數播信箱

(1. 學宏翔來函)

編輯先生：

學生是季刊的讀者，也對數學頗有興趣。有一個問題想請敎您，我在高一時老師敎到自然數的連乘積及一些問題，有某自然數的因數個數的公式及因數和公式，及比其小而跟其互質的自然數個數公式，也得知這些公式的由來。但奇怪却沒有互質的自然數的總和這個公式，在書局也沒找到，於是決定研究一下。

由1做到30，每個自然數比它小又互質的自然數總和在二天奮鬥下找出這個通式

自然數 $N=P_1^{a_1}\cdot P_2^{a_2}\cdot P_3^{a_3}\cdots$

$(P_1, P_2, P_3, \cdots)$ 爲質數，$a_1, a_2\cdots\in N$

那麼比N小又與其互質數（包括1）的總和爲（不包括本身）：

$$\frac{[P_1^{2a_1-1}(P_1-1)]\cdot[P_2^{2a_2-1}\cdot(P_2-1)]}{2}$$

舉個例說：210有比其小而互質的自然數和爲

$$\frac{[2(2-1)][3(3-1)][5(5-1)][7(7-1)]}{2}$$

而經實際算出一點也沒錯，屢試不爽。於是想知道怎麼證明它，但無處查詢。於是冷落了這個公式，直到三年後前幾天又想到它，因此又拿出來研究，無意中證明出來了。證明如下：

首先我們知道互質個數爲：

$$N\cdot\left(1-\frac{1}{P_1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{P_2}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

我們設$x_1=1$，$(x_1, N)=1$，而$(x_2, N)=1$，$(x_3, N)=1\cdots\cdots(x_m, N)=1$，而令$x_m<N/2$，$x_1, x_2, \cdots x_m$ 表部份互質個數共m個，但若$a<b$，$(a, b)=1$，則$(b-a, b)=1$的條件下我們知剩下的數爲$N-x_1$，$N-x_2$，$\cdots N-x_m$，也是m個，於是所有比N小與其互質的自然數總和爲

$$(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_m)$$
$$+[(N-x_1)+(N-x_2)+\cdots+(N-x_m)]$$

經消減爲$N+N+\cdots+N$共有m個，即爲mN。但

$$mN=\frac{2mN}{2}=\frac{N}{2}\cdot 2m$$

而$2m$即爲所有互質數的個數，因爲$x_1, x_2, \cdots x_m$，$(N-x_m)$，$(N-x_{m-1})$，$\cdots(N-x_1)$共有$2m$個，即

$$2m=N\cdot\left(1-\frac{1}{P_1}\right)\left(1-\frac{1}{P_2}\right)\cdots\cdots \quad ②$$

代入$\frac{N}{2}\cdot 2m$，得

$$\frac{N^2}{2}\left(1-\frac{1}{P_1}\right)\left(1-\frac{1}{P_2}\right)\cdots\cdots$$

而$N=P_1^{a_1}\cdot P_2^{a_2}\cdots$，故整理得公式

$$\frac{[P_1^{2a_1-1}(P_1-1)][P_2^{2a_2-1}(P_2-1)]}{2}$$

證明完畢。

學生不知這樣證明是否妥當，祈請指敎，還有，是否有其它證明法？關於這個公式及證法在何處書中，可以尋求得到？祈請告訴。

學生　學宏翔　敬上

學宏翔同學：

所提爲初等整數論的問題，書中大多列爲習題（例如 *I.Niven-H.S. Zuckerman: An Introduction to the Theory of Numbers*，第40頁第17題）。你最初由實驗導得的公式是對的，最近所作的證明也正確，而且可說是最簡捷的方法。我現在利用包容－互斥原理，即下述方法給予另一證明，供大家參考。

設自然數$N(\geq 2)$的質因數分解爲

$$N=P_1^{a_1}P_2^{a_2}\cdots\cdots P_n^{a_n}=\prod_{k=1}^{n}P_k^{a_k}\cdots\cdots\cdots(1)$$

令$f(N)$表示小於N且與N互質的所有自然數的和。　欲證

$$f(N)=\frac{N^2}{2}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{P_k}\right)\cdots\cdots(2)$$

證明：我們考慮所有不大於N且不與N互質的自然數的和，以$g(N)$表示，則

$$f(N)+g(N)=1+2+\cdots+N=\frac{N(N+1)}{2} \quad \cdots\cdots(3)$$

首先列出不大於N的所有P_1 的倍數：

$$P_1\ ,\ 2P_1\ ,\cdots,\ \left(\frac{N}{P_1}\right)P_1$$

將上列各數求和得

$$P_1+2P_1+\cdots+\left(\frac{N}{P_1}\right)P_1$$

$$=\frac{P_1}{2}\left(\frac{N}{P_1}\right)\left(\frac{N}{P_1}+1\right)$$

$$=\frac{N}{2}\left(\frac{N}{P_1}+1\right)$$

同理，不大於N的所有P_k 的倍數的和為

$$\frac{N}{2}\left(\frac{N}{P_k}+1\right),\ k=1\ ,\ 2\ ,\cdots,\ n$$

對k求和得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{N}{2}\left(\frac{N}{P_k}+1\right)\cdots\cdots\cdots(4)$$

不大於N的所有P_jP_k的倍數的和為

$$\frac{N}{2}\left(\frac{N}{P_jP_k}+1\right),$$

而在(4)式中P_jP_k 的倍數被計算兩次，為了要導出$g(N)$的公式，我們先將(4)式修正，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{N}{2}\left(\frac{N}{P_k}+1\right)-\sum_{\substack{j,k=1\\ j<k}}^{n}\frac{N}{2}\left(\frac{N}{P_jP_k}+1\right)\cdots\cdots(5)$$

再考慮$P_jP_kP_l$ 的倍數，在(5)式第一個和中被計算3次，在第二個和中也被計算3次，於是我們將(5)式進一步修正

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{N}{2}\left(\frac{N}{P_k}+1\right)-\sum_{\substack{j,k=1\\ j<k}}^{n}\frac{N}{2}\left(\frac{N}{P_jP_k}+1\right)+\sum_{\substack{j,k,l=1\\ j<k<l}}^{n}\frac{N}{2}\left(\frac{N}{P_jP_kP_l}+1\right)$$

如此繼續修正，最後得到$g(N)$的公式

$$g(N)=\sum_{k=1}^{n}\frac{N}{2}\left(\frac{N}{P_k}+1\right)-\sum_{\substack{j,k=1\\ j<k}}^{n}\frac{N}{2}\left(\frac{N}{P_jP_k}+1\right)+\sum_{\substack{j,k,l=1\\ j<k<l}}^{n}\frac{N}{2}\left(\frac{N}{P_jP_kP_l}+1\right)-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{N}{2}\left(\frac{N}{P_1P_2\cdots P_n}+1\right)$$

整理上式得

$$g(N)=\frac{N^2}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{P_k}-\sum_{\substack{j,k=1\\ j<k}}^{n}\frac{1}{P_jP_k}+\sum_{\substack{j,k,l=1\\ j<k<l}}^{n}\frac{1}{P_jP_kP_l}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{P_1P_2\cdots P_n}\right)+\frac{N}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}1-\sum_{\substack{j,k=1\\ j<k}}^{n}1+\sum_{\substack{j,k,l=1\\ j<k<l}}^{n}1-\cdots+(-1)^{n-1}\right)\ (6)$$

由於

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{P_k}\right)=1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{P_k}+\sum_{\substack{j,k=1\\ j<k}}^{n}\frac{1}{P_jP_k}-\sum_{\substack{j,k,l=1\\ j<k<l}}^{n}\frac{1}{P_jP_kP_l}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{P_1P_2\cdots P_n}$$

以及由二項係數的公式

$$\sum_{k=1}^{n}1-\sum_{\substack{j,k=1\\ j<k}}^{n}1+\sum_{\substack{j,k,l=1\\ j<k<l}}^{n}1-\cdots+(-1)^{n-1}=n-\binom{n}{2}+\binom{n}{3}-\cdots+(-1)^n$$

$$=1$$

我們可將(6)式化為

$$g(N)=\frac{N^2}{2}\left[1-\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{P_k}\right)\right]+\frac{N}{2}=\frac{N(N+1)}{2}-\frac{N^2}{2}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{P_k}\right)$$

由上式即得所要證的(2)式，證明完畢。

可能尚有其他證法，不妨在空暇時再作嘗試。

再談，　　祝

好

繆龍驥　敬啓