阿呆的發現

陸思明

一、點點滴滴

例 1：

求含 1 個正因數的自然數。

【解】因爲只有"1"僅含有一個正因數（就是 1 本身），故含一個正因數的自然數就是 1 。

例 2：

求含 2 個正因數的最小自然數。

【解】因爲每個正質數 p 的正因數恰有 1 與 p 兩個，而正質數中最小的是 2，故含兩個正因數的最小自然數就是 2 。

例 3：

求含 3 個正因數的最小自然數。

【解】由正因數的個數公式，可知：若 p 爲質數，則形如 p^2 的自然數，必恰含有 3 個正因數。但爲了求最小的 p^2，故取 p 爲最小的質數 2 即可，於是知含 3 個正因數的最小自然數就是 2^2（即 4）。

例 4：

求含 4 個正因數的最小自然數。

【解】(1) 由前三個例子，我們的答案會不會是 2^3 呢？換言之設 p 是質數，則除形如 p^3 的自然數含有 4 個正因數外，還有沒有其他形式的數也含有 4 個正因數呢？（好的猜測，常導致新的發現）

(2) 有！因爲 $4=2\times 2\overset{\text{即}}{=}(1+1)(1+1)$。故若 p，q 爲質數，則所有形如 pq 的自然數都有 4 個正因數（即 1，p，q，pq 這 4 個）。因此要想使 pq 爲最小，只要取質數 $p=2$，$q=3$ 即可，故 2×3 是 pq 形式中的最小者。

(3) 除掉 p^3 及 pq 這兩種形式外，已沒有別的形式的自然數能有 4 個正因數了！（因爲 4 只能分解爲 4×1 與 2×2）。所以只要比較 2^3 與 2×3 誰最小即可，顯然 2×3 最小，故含 4 個正因數的最小自然數是 $2\times 3=6$ 。

例 5：

設 m 爲一正質數，則含有 m 個正因數的最小自然數爲 ＿＿＿＿。

【答】2^{m-1} 。

【解】(1) 因爲 m 爲一正質數，故它不可能分解成 $(m_1+1)(m_2+1)$，或兩個以上正因數之積，（其中 m_1，$m_2\in N$）。

(2) m 只能寫成 $(m-1)+1$，故有 m 個正因數的自然數，只有「p^{m-1}」的這一種形式。而想要使 p^{m-1} 爲最小，只要取質數 $p=2$ 即可，所以有 m 個正因數的最小自然數 $=2^{m-1}$ 。（而 m 爲質數）

註

由此可知含 5 個正因數的最小自然數是 2^4，
（含 7 個正因數的最小自然數）$=2^6$
（含 11 個正因數的最小自然數）$=2^{10}$
其他類推。

二、進一步的窺探

例 6：

求含 6 個正因數的最小自然數。

【答】12 。

【解】(1) 因爲 6 只能分解成

$6\times 1\overset{\text{即}}{=}(5+1)(0+1)$，及

$3\times 2\overset{\text{即}}{=}(2+1)(1+1)$。

故含 6 個正因數的自然數只有 $p_1^5p_2^0$，及 $p_1^2p_2^1$ 兩類。（其中 p_1，p_2 爲質數）

(2) 第一類：$p_1^5p_2^0$ 即 p_1^5，此類之最小者 $=2^5$ 。

第二類：$p_1^2p_2^1$ 中的最小者 $=2^2\times 3$。而 $2^2\times 3<2^5$；故含 6 個正因數的所

有自然數中以 $2^2 \times 3$ 為最小。

例 7：

設一自然數 n 有 15 個正因數　則最小自然數 n 為　(a)偶數　(b)奇數　(c)平方數　(d) 3 的倍數　(e) 5 的倍數。

【答】$n = 144$，故選(a)(c)(d)。

【解】(1)　設 p 為質數，則形如 p^{14} 的自然數都有 15 個正因數，其中最小的當然是 2^{14}。

(2)　但是 15 又可分解為 $(4+1)(2+1)$，故若 p，q 均為質數，則形如 p^4q^2 的自然數都有 15 個正因數，而其中最小的顯然是 $2^4 \times 3^2$。

(3)　因含 15 個正因數的自然數只有 p^{14} 與 p^4q^2 這兩種形式，故只要比較 2^{14} 與 $2^4 3^2$ 誰最小即可！由 $2^{14} - 2^4 \times 3^2 = 2^4(2^{10} - 3^2) > 0$，可知 $2^{14} > 2^4 3^2$。所以含 15 個正因數的最小自然數 $n = 2^4 \times 3^2$。

例 8：

阿勤把上兩例寫成了如下的形式，「設正整數 m 可分解成 $m = m_1 \times m_2$，其中 m_1，m_2 為質數且 $m_1 \geq m_2$，則含 m 個正因數的最小自然數 $= 2^{m_1-1} \times 3^{m_2-1}$」。

【他的證明】(1)　因為 $m = m_1 \times m_2$，且 m_1，m_2 為質數，故含 m 個正因數的自然數只有下列兩類：

①　p_1^{m-1}（即 $p_1^{m_1 \times m_2 - 1}$）

②　$p_1^{m_1-1} p_2^{m_2-1}$

（其中 $m_1 \geq m_2$）

(2)　第①類中最小的是 2^{m-1}（即 $2^{m_1 m_2 - 1}$）。

第②類中最小的是 $2^{m_1-1} \times 3^{m_2-1}$。

現在只須證明 $2^{m_1-1} \times 3^{m_2-1}$ 小於 $2^{m_1 m_2 - 1}$ 即可。

(3)　因為 $\dfrac{2^{m_1-1} \times 3^{m_2-1}}{2^{m_1 m_2 - 1}}$

$\underline{\text{指數律}}$ $2^{(m_1-1)-(m_1 m_2 - 1)} \times 3^{m_2-1}$

$\underline{\underline{\text{化簡}}}$ $2^{m_1(1-m_2)} \times 3^{m_2-1}$

$= 2^{-m_1(m_2-1)} \times 3^{m_2-1}$

$= (2^{-m_1} \times 3)^{m_2-1}$

$= \left(\dfrac{3}{2^{m_1}}\right)^{m_2-1}$ ……①

而 m_1 為一質數，故 $m_1 \geq 2$，

$\therefore\ 2^{m_1} \geq 2^2 > 3$，

故　$\dfrac{3}{2^{m_1}} < 1$ ……②

又因 m_2 為一質數，

$\therefore\ m_2 > 1$，

$\therefore\ m_2 - 1 > 0$ ……③

由②，③得

$\left(\dfrac{3}{2^{m_1}}\right)^{m_2-1} < 1^{m_2-1} = 1$ ④

由①，④及遞移律，得

$\dfrac{2^{m_1-1} \times 3^{m_2-1}}{2^{m_1 m_2 - 1}} < 1$ ……⑤

由⑤式知

$2^{m_1-1} \times 3^{m_2-1} < 2^{m_1 m_2 - 1}$

故若 m 能分解為 $m_1 \times m_2$，（m_1，m_2 為質數且 $m_1 \geq m_1$）則含 m 個正因數的最小自然數是 $2^{m_1-1} \times 3^{m_2-1}$

證畢。

註

當阿呆看完阿勤的證明以後，雖不免心生一絲妒意，但却也佩服有加。他利用阿勤的結論，閃電般地算出了：含 9 個，14 個，21 個，25 個，35 個正因數的最小自然數。答案依次是 $2^2 \times 3^2$，$2^6 \times 3$，$2^6 \times 3^2$，$2^4 \times 3^4$，$2^6 \times 3^4$。他好高興！就再接再勵地作了下面兩個例子。

例 9：

設一自然 n 有 18 個正眞因數，則此最小自然數 n 為　　　。

【答】180。

【解】(1)　因 $18 = 9 \times 2 = 6 \times 3 = 3 \times 3 \times 2$ 故有 18 個正因數的自然數不外下列四種形式：（其中 p_1，p_2，p_3 均為質數）① p_1^{17}　② $p_1^{8} p_2$　③ $p_1^{5} p_2^{2}$　④ $p_1^{2} p_2^{2} p_3$

(2) 合於這四種形式的最小自然數依次為

①$2^{17}$ ②$2^8\times 3$ ③$2^5\times 3^2$

④$2^2\times 3^2\times 5$

其中以$2^2\times 3^2\times 5$為最小。

(3) 故有18個正因數的最小自然數

$n=2^2\times 3^2\times 5$

例10：

有28個正因數之最小自然數為　　　　。

【答】960。

【解】(1) 因 $28=14\times 2=7\times 4=7\times 2\times 2$

故含28個正因數的自然數只有下列4類：①p_1^{27} ②$p_1^{13}p_2$ ③$p_1^6p_2^3$

④$p_1^6p_2p_3$（其中p_1，p_2，p_3均為質數）。

(2) 上述四類的最小者分別為：

①$2^{27}$ ②$2^{13}\times 3$ ③$2^6\times 3^3$

④$2^6\times 3\times 5$

而其中以$2^6\times 3\times 5$為最小，故有28個正因數的最小自然數為

$2^6\times 3\times 5$（即960）

三、阿呆的發現

阿呆演算完例9，例10兩題以後，內心不覺靈光一閃，好像捕捉到了一些什麼。（由於阿勤上一次的發現，對阿呆產生莫大的激勵，使他念念不忘那個結論的形式$2^{m_1-1}\times 3^{m_2-1}$）現在他腦中經過一番比較與模擬，就揮筆疾書，寫下了他的「發現」：

> 設m可分解成$m_1\times m_2\times m_3$，（其中m_1，m_2，m_3均為質數且$m_1\geq m_2\geq m_3$，則含m個正因數的最小自然數為$2^{m_1-1}\times 3^{m_2-1}\times 5^{m_3-1}$。

寫完之後，他興奮欲狂，就迫不及待地偷偷遞給了阿彩（他一直暗裏傾慕的女生）。同時，他又忍不住地也告訴了阿勤與阿智。

阿智笑著說：「阿呆！你的結論雖然創意不多，不過模仿與推廣的能力，倒不能不令在下刮目相看！」阿呆正在得意，不防阿彩却把那張「發現」扔回到阿呆的臉上。

阿呆急忙抓住一看，赫然上面多了四個大字「拿證明來！」這情景看在大家眼裏，不禁惹起一陣鬨笑！

阿呆本想在博得大家讚賞之後，再來好好寫出證明過程的。現在大家這麼一笑，臉上就有些掛不住，心中不免氣惱：「你們這些自命“高竿”的人，連這麼明顯的道理，還需要證給你們看嗎？」

阿勤火上加油地說：「不證明就是“冒猜”，離“發現”還差十萬八千里！」阿呆氣結之餘，只好硬著頭皮說：「明天（我把證明）寫給你們看！」

人不受刺激，如何能發揮潛能呢?!阿呆為了明天爭一口氣，寒夜孤燈，獨自在想他的“證明”，等底稿寫成之後，已眼紅背酸，困頓入睡了！

第二天，大家等著看阿呆的笑話，而阿呆已心中有備，抓起粉筆就在黑板上寫下了他的“證明”：

(1) 若m能分解成兩個正整數之積$m_1\times m'$，

且 $m_1\geq m'>1$，則阿勤已證明了

$2^{m_1-1}\times 3^{m'-1}<2^{m_1m'-1}$

因 $m=m_1m'$，

$\therefore\ 2^{m_1-1}\times 3^{m'-1}<2^{m-1}$……①

(2) 假若m'再能分解成$m_2\times m_3$，且

$m_2\geq m_3>1$；則用阿勤的同樣方法即可證出$3^{m_2-1}\times 5^{m_3-1}<3^{m_2m_3-1}$

因 $m'=m_2m_3$，

$\therefore\ 3^{m_2-1}\times 5^{m_3-1}<3^{m'-1}$……②

(3) 以2^{m_1-1}乘②式兩邊

得$2^{m_1-1}\times 3^{m_2-1}\times 5^{m_3-1}$

$<2^{m_1-1}\times 3^{m'-1}$……③

故若$m=m_1m'=m_1m_2m_3$，其中m_1，m_2，m_3為質數且$m_1\geq m_2\geq m_3$，則含m個正因數的最小自然數不是2^{m-1}，也不是$2^{m_1-1}\times 3^{m'-1}$，而是$2^{m_1-1}\times 3^{m_2-1}\times 5^{m_3-1}$。（見①，③兩式）

只見他寫完之後，昂然走下講台，並在經過阿彩的身旁時，給了她狠狠地一瞥。

這時大家似乎被阿呆的氣勢給鎮住了。連阿圖、阿智都不禁暗自佩服「這呆仔確有幾分功力！」，甚至阿彩也一改平時的傲態，有意地回報給阿呆一抹讚賞的微笑。

只有阿勤不服，因爲阿呆不過是拾他的牙慧，現在居然這樣神氣活現？可是一時又找不出阿呆的證明有什麼破綻，於是只好隱忍不發，任他猖狂吧!

當然，阿勤之勤，亦非浪得虛名，在降旗之後，他悶著頭在一張紙上畫著，畫著，突然他面露驚喜，接著一躍而起，連跑帶跳地趕回教室，大喊「阿呆錯了！阿呆錯了！」喊聲驚動了全教室的同學，但却沒看到阿呆。阿智正要向阿勤問個究竟，這才看到阿呆滿面春風地隨著阿彩從外面走了進來，說時遲那時快，阿勤一把抓住阿呆的肩膀說：「你的證明有問題！（他沒等阿呆回話）只要一個反例，就能將你的證明駁倒！拿去看!!」

唰的一聲，阿勤將他剛才演算的紙頭,攤在阿呆的臉前，阿呆被這突如其來的情況弄得摸不著頭腦，一時竟愣在那裏張口結舌不知所以。阿彩想爲他解圍，就接過紙頭看了一眼，只見阿勤在一大片演算數字中圈出了兩行，其中是：

$m = 8 = 4 \times 2 = 2 \times 2 \times 2$ 的情形，$2^3 \times 3$ 固然小於 2^7，但 $2 \times 3 \times 5$ 並不小於 $2^3 \times 3$。所以「含8個正因數的最小自然數」是 $2^3 \times 3$ 而不是 $2 \times 3 \times 5$。

本來阿呆還想將他的「發現」推廣到 $m = m_1 m_2 \cdots\cdots m_k$ 的一般情況，沒想到被阿勤這一記悶棍，將他從雲端打落塵埃，連阿彩也沒法伸出援手，可憐!!

後記　這檔事傳到老師的耳朵裏，他作了如下的講評：

① 說阿呆的發現是"冒猜"有點過份，因爲有阿勤的證明形式在先，而且他也試了 $m = 18$ 與 28 的情形，所以應該說阿呆的發現是一個「有意義的猜測」。

② 因爲阿勤費了好半天的工夫只能找出「一個」反例，可見阿呆的猜測「大致」是對的，不過阿呆的證明確有破綻（否則不會出現反例）。

最後老師懸賞：誰能修補阿呆的破綻，數學成績加10分，外帶一碗牛肉麵。

本文作者曾任教高中近二十年，目前專事編寫高中數學通俗教材。