論　述　類

簡易線性代數(六)

—對稱線性變換—

賴　漢　卿

在上一章我們對於一線性變換的矩陣，曾用固有向量爲基底，將矩陣對角線化，則變換的坐標表示可簡單的表示出來，事實上對於一線性變換，要找到固有向量做爲基底並不是恒爲可能。故一般矩陣之對角線化不一定做得到，最好可做到如定理5・4（Jordan）那樣的類似對角線型而已。因此在應用上常局限於一些特殊的線性變換，也就是將討論的對稱線性變換，這種變換持有以固有向量做爲基底向量。而關於此基底，變換的矩陣表示就可以對角線化了。

§6・1　對稱線性變換的意義與其矩陣表示

在向量空間 R^n 之向量可定義其內積，如 $\boldsymbol{a}$ 與 $\boldsymbol{b}$ 兩向量的內積寫作 $<\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}>$ 時，線性變換 $A: \boldsymbol{x} \to A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \to A\boldsymbol{y}$ 如果滿足

（6－1）
$$<\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}> = <\boldsymbol{y}, A\boldsymbol{x}> = <A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}>$$

，則稱 A 爲 對稱線性變換。

在研究對稱線性變換時，都取正規直交系爲基底。如 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots\cdots, \boldsymbol{e}_n$ 爲正規直交系，即表示其中任意兩向量都正交（即 $<\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j> = 0$ 若 $i \neq j$），且各向量 $\boldsymbol{e}_i$ 都是單位向量，換句話說，$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots\cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 爲正規直交系的充要條件是

（6－2）
$$\begin{cases} <\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j> = 0, & (i \neq j) \\ <\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i> = 1, & (i = 1, 2, \cdots\cdots, n) \end{cases}$$

此時對稱線性變換的矩陣元素爲　$a_{ij} = a_{ji}$

這個結果很容易證明；如 $A = (a_{ij})$ 作用於各基底向量，則

（6－3）
$$\begin{cases} A\boldsymbol{e}_1 = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 + \cdots\cdots + a_{n1}\boldsymbol{e}_n \\ A\boldsymbol{e}_2 = a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + \cdots\cdots + a_{n2}\boldsymbol{e}_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A\boldsymbol{e}_n = a_{1n}\boldsymbol{e}_1 + a_{2n}\boldsymbol{e}_2 + \cdots\cdots + a_{nn}\boldsymbol{e}_n \end{cases}$$

利用（6－2），

$$<\boldsymbol{e}_i, A\boldsymbol{e}_j> = a_{ij}, \quad <\boldsymbol{e}_j, A\boldsymbol{e}_i> = a_{ji}$$

A 若爲對稱，即

$$<\boldsymbol{e}_i, A\boldsymbol{e}_j> = <\boldsymbol{e}_j> = <\boldsymbol{e}_j, A\boldsymbol{e}_i>$$

故得　$a_{ij} = a_{ji}$，$(i, j = 1, 2, \cdots\cdots, n)$，因此任何對稱變換的矩陣表示爲

（6－4）
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

即以對角線對折相應的各元素分別相等。

§6・2 對稱線性變換的性質

這裏的目的是證明下面的定理。

定理6・1 在n維線性空間上的對稱線性變換，必有一組n個互相垂直的固有向量。

這個定理我們只在一般平面及空間來說明。

1. 在平面上；$\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$，爲對稱線性變換，關於基底向量$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$的矩陣表示爲

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

A的固有方程式 $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0$

則 $\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)=0$

其解λ_1或λ_2爲 $=\dfrac{a_{11}+a_{22}\pm\sqrt{(a_{11}+a_{22})^2-4(a_{11}a_{22}-a_{12})^2}}{2}$

此判別式

(1) $(a_{11}+a_{22})^2-4(a_{11}a_{22}-a_{12})^2=(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2\geq 0$

故 λ_1，λ_2都是實數。這就示明：

對稱變換的固有值爲實數。

又如§5－3，對於各固有值λ（$\lambda=\lambda_1$或λ_2），都存在一固有向量$\boldsymbol{a}=(\ell, m)$相對應，此向量$\boldsymbol{a}$的坐標（ℓ，m）滿足聯立方程式

(2) $\begin{cases}(a_{11}-\lambda)\ell+a_{12}m=0 \\ a_{12}\ell+(a_{22}-\lambda)m=0\end{cases}$

若$\boldsymbol{a}$正規化（即設爲單位向量），則（ℓ，m）是滿足條件$\ell^2+m^2=1$，換句話說$\lambda=\lambda_1$對應於正規化的一固有向量（ℓ_1，m_1）。同樣的$\lambda=\lambda_2$對應於正規化的一固有向量爲$\boldsymbol{a}=(\ell_2, m_2)$，我們要示明$\boldsymbol{a}_1$與$\boldsymbol{a}_2$互爲垂直，即$<\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2>=0$。要證明此結果應依原固有方程式之根爲相異或相等來說明：

(I) 若 $\lambda_1\neq\lambda_2$，則 $A\boldsymbol{a}_1=\lambda_1\boldsymbol{a}_1$，$A\boldsymbol{a}_2=\lambda_2\boldsymbol{a}_2$

而 $<\boldsymbol{a}_1, A\boldsymbol{a}_2>=<\boldsymbol{a}_1, \lambda_2\boldsymbol{a}_2>=\lambda_2<\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2>$

$<\boldsymbol{a}_2, A\boldsymbol{a}_1>=<\boldsymbol{a}_2, \lambda_1\boldsymbol{a}_1>=\lambda_1<\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1>$

由A的對稱定義：$<\boldsymbol{a}_1, A\boldsymbol{a}_2>=<\boldsymbol{a}_2, A\boldsymbol{a}_1>$

得 $\lambda_2<\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2>=\lambda_1<\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1>$

因$\lambda_1\neq\lambda_2$，上式能成立的也就只有$<\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2>=0$，故$\boldsymbol{a}_1\perp\boldsymbol{a}_2$。

(II) 若$\lambda_1=\lambda_2=\lambda$，則判別式(1)爲0，所以 $a_{11}-a_{22}=0$，$a_{12}=0$

但此時$\lambda=(a_{11}+a_{22})/2$，所以 $a_{11}=a_{22}=\lambda$，於是變換的坐標表示爲：

$$y_1=\lambda x_1\ ;\ y_2=\lambda x_2$$

即變換爲以原點爲中心，依相似比λ作相似擴大，但若$Ax=y$以相似比λ作相似擴大，則所有向量都是固有值λ的固有向量，因此只要不是0之互相垂直之兩向量$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$也是其固有向量。故這時候的互相垂直之固有向量可求得。

根據上面的說明，平面上之對稱線性變換就有互相垂直之固有向量$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，以此爲基底，則變換的方陣爲

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

此處λ_1，λ_2爲對應於向量$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$的固有值。這個結論告訴我們平面上之對稱線性變換是關於互相垂直之兩直線的兩個伸縮變換之積。

關於平面上之對稱線性變換$\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$，欲求互相垂直之固有向量爲正規直交基底，其步驟可以如下進行：

① 先有A關於正規直交基底$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$的矩陣表示，而求其固有值$\lambda=\lambda_1$，$\lambda=\lambda_2$（λ_1，λ_2必定是實數），此時分

(a) $\lambda_1 \neq \lambda_2$時，代入(2)解正規化之解得

$\boldsymbol{a}_1=(\ell_1, m_1)$，$\boldsymbol{a}_2=(\ell_2, m_2)$（唯一解）

令 $\boldsymbol{e}_1'=\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{e}_2'=\boldsymbol{a}_2$ （此兩向量一定互相垂直）

(b) $\lambda_1=\lambda_2$時，只要取長度1且互相垂直之兩向量爲$\boldsymbol{e}_1'$，$\boldsymbol{e}_2'$即可。

② 以$\boldsymbol{e}_1'$，$\boldsymbol{e}_2''$爲新正規直交基底，則得出一個坐標變換的矩陣表示

$L^t=\begin{pmatrix}\ell_1 & \ell_2\\ m_1 & m_2\end{pmatrix}$，這是直交方陣，即 $L^tL=I$（或$L^t=L^{-1}$的矩陣）。

請參照下例：

例1　設$\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$爲線性變換，且關於正規直交基底$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$的坐標表示爲

$$y_1=6x_1+2x_2$$
$$y_2=2x_1+3x_2$$

試求適當的正規直交基底使此變換的矩陣表示成爲對角線型。

解　所給的變換矩陣爲 $A=\begin{pmatrix}6 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

其固有方程式爲 $\begin{vmatrix}6-\lambda & 2\\ 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0$，即 $\lambda^2-9\lambda+14=0$

解得兩根 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=7$，因之所對應聯立方程式爲

$$\begin{cases}(6-\lambda)\ell+2m=0\\ 2\ell+(3-\lambda)m=0\end{cases}$$

於$\lambda=\lambda_1=2$時爲 $\begin{cases}4\ell+2m=0\\ 2\ell+m=0\end{cases}$

其一解爲 $\ell=1$，$m=-2$，將此解正規化（即$\ell/\sqrt{\ell^2+m^2}$，$m/\sqrt{\ell^2+m^2}$

得單位固有向量爲 $\boldsymbol{e}_1'=\left(\frac{1}{\sqrt5}, \frac{-2}{\sqrt5}\right)$。

同樣的$\lambda=\lambda_2=7$時，求得之單位固有向量爲

$$\boldsymbol{e}_2'=\left(\frac{2}{\sqrt5}, \frac{1}{\sqrt5}\right)$$

以$\boldsymbol{e}_1'$，$\boldsymbol{e}_2'$爲新基底，其坐標變換之矩陣爲

$$L=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}, & \frac{2}{\sqrt5}\\ -\frac{2}{\sqrt5}, & \frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}$$

所以

$$L^t=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}, & \frac{2}{\sqrt5}\\ -\frac{2}{\sqrt5}, & \frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix} \quad (=L^{-1})$$

於是 $x = L^t x' : x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} x_1' + \frac{2}{\sqrt{5}} x_2', \ x_2 = -\frac{2}{\sqrt{5}} x_1' + \frac{1}{\sqrt{5}} x_2'$

$$x' = (L^t)^{-1} x : x_1' = \frac{1}{\sqrt{5}} x_1 - \frac{2}{\sqrt{5}} x_2, \ x_2' = \frac{2}{\sqrt{5}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} x_2$$

因此以 e_1'，e_2' 爲基底所給之線性變換之矩陣表示爲

$$\widetilde{A} = (L^t)^{-1} A L^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

故所求變換的坐標表示爲 $\begin{cases} y_1' = 2\ x_1' + 0 \\ y_2' = 0 + 7\ x_1' \end{cases}$

注意：如果無需求 e_1'，e_2'，而只求 $\widetilde{A}$ 的話，則直接算出原矩陣 A 的固有值 $\lambda_1 = 2$，$\lambda_2 = 7$，使得 $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$。

2. 在通常空間（3維空間）之對稱變換矩陣的對角線化。設 $y = Ax$ 爲空間的對稱線性變換，我們欲示明 Ax 具有兩兩互爲垂直之3個固有向量。

設 e_1，e_2，e_3 爲原正規直交基底，關於此基底之變換爲對稱矩陣 A，如同在平面上一樣：

對稱變換的固有值都是實數

事實上在一般線性空間 V 上所定義的內積（$V \times V \to C$）爲複數，而線性變換 A 稱爲對稱的意思是 $A = A^t$（轉置）此時條件（6－1） $\langle x, Ay \rangle = \langle Ax, y \rangle$

於 $Ax = \lambda x$，$Ay = \lambda y$ 代入上式則因 $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ 所以

$\langle x, \lambda y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle \Rightarrow \bar{\lambda} \langle x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

$\bar{\lambda}$ 表示 λ 的共軛複數，故只要 $\langle x, y \rangle \neq 0$，則 $\lambda = \bar{\lambda}$，因此 λ 爲實數，本講義中在3維空間上之對稱性變換的固有值都是實數。這個事實我們就這樣來承認了。如果不想利用這個事實，我們也可利用 A 的固有方程式爲3次式，故至少有一實根，用這個事實也可導出我們所要的結果。爲顧及讀者的預備知識，我們就稍作這方面的說明。

設 λ 爲 A 之固有方程式之一實根，則對應於 λ 的固有向量滿足聯立方程式

$$Ax = \lambda x。$$

這個意思示明：

空間的線性變換至少有一個有向量。

今設此固有向量爲 a_1，其對應的固有值爲 λ_1，並設 π 爲含原點 O 且與向量 a_1 垂直之平面，則在平面 π 上之任何向量 x 都與 a_1 垂直，此 x 在 A 下的像爲 $y = Ax$。

如果能證明 y 仍在平面 π 上即可，爲此我們利用 A 爲對稱來證明 $\langle a_1, y \rangle = 0$，則 y 當然在 π 上。事實是

$$\langle a_1, y \rangle = \langle a_1, Ax \rangle = \langle x, Aa_1 \rangle = \langle x, \lambda_1 a_1 \rangle = \lambda_1 \langle x, a_1 \rangle = 0$$

，因此 $a_1 \perp y$，換句話說，A 作用在平面 π 上所得的像仍在 π 上。在1.我們已知對稱線性變換平面上可找到互相垂直之兩個固有向量 a_2，a_3，故我們已得3個向量 a_1，a_2，a_3 爲互相垂之一組固有向量。於是得到下面結論：

空間的對稱線性變換至少存在一組互相垂直之固有向量。

今將 a_1，a_2，a_3 正規化，也就是使其長度爲單位長，則得一組新正規直交基底 e_1'，e_2'，e_3'，以此基底就可得對角線化的矩陣：

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

λ_1，λ_2，λ_3爲向量$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$的固有值。若考慮$\widetilde{A}$的固有多項式，則顯然爲

$$|\widetilde{A}-\lambda I| = \begin{vmatrix} \lambda_1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)(\lambda_3-\lambda)$$

這個多項式與A的固有方程式相同，這個性質說明了線性變換之矩陣所得的固有多項式與所選擇的基底無關，由這裏我們也證明了矩陣A的固有方程式之根都是實數。

對於固有方程式之根λ_1，λ_2，λ_3應該分成3種情形來考慮。

① λ_1，λ_2，λ_3都相異的情形：此時對應有3個固有向量$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$。這三個向量一定互相垂直，可設長度爲1，則唯一確定。

② λ_1，λ_2，λ_3中有二個相等：設$\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$，則$\lambda_1$對應於唯一的單位固有向量$\boldsymbol{a}_1$，而對應於$\lambda = \lambda_2 = \lambda_3$之固有向量有無數多不在同一直線上。

後半段的事實可說明如下，設給定的對稱變換爲$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$，因已知存在有3個互相垂直之固有向量$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$，可設其長度都是1（這是可能的）。現在的情形是此三個向量中有二個以$\lambda = \lambda_2 = \lambda_3$爲固有值，此兩個向量爲$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$，而$\boldsymbol{a}_1$的固有值爲$\lambda_1$，今設$\pi$爲含原點0而與$\boldsymbol{a}_1$垂直之平面，顯然$\pi$包含$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$在內，事實上$\pi$包含有無數多互相垂直之兩向量都以$\lambda_2 = \lambda_3$爲固有值。

③ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$的情形：設此等值爲$\lambda$，則變換是以原點爲中心，相似比$\lambda$之相似擴大，故所有非0之向量，其固有值都是$\lambda$。

由以上諸情形，要解$\boldsymbol{e}_1'$，$\boldsymbol{e}_2'$，$\boldsymbol{e}_3'$及$\widetilde{A}$的步驟還是依1.之次序，我們就直接以下面例題來說明。

例2　設有關於某基底$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$之一線性變換A爲：

$$\begin{aligned} y_1 &= 7x_1 - 2x_2 \\ y_2 &= -2x_1 + 6x_2 - 2x_3 \\ y_3 &= -2x_2 + 5x_3 \end{aligned}$$
（看得出這是對稱變換！）

試將A對角線化，並求新基底$\boldsymbol{e}_1'$，$\boldsymbol{e}_2'$，$\boldsymbol{e}_3'$。

解　$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix},\ |A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

即$\lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0$，解之得　$\lambda_1 = 3$，$\lambda_2 = 6$，$\lambda_3 = 9$

以λ_1，λ_2，λ_3分別代入聯立方程式

$$\begin{aligned} (7-\lambda)\ell - 2m &= 0 \\ 2\ell + (6-\lambda)m - 2n &= 0 \\ -2m + (5-\lambda)n &= 0 \end{aligned}$$

解得（可先得$\ell : m : n$而後滿足$\ell^2 + m^2 + n^2 = 1$）正規化之3個固有向量爲

$$\boldsymbol{e}_1' = (\ell_1, m_1, n_1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\boldsymbol{e}_2' = (\ell_2, m_2, n_2) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

$$\boldsymbol{e}_3' = (\ell_3, m_3, n_3) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

這是以3，6，9爲固有值之固有向量，以此爲基底的變換矩陣表示爲

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&6&0\\0&0&9\end{pmatrix}$$

而坐標表示爲 $\begin{cases} y_1' = 3x_1' \\ y_2' = 6x_2' \\ y_3' = 9x_3' \end{cases}$

任意向量要用新基底之坐標表示（即坐標變換）則爲

$$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$ （即 $\boldsymbol{x}=L\boldsymbol{x}$，$L=(L^t)^{-1}$）

例 3　設關於基底 e_1，e_2，e_3 之一線性變換爲

$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 - 4x_3 \\ y_2 = 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 \\ y_3 = -4x_1 - 2x_2 + x_3 \end{cases}$　（看出爲對稱變換）

試將此變換對角線化，並求其正規直交基底。

解
$$A=\begin{pmatrix}1&2&-4\\2&-2&-2\\-4&-2&1\end{pmatrix}$$

固有方程式爲 $\begin{vmatrix}1-\lambda&2&-4\\2&-2-\lambda&-2\\-4&-2&1-\lambda\end{vmatrix}=0$，即 $\lambda^3-27\lambda-54=0$

此解爲 $\lambda_1=6$，$a_2=-3$，$\lambda_3=-3$，即其中有 2 根相等，於是

(1) $\begin{cases}(1-\lambda)\ell + 2m - 4n = 0\\ 2\ell + (-2-\lambda)m - 2n = 0\\ -4\ell - 2m + (1-\lambda)n = 0\end{cases}$

於 $\lambda=\lambda_2=\lambda_3=-3$ 代入得 $\begin{cases}4\ell + 2m - 4n = 0\\ 2\ell + m - 2n = 0\\ -4\ell - 2m + 4n = 0\end{cases}$

即與

(2)　$2\ell + m - 2n = 0$

同意義，此方程式代表過原點 0 的一平面，這個平面的方向，即法向量（2，1，－2），就是(1)以 $\lambda=\lambda_1=6$ 代入時解得的固有向量，故經正規化得

$$e_1'=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$$

(2)的任意解，如 $\ell=1$，$m=2$，$n=2$，再正規化得　$e_2'=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{-2}{3}\right)$

e_2' 的固有值爲 -3，今找一個單位向量 e_3' 與 e_1' 及 e_2' 都垂直，此向量即由 $e_1'\times e_2'$（向量積）唯一決定，即

$$e_3' = e_1' \times e_2' = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} \end{vmatrix} = \frac{2}{3}e_1 - \frac{2}{3}e_2 + \frac{1}{3}e_3$$

故 $$e_3' = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$$

e_3' 也是以 -3 爲固有值，故新基底 e_1'，e_2'，e_3' 已求得，關於此新基底的變換矩陣

爲 $$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

注意 1 $$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

表示平面 $Oe_2'e_3'$ 是關於相似比 6 的伸縮變換（在 x_1 軸上），

平面 $Oe_1'e_3'$ 是關於相似比 -3 的伸縮變換（在 x_2 軸上），

平面 $Oe_1'e_2'$ 是關於相似比 -3 的伸縮變換（在 x_3 軸上）

等三個伸縮變換的積。

注意 2 $\widetilde{A} = P^{-1}AP$，若只求 $\widetilde{A}$ 則只要求出 A 的固有值就易得，但求 P 就稍要一點手續，如上一章所述定理 5－4 Jordan 標準形，對於非對稱矩陣 A 也不難得，但要求此處的 P 則稍麻煩一點。

例如

矩陣 $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ 並不是對稱矩陣

但 A 的固有方程式爲 $\begin{bmatrix} 3-\lambda & -3 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -2 & -\lambda \end{bmatrix} = 0$ 即 $(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$

因此依照 Jordan 定理，A 可化成標準形 $\widetilde{A} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

練習問題

1. 試求矩陣 $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 的 Jordan 標準形

答 A 的固有方程式爲 $(\lambda + 1)^3 = 0$，故 Jordan 標準形爲

$$\widetilde{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2. 設 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，（注意 A 爲對稱變換！）

試求A的固有值，以及其固有向量做爲正規直交基底，並求關於新基底的坐標變換以及關於新基底之變換的坐標表示。

答　$\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=4$，新基底爲

$$e_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{-1}{\sqrt{2}}\right),\quad e_2{}'=\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{2}{\sqrt{6}},\ \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$e_3{}'=e_1{}'\times e_2{}'=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

坐標變換爲
$$L=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

$$x'=Lx$$

$$\widetilde{A}=LAL^t=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$

3. 試將$A=\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&2&2\\-3&-6&-6\end{pmatrix}$對角線化，並求$\widetilde{A}=P^{-1}AP$的$P$

答　A雖不是對稱變換，但其固有方程式之根$\lambda_1=0$，$\lambda_2=-2$，$\lambda_3=-3$都相異，故對應有三個線性獨立的固有向量，此三個固有向量可從聯立方程式$(A-\lambda I)a=0$，於$\lambda=\lambda_1$，λ_2，λ_3代入解之，因之可選取（不一定唯一）$a_1=(0,1,-1)^t$，$a_2(-2,1,0)^t$
$a_3=(1,0,-1)^t$（注意a_1，a_2，a_3不一定直交）

於是求得$P=\begin{pmatrix}0&-2&1\\1&1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}=(a_1,a_2,a_3)$

而　$\widetilde{A}=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-2&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$

4. 試將$A=\begin{pmatrix}1&3&2\\3&1&2\\2&2&-3\end{pmatrix}$對角線化（注意$A$爲對稱！）

並求互爲直交的固有向量基底以及坐標變換！

提示：固有值爲5，－2，－4，仿例2做。

5. 如第4題求對角線化$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$

答　固有值爲1，1，4，可仿例3做。

6. 將　$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$對角線化，並求直交矩陣$L$。

答　固有值爲　$-1, -1, 2$　（-1爲2重根），直交之單位固有向量可選到

$$e_1' = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad e_2' = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\ \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$e_3' = \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$L = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \qquad \widetilde{A} = LAL^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

7. 設A爲可對角線化的矩陣，即$\widetilde{A} = P^{-1}AP$，於是$A = P\widetilde{A}P^{-1}$

① 試證明　$A^n = P\widetilde{A}^n P^{-1}$。

② 利用此結果當$A = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$　（$0 < p < 1$）時　求$\lim\limits_{n\to\infty} A^n$

③ 設$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，求$\lim\limits_{n\to\infty} A^n$

④

④ $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$，試求$\lim\limits_{n\to\infty} A^n$

答 ① 直接證明。

② 求得固有值爲1，$2p-1$，但$0 < p < 1$　所以　$-1 < 2p < -1$

於是求得　$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$　$\widetilde{A} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2p-1 \end{pmatrix}$

$$\lim_{n\to\infty} A^n = P\lim_{n\to\infty}\widetilde{A}^n P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

③ 仿②求之。

④ 固有值爲0，1，$-\frac{1}{2}$，$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$，$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^n = P\widetilde{A}^n P \to P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

8 設 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，其固有方程式爲

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc)$$

試實際證明 $f(A) = 0$ 。(第五章Caleg-Hamilton定理之特例)

☆下一次講二次形、二次曲線 二次平面

本文作者現任教於清大數學系