。

(ii)（$m_1<m_2$，$m_3>m_1$）依條件(2)之假定，在(ii)之情形下，可得下列各點之位置向量：



(31) $$\vec{B}_1=\frac{m_2\vec{A}_2-m_1\vec{A}_1}{m_2-m_1},\quad \vec{B}_3=\frac{m_1\vec{A}_1-m_3\vec{A}_3}{m_1-m_3}$$

和(29)式。此時考慮下列位置向量所表示的點 X：

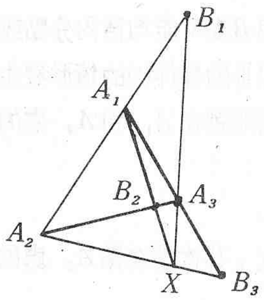
(32) $$\vec{X}=\frac{m_2\vec{A}_2+m_3\vec{A}_3-m_1\vec{A}_1}{m_2+m_3-m_1}=\frac{(m_2+m_3)\vec{B}_2-m_1\vec{A}_1}{(m_2+m_3)-m_1}$$
$$=\frac{m_2\vec{A}_2-(m_1-m_3)\vec{B}_3}{m_2-(m_1-m_3)}=\frac{m_3\vec{A}_3+(m_2-m_1)\vec{B}_1}{m_3+(m_2-m_1)}$$

(32)式表示：A_1B_2，A_2B_3，A_3B_1 相交於點 X。

(iii)（$m_2<m_1$，$m_1<m_3$）。依條件(2)之假定在(iii)之情形之下可得下列各點之位置向量：

(33) $$\vec{B}_1=\frac{m_1\vec{A}_1-m_2\vec{A}_2}{m_1-m_2},\quad \vec{B}_3=\frac{m_3\vec{A}_3-m_1\vec{A}_1}{m_3-m_1}$$

及(29)式。此時考慮下列位置向量所表示的點 X：



(34) $$\vec{X}=\frac{m_2\vec{A}_2+m_3\vec{A}_3-m_1\vec{A}_1}{m_2+m_3-m_1}=\frac{(m_2+m_3)\vec{B}_2-m_1\vec{A}_1}{(m_2+m_3)-m_1}$$
$$=\frac{m_2\vec{A}_2+(m_3-m_1)\vec{B}_3}{m_2+(m_3-m_1)}=\frac{m_3\vec{A}_3-(m_1-m_2)\vec{B}_1}{m_3-(m_1-m_2)}$$

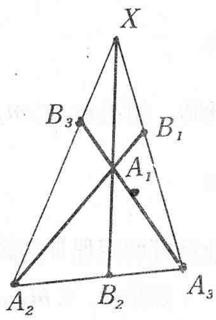
(34)式亦表示 A_2B_3，A_3B_1，A_1B_2 相交於一點 X。

(iv)（$m_2<m_1$，$m_3<m_1$）。依條件(2)之假定，在(iv)之情形下可得下列各點之位置向量：

(35) $$\vec{B}_1=\frac{m_1\vec{A}_1-m_2\vec{A}_2}{m_1-m_2},\quad \vec{B}_3=\frac{m_1\vec{A}_1-m_3\vec{A}_3}{m_1-m_3}$$

和(29)式。現在我們可分成下列三種情形討論：

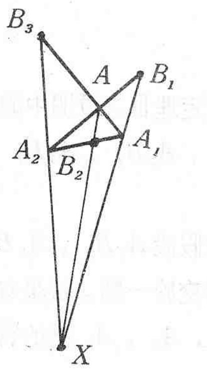
(iva) $m_2+m_3<m_1$ 之情形。此時可考慮下列位置向量所表示的點 X：



(36) $$\vec{X}=\frac{m_1\vec{A}_1-m_2\vec{A}_2-m_3\vec{A}_3}{m_1-m_2-m_3}=\frac{m_1\vec{A}_1-(m_2+m_3)\vec{B}_2}{m_1-(m_2+m_3)}$$
$$=\frac{(m_1-m_3)\vec{B}_3-m_2\vec{A}_2}{(m_1-m_3)-m_2}=\frac{(m_1-m_2)\vec{B}_1-m_3\vec{A}_3}{(m_1-m_2)-m_3}$$

(36)式表示 A_1B_2，A_2B_3，A_3B_1 相交於點 X。

(ivb) $m_1<m_2+m_3$之情形。此時考慮下列位置向量所表示的點 X：



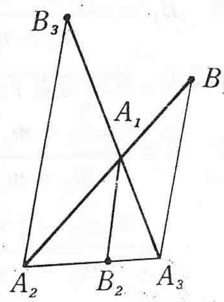
(37) $$\vec{X}=\frac{m_2\vec{A}_2+m_3\vec{A}_3-m_1\vec{A}_1}{m_2+m_3-m_1}=\frac{(m_2+m_3)\vec{B}_2-m_1\vec{A}_1}{(m_2+m_3)-m_1}$$
$$=\frac{m_2\vec{A}_2-(m_1-m_3)\vec{B}_3}{m_2-(m_1-m_3)}=\frac{m_3\vec{A}_3-(m_1-m_2)\vec{B}_1}{m_3-(m_1-m_2)}$$

(37)亦表示 A_1B_2，A_2B_3，A_3B_1 相交於點 X。

(ivc) $m_1=m_2+m_3$ 之情形。此時 $m_2=m_1-m_3$，
$m_3=m_1-m_2$。故

(38) $$\begin{cases} \vec{B}_1-\vec{A}_3=\dfrac{m_1\vec{A}_1-m_2\vec{A}_2-m_3\vec{A}_3}{m_3}=\dfrac{m_1\vec{A}_1-(m_2+m_3)\vec{B}_2}{m_3}=\dfrac{m_1}{m_3}(\vec{A}_1-\vec{B}_2) \\ \vec{B}_3-\vec{A}_2=\dfrac{m_1\vec{A}_1-m_3\vec{A}_3-m_2\vec{A}_2}{m_2}=\dfrac{m_1\vec{A}_1-(m_2+m_3)\vec{B}_2}{m_2}=\dfrac{m_1}{m_2}(\vec{A}_1-\vec{B}_2) \end{cases}$$

(38)式表示A_3B_1，A_2B_3，A_1B_2 爲互相平行。



最後，顯然從(28)，(29)，(31)，(33)，(35)各式均可得下列結果：

(39) $$\frac{A_2B_1}{B_1A_1}=-\frac{m_1}{m_2}, \quad \frac{A_3B_2}{B_2A_2}=\frac{m_2}{m_3}, \quad \frac{A_3B_3}{B_3A_1}=-\frac{m_1}{m_3}$$

從這些式子可得

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\frac{A_3B_3}{B_3A_1}=\left(-\frac{m_2}{m_1}\right)\left(\frac{m_3}{m_2}\right)\left(-\frac{m_1}{m_3}\right)=1$$

擴張的西瓦定理之證明。我們先假設(7)式成立來證明A_1B_2，A_2B_3，A_3B_1 三直線爲共點或爲平行。因爲(7)式之左邊僅有下列可能性：三個因子均爲正，或其中有一個因子爲正其外二個爲負。故三個B點可能均爲內分點或有一點爲內分點其外二個爲外分點的。而沒有其他可能性。僅有滿足補助定理Ⅲ的條件(1)的情形發生。我們不妨假設B_2 爲內分點。先假設B_1 在A_2A_1 方向之延長上。此時適當地選在A_1 和A_2 處的質點之質量m_1，m_2（$m_1>m_2$）使

(40) $$\vec{B}_1=\frac{m_1\vec{A}_1-m_2\vec{A}_2}{m_1-m_2}, \text{故} \quad \frac{A_2B_1}{B_1A_1}=-\frac{m_1}{m_2}$$

成立，其次選在點A_3 處的質點之質量m_3 使

(41) $$\vec{B}_2=\frac{m_2\vec{A}_2+m_3\vec{A}_3}{m_2+m_3}, \text{故} \quad \frac{A_3B_2}{B_2A_2}=\frac{m_2}{m_3}$$

成立。代入(40)和(41)的第二式於(7)式中可得

$$1=\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\frac{A_3B_3}{B_3A_1}=\left(-\frac{m_2}{m_1}\right)\left(\frac{m_3}{m_2}\right)\frac{A_3B_3}{B_3A_1}$$

故得

(42) $$\frac{A_3B_3}{B_3A_1}=-\frac{m_1}{m_3}$$

此時，如果$m_3<m_1$，則B_3 在A_3A_1 方向之延長上，而

(43) $$\vec{B}_3=\frac{m_1\vec{A}_1-m_3\vec{A}_3}{m_1-m_3}$$

此爲補助定理Ⅲ之證明中的情形（iv）。

如果$m_1<m_3$，則B_3 在A_1A_3 方向之延長上，而

(44) $$\vec{B}_3=\frac{m_3\vec{A}_3-m_1\vec{A}_1}{m_3-m_1}$$

此爲補助定理Ⅲ之證明中的情形(iii)。因爲對於這二種情形補助定理Ⅲ的條件(2)成立，故依補助定理Ⅲ，A_1B_2，A_2B_3，A_3B_1 交於同一點或爲平行。B_1 在A_1A_2 方向之延長上時可以同樣地證明之。

其次假設A_1B_2，A_2B_3，A_3B_1 爲共點或爲平行，來證明(7)式成立。先假設A_1B_2，A_2B_3，A_3B_1 相交於一點。如果有二個內分點，則不妨假設這二個內分點的B點爲B_1 和B_3 。此時適當地選在A_1，A_2，A_3 處的質點之質量m_1，m_2，m_3 使B_1，B_3分別可表成下列形狀：

(45)
$$\vec{B}_1=\frac{m_1\vec{A}_1+m_2\vec{A}_2}{m_1+m_2},\quad \vec{B}_3=\frac{m_1\vec{A}_1+m_3\vec{A}_3}{m_1+m_3}$$

此時考慮下列位置向量所表的點X：

(46)
$$\vec{X}=\frac{m_1\vec{A}_1+m_2\vec{A}_2+m_3\vec{A}_3}{m_1+m_2+m_3}=\frac{m_3\vec{A}_3+(m_1+m_2)\vec{B}_1}{m_3+(m_1+m_2)}=\frac{m_2\vec{A}_2+(m_1+m_3)\vec{B}_3}{m_2+(m_1+m_3)}$$

(46)表示：X為A_2B_3和A_3B_1之交點。故A_1B_2亦經過此點。
如果

(47)
$$\vec{B}_2{}'=\frac{m_2\vec{A}_2+m_3\vec{A}_3}{m_2+m_3}$$

則$\vec{X}$亦可表成下列形狀：

(48)
$$\vec{X}=\frac{m_1\vec{A}_1+m_2\vec{A}_2+m_3\vec{A}_3}{m_1+m_2+m_3}=\frac{m_1\vec{A}_1+(m_2+m_3)\vec{B}_2{}'}{m_1+(m_2+m_3)}$$

此式表示A_1，X，$B_2{}'$三點為共線。即$B_2{}'$為A_1X與直線A_2A_3之交點。B_2亦為A_1X與A_2A_3之交點，故$B_2{}'=B_2$。如此得知：若A_1B_2，A_2B_3，A_3B_1為共點，又有二個B點為內分點，則第三個B點亦為內分點。因之，有二個內分點的B點和一個外分點的B點的情形不能發生。

現在來討論有二個B點為外分點並且A_1B_2，A_2B_3，A_3B_1為共點的情形。不妨假設二個外分點的B點為B_1和B_3。B_1和B_3在邊A_1A_2，A_3A_1之延長上之情形有在補助定理Ⅲ之證明中講出來的幾種。現在把這幾種依次來討論：

(i) 在(i)的情形下，適當地選在A_1，A_2，A_3處的質點之質量m_1，m_2，m_3使B_1，B_3分別可表成(28)式之形狀。此時得知(30)式所表的X為A_3B_1和A_2B_3之交點。並且和上面一樣可證明B_2可表成(29)式之形狀。

(ii) 在(ii)的情形下，B_1，B_3可表成(31)的形狀。此時亦得知(32)式所表的X為A_3B_1和A_2B_3之交點。故如上可證明B_2可表成(29)式之形狀。

(iii) 在(iii)的情形下，B_1，B_3可表成(33)的形狀。此時亦得知(34)式所表的X為A_3B_1和A_2B_3之交點。故如上可證明B_2可表成(29)式之形狀。

(iv) 在(iv)的情形下，B_1，B_3可表成(35)式的形狀。此時如果有(iva)之情形，則(36)式所表的點X為A_3B_1和A_2B_3之交點。且如上可證明B_2可表成(29)式之形狀。

如果有(ivb)之情形，則(37)式所表的點X為A_3B_1和A_2B_3之交點。且如上可證明B_2可表成(29)式之形狀。

最後(ivc)之情形不能發生。因為如果有(ivc)之情形，則A_3B_1和A_2B_3為平行與A_3B_1，A_2B_3，A_1B_2為共點之假設不合之故。

其次假設A_1B_2，A_2B_3，A_3B_1為平行，並且B_1和B_3為二個外分點。在這樣假設之下上述諸情形(i)，(ii)，(iii)，(iva)，(ivb)的諸情形不能發生。因為在這些情形下，A_1B_2　A_2B_3，A_3B_1為共點之故。此時只有(ivc)之情形。B_1，B_3可表成(35)式之形狀。並且下列成立：

(38′)
$$\vec{B}_1-\vec{A}_3=\frac{m_1}{m_3}(\vec{A}_1-\vec{B}_2{}'),\quad \vec{B}_3-\vec{A}_2=\frac{m_1}{m_2}(\vec{A}_1-\vec{B}_2{}')$$

此處$\vec{B}_2{}'$的定義如下：

(47)
$$\vec{B}_2{}'=\frac{m_2\vec{A}_2+m_3\vec{A}_3}{m_2+m_3}$$

故A_3B_1，A_2B_3和$A_1B_2{}'$亦為平行。B_2和$B_2{}'$均在直線A_2A_3上，故$B_2=B_2{}'$。因之B_2可表成

(29)式之形狀。

如上我們證明了若A_1B_2，A_2B_3，A_3B_1 爲共點或爲平行，又有二個B點爲外分點，則第三個B點必爲內分點。因之三個B點均爲外分點的情形不能發生。即是所有可能的情形均滿足補助定理Ⅲ之條件(1)。於上面我們又同時證明了補助定理Ⅲ的條件(2)亦成立。故依補助定理Ⅲ得知(7)式成立。

現在，大家會發生下列疑問：如果我們也在類似定理中容許幾個B點爲外分點，則類似定理應當要如何擴張並證明。對於此問題已有結果了。但是，因爲本文已經太長了，所以我不想在本文討論，希望有興趣的讀者能自己發見結果和證明，說不定，有機會我們以後會去討論它。

本文作者爲本所研究員